ISSN 1983-3156
A2
http://dx.doi.org/10.23925/1983-3156.2018v21i2p466-490

“Eu perguntei se o cinco não tem metade”: ações de uma professora dos primeiros anos que apoiam o raciocínio matemático

"I asked if five has not a half": teacher´s actions of the first years which support mathematical reasoning

---

ELIANE MARIA DE OLIVEIRA ARAMAN [1]

MARIA DE LURDES SERRAZINA [2]

JOÃO PEDRO DA PONTE [3]

Resumo

Neste artigo analisamos as ações desenvolvidas por uma professora dos primeiros anos que apoiam o raciocínio matemático dos alunos. O objetivo foi identificar e categorizar as ações da professora durante a discussão de uma tarefa exploratória realizada em uma turma de primeiro ano do 1.º ciclo de uma escola pública da periferia de Lisboa. Os dados foram coletados por meio de observação participante suportada por gravação em áudio e vídeo que, após a transcrição, foram analisados à luz do referencial teórico em quatro categorias de análise. Os resultados sugerem que as ações da professora favoreceram os processos de identificação de padrões, formulação de conjecturas, justificação e generalização, evidenciando o potencial que as ações docentes podem ter no desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos.

Palavras-chave: *Raciocínio matemático, ações do professor, 1.º Ciclo do Ensino Básico.*

Abstract

In this article we analyze the actions developed by a teacher of the early years that support students' mathematical reasoning. The aim was to identify and categorize the teacher's actions during the discussion of an exploratory task carried out with first grade students of a public school in the periphery of Lisbon. Data were collected through participant observation supported by audio/video recording, which, after transcription, were analyzed according to the theoretical framework in four categories of analysis. The results suggest that the actions of the teacher favored the processes of identification of patterns, formulation of conjectures, justification and generalization, evidencing the

1 Doutora em Ensino de Ciências e Educação Matemática pela Universidade Estadual de Londrina. Professora do Departamento de Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Bolsista Capes/PVE Júnior, Edital nº 45/2017/Processo nº 88881.170306/2018-01. *Email*: elianearaman@utfpr.edu.br.

2 Doutora em Educação Matemática pela Universidade de Londres (UK). Professora Coordenadora Aposentada da Escola Superior de Educação, Instituto Politécnico de Lisboa, Lisboa, Portugal. Membro integrado da Unidade de Investigação e Desenvolvimento em Educação e Formação (UIDEF), do Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, Portugal. *Email*: lurdess@eselx.ipl.pt.

3 Doutor em Educação Matemática pela Universidade da Georgia (UGA, EUA). Professor Catedrático do Instituto de Educação, Universidade de Lisboa (IEUL), Lisboa, Portugal. *Email*: jpponte@ie.ulisboa.pt.

potential that the actions of the teachers can have in the development of students' mathematical reasoning.
Keywords: *Mathematical reasoning; teacher actions; 1st Cycle of Basic Education.*

Introdução

Atualmente, as orientações curriculares em todo o mundo destacam o desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos como um dos objetivos a alcançar no ensino desta disciplina (NCTM, 2000; NCTM, 2007). Na verdade, o raciocínio matemático pode ser considerado como um processo central na aprendizagem matemática desde a infância (BRUNHEIRA; PONTE, 2019). Diante disso, os professores desempenham um papel fundamental no apoio à promoção do raciocínio matemático dos alunos (PONTE; QUARESMA, 2016). Para apoiar efetivamente a sua aprendizagem, os professores precisam conduzir práticas nas quais as ideias matemáticas sejam discutidas com e pelos alunos, uma vez que uma compreensão significativa destas ideias mais provavelmente ocorre em salas de aula nas quais os alunos e o professor discutem a seu respeito (ELLIS; ÖZGÜR; REITEN, 2017).

Neste trabalho, temos como objetivo compreender como as ações do professor podem contribuir para o desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos dos primeiros anos. Para isso, partimos de resultados de pesquisas anteriores que discutem as ações do professor que apoiam o raciocínio matemático (WOOD, 1998; PONTE; MATA-PEREIRA; QUARESMA, 2013; ELLIS; ÖZGÜR; REITEN, 2017). A partir de uma síntese destes estudos, elaboramos um quadro de análise para as ações de professores composto por quatro categorias: convidar; guiar/apoiar; informar/sugerir; e desafiar. Os dados analisados por meio desta categorização foram coletados durante uma aula em uma turma do primeiro ano do 1.º ciclo na qual a professora promoveu uma discussão a respeito de uma tarefa exploratória resolvida pelos alunos.

Raciocínio matemático

Morais, Serrazina e Ponte (2018) definem o raciocínio matemático como sendo um conjunto de processos mentais complexos através dos quais se obtêm novas proposições (conhecimento novo) a partir de proposições conhecidas ou assumidas como verdadeiras (conhecimento prévio). Pelo seu lado, Jeannotte e Kieran (2017, p. 7) definem raciocínio matemático como sendo "um processo de comunicação com os outros ou consigo mesmo que permite inferir enunciados matemáticos de outros enunciados matemáticos". As autoras caracterizam vários processos associados ao raciocínio matemático, indicando: (i) buscar por semelhanças e diferenças, que inclui generalização, conjectura, identificação de padrões, comparação e classificação; (ii) validação, ou seja, processos justificação, e prova; e (iii) exemplificação, que apoia os dois anteriores. Tomando como base o trabalho destas autoras, Ellis, Özgür e Reiten (2018, p. 2) definem raciocínio matemático como "um processo de inferência que inclui procurar semelhanças ou diferenças, validar e exemplificar".

Lannin, Ellis e Elliot (2011) consideram que o raciocínio matemático envolve vários processos interrelacionados, como conjecturar, generalizar, investigar porquê, justificar e refutar. Morais, Serrazina e Ponte (2018) indicam que elaborar conjecturas corresponde a raciocinar sobre relações matemáticas, desenvolvendo declarações que requerem maior exploração para verificar se são verdadeiras ou não (LANNIN; ELLIS; ELLIOT, 2011). Assim, ao procurar compreender se uma conjectura é verdadeira ou não, o aluno é conduzido a ampliar seu entendimento matemático, saindo dos casos particulares para buscar semelhanças entre os diferentes casos (NCTM, 2007; MORAIS; SERRAZINA; PONTE, 2018). Nesse processo de desenvolvimento de conjecturas gerais, as generalizações, os alunos desenvolvem conceitos e aprendem a usar símbolos e outras representações (MATA-PEREIRA; PONTE, 2012). No que diz respeito às generalizações, podem ser considerados dois tipos de atividades: "identificar pontos comuns em casos diferentes e estender uma afirmação além do domínio em que foi originada" (BRUNHEIRA; PONTE, 2019, p. 90).

Outra faceta importante do raciocínio é justificar. Lannin, Ellis e Elliot (2011) consideram que uma justificação é válida quando composta por uma sequência lógica de afirmações que se apoiam em outros conhecimentos já estabelecidos e conduzem a uma conclusão. Dessa forma, investigar porquê envolve a identificação de relações que permitem entender por que uma afirmação pode ser verdadeira ou falsa e tais ações estão relacionadas com o processo de justificar.

Com relação ao ensino, Ponte, Mata-Pereira e Henriques (2012, p. 355) ressaltam que "o grande desafio do ensino da matemática é o desenvolver a capacidade de raciocínio dos alunos". De acordo com o NCTM (2007, p. 5), o raciocínio matemático apresenta relevância na aprendizagem da matemática em todos os níveis escolares sendo que deve acontecer "em todas as salas de aulas de matemática todos os dias". Deve ser um ambiente no qual alunos e professores se envolvam em questionar e responder a questões como "O que você fez?", "Como você fez?" (WOOD, 1998, p. 38). Mesmo nos primeiros anos de escolaridade, os alunos podem ter experiências matemáticas que envolvem diferentes processos de raciocínio matemático, considerando as especificidades dos diferentes anos (STYLIANIDES, 2007).

Ao investigar o porquê, os alunos se envolvem em processos que lhes permitem elaborar "justificações para se convencerem a si próprios e aos outros porque é que uma afirmação particular é verdadeira" (LANNIN; ELLIS; ELLIOT, 2011, p. 35). O raciocínio matemático possibilita que os alunos ultrapassem o uso rotineiro de procedimentos utilizando conceitos, propriedades e procedimentos com compreensão.

Para promover o raciocínio matemático dos alunos em sala de aula, os professores devem possibilitar-lhes ambientes de aprendizagem desafiadores, em uma perspectiva diferente da usual, na qual resolvem exercícios usando procedimentos bem conhecidos. Nesse entendimento, consideramos as discussões matemáticas realizadas com toda a classe a partir da resolução de tarefas exploratórias (RUTHVEN; HOFMANN; MERCER, 2011) como momentos privilegiados para promover o desenvolvimento do raciocínio matemático pelos alunos (LANNIN; ELLIS; ELLIOT, 2011).

Ações do professor que favorecem o raciocínio matemático

Para criar oportunidades para que os alunos desenvolvam o raciocínio matemático, os professores precisam repensar as normas estabelecidas em sala de aula, criando ambientes que proporcionem oportunidades para pensar em vez de estabelecer regras e procedimentos padronizados. Precisam considerar as diferentes maneiras pelas quais diferentes pessoas podem pensar e resolver problemas. Assim, é preciso que os professores revejam as suas "expectativas para criar um ambiente em que as crianças expressem seu pensamento" (WOOD, 1998, p. 37).

Ponte, Mata-Pereira e Quaresma (2013) indicam que, nos últimos anos, o raciocínio matemático tem aparecido como uma importante vertente transversal no ensino desta disciplina, aliado à realização de tarefas desafiantes e discussões coletivas com a turma sobre a sua resolução. Ainda no que diz respeito ao papel do professor, mais recentemente, as pesquisas têm dado atenção a aspectos relacionados com a "seleção das tarefas e a comunicação na sala de aula, sublinhando a natureza do questionamento, a negociação de significados e os processos de redizer" (PONTE; MATA-PEREIRA; QUARESMA, 2013, p. 55).

Nessa perspectiva, muitos pesquisadores se debruçaram em pesquisar as ações[4] dos professores em sala de aula. Em sua maioria, tais pesquisas podem ser caracterizadas como a identificação de "(a) atos verbais individuais, (b) dicotomias de ações, ou (c) tipos de ações que apoiam o raciocínio e a justificação" (ELLIS; ÖZGÜR; REITEN, 2018, p. 4). O foco do presente artigo está nos estudos que caracterizam as ações do professor, especialmente aquelas que são mais eficazes para promover o raciocínio do aluno.

Diversos pesquisadores desenvolveram dispositivos para analisar as ações do professor no que se refere ao desenvolvimento do raciocínio dos alunos. Analisamos três deles: um modelo elaborado por Wood (1998), a partir da categorização de padrões de interação de movimentos (ações); um modelo de análise das ações do professor na condução de discussões matemáticas, de Ponte, Mata-Pereira e Quaresma (2013); e o modelo TMSSR (*Teacher Moves for Supporting Student Reasoning Framework)*, elaborado por Ellis, Özgür e Reiten (2018).

Wood (1998) considera que, para aprender matemática com compreensão, é necessário criar nas salas de aula situações que encorajem o pensamento e o raciocínio dos alunos. Considera, ainda, que o raciocínio matemático se desenvolve melhor em classes com frequentes situações de interação de discussão. Tais situações requerem do professor ações que possibilitam trocas entre professor e alunos. O seu modelo tem como base as diferentes situações de aprendizagem conceitual teorizadas por Piaget e a análise de dados empíricos. Refere que "a criação dessa estrutura permitiu ir além da descrição de dados empíricos e gerar categorias mais viáveis" (WOOD, 1998, p. 37).

A autora salienta que, nas salas de aula em que ocorrem trocas entre professor e alunos, é possível observar três padrões de interação. O primeiro padrão de interação – *Relatar* – ocorre quando o aluno conta como resolveu o problema. O professor é visto como participante da troca, colocando questões ao aluno que o levem a explicar o que fez e como fez. A explicação fornecida pelo aluno consiste na descrição de seu pensamento. O detalhe de tais descrições "pode variar dentro desses contextos, dependendo da medida em que o professor estabeleceu como expectativa de abrangência e clareza da explicação" (WOOD, 1998, p. 38). No segundo padrão de interação – *Inquirir* – o aluno continua contando como resolveu o problema, mas o professor solicita que ele explique porquê fez daquela maneira, esclarecendo o professor e os demais alunos por que fez assim. Ao

[4] Alguns pesquisadores de língua inglesa referem-se às ações do professor como *teacher moves*. Em uma tradução literal teríamos *movimentos do professor*. Entretanto optamos por adequar esta terminologia pela usualmente utilizada nas pesquisas em língua portuguesa, *ações do professor*.

solicitar que os alunos expliquem o porquê, o professor "exige que os alunos forneçam razões para sua explicação", esclarecendo seu pensamento (WOOD, 1998, p. 39). No terceiro padrão de interação – *Argumentar* – os alunos contam como resolveram o problema, clarificando seus significados e fornecendo razões, entretanto o professor faz também perguntas requerendo justificação, como "Como você sabe disso? Você pode provar isso?" (WOOD, 1998, p. 39). Essas perguntas conduzem os alunos a justificar e fundamentar seu pensamento, descrevendo o seu raciocínio à medida que fornecem suas explicações. Deve considerar-se que estes contextos são inclusivos, por exemplo, no contexto de discussão *Inquirir*, o aluno também vai contar como fez, e no contexto de discussão *Argumentar* dá explicações das razões de por que o fez.

É possível perceber a correspondência entre os três padrões de interação e as oportunidades de os alunos desenvolverem seu pensamento matemático: "Ao se mover da categoria *Relatar* para *Argumentar* podemos ver que cada contexto de discussão cria demandas crescentes para o pensamento do aluno" (WOOD, 1998, p. 39). Os questionamentos feitos pelo professor estão diretamente relacionados com as oportunidades de desenvolvimento das capacidades de pensamento matemático dos alunos.

Essas situações são relevantes para o aluno que está explicando, mas é preciso considerar também aqueles que estão ouvindo, ou seja, até que ponto o professor possibilita a participação ativa de todos os alunos na interação e no discurso. Na sua análise, Wood (1998) observou que, com relação a participação dos alunos ouvintes nas discussões, os professores solicitavam que estes comparassem o modo como tinham resolvido o problema com o modo relatado por outro aluno, vendo se o modo como resolveram era diferente e em que aspectos, de modo a poderem contribuir de maneira diferente para a discussão. Além de comparar as maneiras de resolver o problema, os alunos devem entender o que foi explicado e decidir se concordam ou discordam de uma dada resolução. A forma como os professores iniciam seus alunos nas discussões bem como as rotinas de participação que proporcionam estão diretamente relacionados com um papel mais ativo desempenhado pelos que assumem o papel de ouvintes.

Ponte, Mata-Pereira e Quaresma (2013), tendo em vista o desenvolvimento do raciocínio de outros pesquisadores, indicam que muitos quadros de análise das ações do professor identificam o raciocínio matemático com o raciocínio dedutivo, deixando um pouco de lado seus aspectos indutivos e abdutivos. O que propõem é a articulação dos vários tipos de raciocínio, como a generalização (associada ao raciocínio indutivo e abdutivo) e a justificação (associada ao raciocínio dedutivo). Para os autores, é preciso "levar os alunos a formular conjeturas relativas a classes alargadas de objetos (generalização) e procurar validá-las usando propriedades e definições matemáticas (justificação)" (PONTE; MATA-PEREIRA; QUARESMA, 2013, p. 58). Assim, desenvolveram um modelo das ações do professor para a condução das discussões matemáticas considerando duas dimensões, as ações diretamente relacionadas aos tópicos e processos matemáticos e aquelas relacionadas com a gestão da aprendizagem, sendo que o seu modelo considera "sobretudo as ações relacionadas com os aspectos matemáticos" (PONTE; MATA-PEREIRA; QUARESMA, 2013, p. 59).

As ações de *Convidar* levam os alunos a um contato inicial com o que está sendo ou será discutido e as demais ações dão suporte às discussões matemáticas. As ações de *Guiar/Apoiar* conduzem os alunos, de forma discreta ou explícita, a continuar participando da resolução de um problema já iniciado, por meio de perguntas ou outros tipos de intervenção. Nas ações de *Informar/Sugerir* "o professor assume o papel de introduzir informação, proporcionar argumentos, ou validar respostas dos alunos" (PONTE; MATA-PEREIRA; QUARESMA, 2013, p. 59). Nestas ações, a responsabilidade do discurso matemático fica a cargo do professor. Já em *Desafiar*, o professor "coloca o aluno na situação de ser ele próprio a avançar em terreno novo, seja em termos de representações, da interpretação de enunciados, do estabelecimento de conexões, ou de raciocinar, argumentar ou avaliar" (PONTE; MATA-PEREIRA; QUARESMA, 2013, p. 59). Em continuidade às pesquisas relacionadas com as ações do professor, Mata-Pereira e Ponte (2017) argumentam que, ao apoiar o conteúdo e a gestão das discussões em sala de aula, o professor precisa ser capaz "de articular várias ideias que surgem dos alunos, incentivá-los a elaborar seu pensamento, levá-los a avaliar e comparar suas ideias e, muitas vezes, também garantir que ideias matemáticas importantes são o foco do trabalho" (MATA-PEREIRA; PONTE, 2017, p. 172).

Ellis, Özgür e Reiten (2018) elaboraram o modelo *TMSSR (Teacher Moves for Supporting Student Reasoning*) para analisar as ações do professor que apoiam o desenvolvimento do raciocínio dos alunos. Segundo as autoras, para apoiar a aprendizagem dos alunos, "as discussões em sala de aula devem concentrar-se tanto em ideias matemáticas importantes quanto no desenvolvimento de significados matemáticos por meio de processos comunicativos (ELLIS; ÖZGÜR; REITEN, 2018, p. 2). Nesse processo, o papel desempenhado pelo professor em tais discussões é fundamental e vai desde selecionar tarefas apropriadas, definir sobre quando e como estimular o pensamento dos alunos, até incentivar que estes assumam a responsabilidade intelectual de construir e defender suas ideias matemáticas.

Ellis; Özgür e Reiten (2018) defendem que o seu modelo TMSSR se distingue de outros porque foi desenvolvido especificamente para a matemática e para o raciocínio matemático. Este modelo organiza as ações dos professores em quatro categorias (elicitar, responder, facilitar e estender), de acordo com o seu potencial para apoiar o raciocínio dos alunos. Também destacam que a estrutura do TMSSR coloca as ações dos professores em um *continuum* que não é estritamente hierárquico e apresenta uma série de ações dos professores que se podem coordenar para promover um ambiente orientado para o desenvolvimento do raciocínio matemático (ELLIS; ÖZGÜR; REITEN, 2018).

As ações constantes da estrutura do TMSSR ocorrem em todas as situações de discussão em sala de aula, incluindo as discussões com toda a turma, entre professores e alunos individualmente e em pequenos grupos (ELLIS; ÖZGÜR; REITEN, 2018). As ações que compõem a categoria *Elicitar o raciocínio dos alunos* são aquelas nas quais os professores pretendem extrair, identificar, esclarecer e entender as ideias dos alunos, permitindo aos professores avaliarem o pensamento dos alunos enquanto eles participam da discussão. Os professores podem suscitar conhecimentos básicos ou estratégias de resolução utilizadas, as justificações dadas pelos alunos para suas resoluções, o modo como compreendem uma ideia nova, "o grau em que os conceitos dos alunos estão conectados a princípios matemáticos mais amplos e sua capacidade de fornecer explicações coerentes" (ELLIS; ÖZGÜR; REITEN, 2018, p. 12).

A categoria *Responder ao raciocínio dos alunos* é composta pela forma como o professor reage ao pensamento dos alunos, como "valida as respostas dos alunos, corrige raciocínios ou estratégias de solução incompletos ou imprecisos ou encoraja os alunos a assumirem esses papéis" (ELLIS; ÖZGÜR; REITEN, 2018, p. 12). As ações dessa categoria normalmente seguem as ações da categoria *Elicitar o raciocínio dos alunos*, depois que estes começam a partilhar suas estratégias, resoluções e ideias.

Entretanto, os professores podem responder às ideias dos alunos de maneira mais substantiva, "desenvolvendo seu pensamento, fornecendo informações, explicações ou estratégias alternativas de solução, ou incentivando os alunos a desenvolver soluções diferentes" (ELLIS; ÖZGÜR; REITEN, 2018, p. 14). Essas ações se enquadram na categoria *Facilitar o raciocínio dos alunos*, uma vez que os professores mudam de respostas imediatas para ações que possam incitar o pensamento do aluno por meio de várias formas de orientação e explicação, incentivando-os a fazer conjecturas, identificar padrões ou comparar e classificar ideias.

A categoria *Estender o raciocínio dos alunos* compreende as ações que "aumentam as oportunidades dos alunos de estender seu raciocínio matemático, particularmente em termos de generalizar suas estratégias ou ideias e desenvolver justificativas matematicamente apropriadas" (ELLIS; ÖZGÜR; REITEN, 2018, p. 18). Esta categoria abarca as ações que têm a intenção de promover um raciocínio matemático mais sofisticado, desta forma está no extremo de um *continuum* para o desenvolvimento do raciocínio matemático.

A estrutura proposta pelo TMSSR pode ser útil tanto para professores em formação quanto em serviço, uma vez que, ao identificar e analisar categorias de ações e o *continuum* entre elas, a estrutura do TMSSR evidencia ampla variedade de ações que os professores podem desempenhar durante a realização das aulas.

Metodologia

O presente estudo analisou as ações desempenhadas por uma professora do primeiro ano do 1.º Ciclo do Ensino Básico ao conduzir uma discussão em sala de aula durante a realização de uma tarefa matemática. Considerando o objetivo do estudo, esta investigação segue uma abordagem qualitativa com caráter interpretativo. Insere-se num projeto mais amplo que utiliza uma metodologia de investigação baseada em design (COBB; JACKSON; DUNLOP, 2016; PONTE et al., 2016).

A aula analisada foi realizada em fevereiro de 2015 em uma turma de primeiro ano do 1.º ciclo de uma escola pública da periferia de Lisboa. A respectiva turma é composta por 26 alunos, cujos nomes foram alterados com a finalidade de garantir a confidencialidade. A aula foi gravada em áudio/vídeo e posteriormente transcrita.

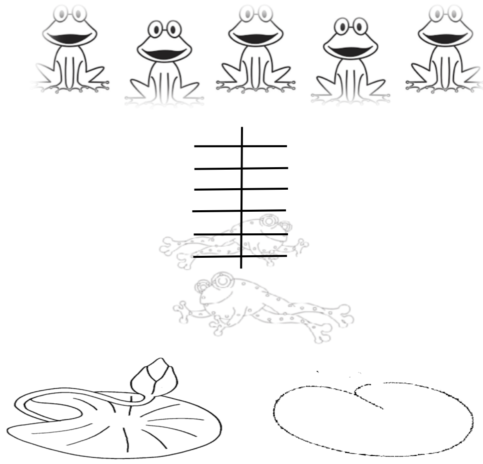
A tarefa desenvolvida na aula denominada *São rãs* foi elaborada no âmbito do projeto *Pensamento numérico e cálculo flexível: Aspetos críticos* desenvolvido por docentes das Escolas Superiores de Educação de Lisboa, Setúbal e Portalegre e apresenta características exploratórias com objetivo de desenvolver a flexibilidade de cálculo em problemas de adição (Figura 1).

Na realização da aula, em um primeiro momento, os alunos foram organizados em duplas para a resolução da tarefa. Embora a organização em duplas permitisse o intercâmbio de ideias entre os alunos, cada um registrou sua resolução em uma folha. Após esse momento, as duplas foram convidadas à lousa para compartilhar com toda a turma a sua resolução. Este momento suscitou uma profícua discussão conduzida pela professora.

Figura 1: Tarefa 1: São rãs!

TAREFA 1

São rãs!



As cinco rãs podem descansar nas folhas de nenúfar; elas podem saltar de uma folha para a outra.
Se todas as rãs querem descansar nas folhas, imagina as diferentes maneiras em que podemos ver as cinco rãs nas duas folhas.

Fonte: Tarefa elaborada por Jean Marie Kraemer no âmbito do Projeto *Pensamento numérico e cálculo flexível: Aspetos críticos*

O foco da análise está nas ações desempenhadas pela docente ao longo da discussão. Para a análise, consideramos quatro categorias de ações, conforme consta no quadro de análise (Figura 2). O quadro de análise foi elaborado a partir da síntese dos modelos sobre as ações dos professores que apoiam o raciocínio matemático apresentadas e discutidas por Wood (1998), Ponte, Mata-Pereira e Quaresma (2013) e Ellis, Özgür e Reiten (2018).

Figura 2: Quadro de análise das ações do professor que apoiam o raciocínio matemático.

<table>
<tr><td rowspan="4">C
A
T
E
G
O
R
I
A
S</td><td>Convidar</td><td>- Solicita respostas para questões pontuais.
- Solicita relatos de como fizeram.</td><td rowspan="4">A
Ç
Õ
E
S</td></tr>
<tr><td>Guiar/Apoiar</td><td>- Fornece pistas aos alunos.
- Incentiva a explicação.
- Conduz o pensamento do aluno.
- Focaliza o pensamento do aluno para fatos importantes.
- Encoraja os alunos e re-dizerem suas respostas.
- Encoraja os alunos a re-elaborarem suas respostas.</td></tr>
<tr><td>Informar/Sugerir</td><td>- Valida respostas corretas fornecidas pelos alunos.
- Corrige respostas incorretas fornecidas pelos alunos.
- Re-elabora respostas fornecidas pelos alunos.
- Fornece informações e explicações.
- Incentiva e fornece múltiplas estratégias de resolução.</td></tr>
<tr><td>Desafiar</td><td>- Solicita que os alunos apresentem razões (justificativas).
- Propõe desafios.
- Encoraja a avaliação.
- Encoraja a reflexão.
- Pressiona para a precisão.
- Pressiona para a generalização.</td></tr>
</table>

Fonte: Os autores

Optamos por nomear as categorias de acordo com a nomenclatura utilizada por Ponte, Mata-Pereira e Quaresma (2013). Para este estudo, a categoria *Convidar* abarca as ações pelas quais o professor solicita informações dos alunos, seja por meio de questões diretas, ou por meio de explicações para o que fez tendo como objeto observar como os alunos estão pensando e qual a sua compreensão a respeito daquele tema. Na categoria *Guiar/Apoiar* encontram-se as ações em que o professor, a partir de perguntas ou explicações, conduz o pensamento do aluno para uma determinada situação ou focaliza fatos importantes ou ainda quando o professor fornece pistas aos alunos e os encoraja a pensarem sobre suas respostas. As ações relacionadas com a categoria *Informar/Sugerir* são aquelas por meio das quais o professor, a partir das informações fornecidas pelos alunos, reage por meio da validação ou correção de uma resposta, ou pela reelaboração de uma informação que esteja incompleta ou que precisa ser aprimorada e também quando fornece explicações e informações e solicita ou apresenta outras estratégias de solução. Na categoria *Desafiar* estão as ações nas quais o professor tenta colocar os alunos em situação desafiadora de modo que estes avancem em seu raciocínio matemático, procurando novas formas de representação, estabelecendo novas conexões, refletindo e avaliando a situação, generalizando e justificando.

Embora o quadro elaborado apresente as categorias em uma ordem, salientamos que as ações necessariamente não precisam ocorrer em todas elas, não existe obrigatoriedade de sequência entre elas nem de hierarquização. Entretanto, como já observado nos outros modelos de análise anteriormente discutidos, algumas ações apresentam maior potencial para apoiar o raciocínio.

Resultados

Como já mencionado, a tarefa foi realizada primeiramente pelos alunos em pares e, em seguida, a professora conduziu uma discussão com a turma toda. Na sequência, apresentamos a análise da discussão. Para efeitos de organização, separamos a discussão em trechos que trazem as transcrições das interações entre a professora e os alunos, as descrições acerca do que ocorreu na condução da aula, entre colchetes, e a identificação de categorias de ações associadas a cada interação, entre parênteses.
No primeiro, a professora chama à lousa dois alunos (Daniel e Gustavo) para compartilhar a resolução da tarefa com os demais alunos da sala.

Trecho 1

> ***Professora:*** *Daniel, vamos lá.* [Entrega o giz para o aluno completar a tabela. O aluno preenche a tabela com 3 e 2 e a professora o vira para a turma.]
> ***Professora:*** *Olha, explica lá. Explica lá, vamos, explica lá Daniel e Gustavo. (Convidar)*
> ***Daniel:*** *Três rãs no primeiro.* [Referindo-se à primeira coluna da tabela.]
> ***Professora:*** *Olha, como é que nós podemos chamar aqui, o primeiro nenúfar? (Guiar)*
> ***Alunos:*** *Silêncio.*
> ***Professora:*** *Qual é cada um? Podemos dizer que isto* [indica o primeiro nenúfar com a mão] *é... Elas estão no mesmo sítio?* [Fala indicando os dois nenúfares.] *(Guiar)*
> ***Alunos:*** *Não.*
> ***Gabriel****: Um está na esquerda e um está na direita.*
> ***Professora:*** *Um está na esquerda e um está na direita. (Informar/Sugerir) Eu posso chamar... Eu posso dar um nome a este nenúfar? (Guiar) Uma coisa simples, pode ser uma letra. Este pode ser o... (Guiar/Apoiar)*
> ***Jonas:*** *A*
> [A professora anota o A logo abaixo do nenúfar.]
> ***Alunos:*** *O outro o B.*
> [A professora escreve B em baixo do outro nenúfar. Depois anota no cabeçalho da tabela o A para a primeira coluna e o B para a segunda.]
> ***Professora:*** *O A e o B. Três no A e dois no B.* [Indica as letras na tabela e nos nenúfares.] *(Informar/Sugerir)*

Neste trecho, é possível observar que as ações da professora podem ser enquadradas em três categorias: *Convidar*, *Guiar/Apoiar* e *Informar/Sugerir*. No que diz respeito à categoria *Convidar,* ocorre quando a professora chama os dois alunos para mostrarem aos colegas como resolveram a tarefa e solicita que eles expliquem o que fizeram compartilhando seu raciocínio com os demais alunos da classe. Em muitos momentos a professora faz perguntas com a finalidade de obter respostas para determinada questão, como, por exemplo, quando questiona como podem chamar cada um dos nenúfares, se eles estão no mesmo sítio. Tais ações visam obter uma resposta para a tarefa. Na sequência, a professora fornece uma pista aos alunos ("pode ser uma letra") para nomear o nenúfar. Tais ações enquadram-se na categoria *Guiar/Apoiar*. As ações da professora de *Informar/Sugerir* abrangem a repetição de uma resposta de um aluno com a finalidade de torná-la pública ("Um está na esquerda e um está na direita") e, em outro trecho, reelabora uma resposta fornecida pelo aluno, uma vez que ela, além de repetir a resposta do aluno, a reestrutura acrescentando a resolução já realizada por outros alunos ("O A e o B. Três no A e dois no B").

A professora prossegue com a aula solicitando que uma outra dupla se dirija à lousa.

Trecho 2

> ***Professora:*** *Alguém quer vir fazer a próxima?* [Várias crianças se manifestam querendo ir à lousa.] *Esse grupo. (Convidar)*
> [Vão um menino, Pedro, e uma menina, Clara. O Pedro anota na lousa o dois e o três, o dois na coluna A e o três na coluna B.]
> ***Pedro:*** *Nós fizemos duas rãs no nenúfar A* [aponta a primeira coluna da tabela] *e... E três no B* [aponta a segunda coluna da tabela].
> ***Professora:*** *Me diz uma coisa, não é igual ao de cima? (Guiar)*
> ***Pedro:*** *Não, é ao contrário.*
> ***Professora:*** *Não é a mesma coisa? (Guiar)*
> ***Pedro:*** *Não.*
> [A professora se dirige para a turma.]
> ***Professora:*** *Não é o mesmo? Três no A e dois no B ou dois no A e três no B é a mesma coisa? (Guiar)*
> ***Alunos:*** *Não.*
> [A professora chama outra dupla para ir à lousa. Uma menina, Mariana, escreve na lousa o cinco na primeira coluna e o zero na segunda coluna da tabela.]
> ***Professora:*** *Explica lá. Olha lá, vamos ouvir. Mariana, diz lá pois. (Guiar)*
> ***Luís****: Cinco do A e zero do B.*
> ***Professora:*** *Cinco rãs no A e zero rãs no B. (Informar/Sugerir) Vocês concordam? (Guiar)*
> ***Alunos:*** *Sim!*
> ***Professora:*** *Agora o grupo da Alice. Pode ser?*
> [Vão ao quadro Jonas e Alice. Jonas escreve o zero na primeira coluna e o cinco na segunda coluna.]
> ***Jonas:*** *Nós usamos zero rãs no A e...*
> ***Alice:*** *... Cinco no B.*

Professora: *Todos concordam? (Guiar)*
Alunos: *Sim.*
Professora: *Qual é a diferença? (Guiar)*
Gabriel: *Está ao contrário, mas o resultado é o mesmo.*
Professora: *Essas duas estão ao contrário.* [Indica a linha que contém o 5 e o 0 e a linha que contém o 0 e o 5.] *(Informar/Sugerir)*

Neste trecho, pode-se observar as ações da professora que se relacionam com a categoria *Guiar,* nos questionamentos que a professora faz aos alunos com a finalidade de entender o que os alunos sabem em relação a uma ideia matemática (no caso, se 2+3 é a mesma coisa de 3+2 na tarefa das rãs). Também há momentos em que as ações têm o objetivo de validar uma resposta correta fornecida pelos alunos com a finalidade de torná-la pública, que se enquadram na categoria *Informar/Sugerir.* No próximo trecho, na sequência da discussão, a professora prossegue em relação às somas 1+4 e 4+1.

Trecho 3

[A professora chama mais uma dupla à lousa.]
Professora: *Este grupo aqui, Margarida e Gonçalo. (Convidar)*
[As duas crianças vão até a lousa e o Gonçalo escreve o 1 na primeira coluna e a Margarida escreve o 4 na segunda coluna.]
Gonçalo: *Ficou com 1 na A e 4 na B.*
Professora: *Todos concordam? (Guiar)*
Alunos: *Sim!*
[A professora chama outro grupo, Lara e Filipa. Filipa vai à lousa e escreve o 4 na primeira coluna e o 1 na segunda.]
Filipa: *Nós pusemos 4 na A e 1 na B.*
Professora: *Todos concordam?*
Alunos: *Sim!*
Professora: *Qual é a diferença entre esta [indica a linha que contém o 4 e o 1] e esta [indica a linha de cima, que contém o 1 e o 4]? (Guiar)*
Alunos: *Está ao contrário, mas o resultado é o mesmo.*
[Como as possibilidades de respostas se esgotaram, a professora não chama outros alunos à lousa, mas dá prosseguimento à discussão.]
Professora: *Me digam uma coisa, há mais alguma possibilidade? (Guiar/Apoiar)*
Alunos: *Não!*
Professora: *Quantas são as rãs? (Guiar/Apoiar)*
Alunos: *Cinco!*
Professora: *Quantas possibilidades são? (Guiar/Apoiar)*
Alunos: *Seis!*
Professora: *Qual é a relação entre o número de rãs e as possibilidades? (Guiar/Apoiar)*
Alunos: *É mais uma!*
Professora: *As possibilidades são "mais uma" do que as rãs. (Informar/Sugerir)*

A professora continua questionando os alunos na tentativa de observar como estes estão pensando e qual a compreensão que têm a respeito da ideia matemática discutida (que 2+3 e 3+2, 5+0 e 0+5, 1+4 e 4+1, embora tenham o mesmo resultado, não são a mesma coisa no caso da tarefa das rãs). Dessa forma, os questionamentos conduzidos pela professora têm como finalidade saber se os alunos compreenderam a ideia matemática já questionada anteriormente. As ações da professora iniciam na categoria *Convidar* e passam para *Guiar/Apoiar*, com questionamentos que conduzem o pensamento dos alunos para a percepção da relação entre o número de possibilidades e o número de rãs. Ela poderia ter feito a pergunta ("Qual é a relação entre o número de rãs e as possibilidades?") logo de início, entretanto, sua opção foi por fragmentar sucessivamente as questões ("Quantas são as rãs? Quantas possibilidades são?"). Esse encadeamento de questões conduziu os alunos à percepção de que o número de possibilidades é ("É mais uma!") é maior que o número de rãs. O trecho é finalizado com a ação da professora que repete verbalmente a ideia de um aluno, com a finalidade de validar a resposta correta dada e, além disso, torná-la pública, enquadrada na categoria *Informar/Sugerir.*

A discussão continua sendo conduzida pela professora, que chama a atenção dos alunos para o número cinco.

Trecho 4

> ***Professora:*** *Olhem lá para o 5* [indica o 5 escrito na lousa]*, o que é o 5? (Convidar) Dedo no ar, Matilde.*
> ***Matilde:*** *É um ímpar.*
> ***Professora:*** *É um ímpar (Informar/Sugerir). Mais? (Guiar/Apoiar)*
> ***Matilde:*** *É um quase-dobro.*
> ***Professora:*** *É um quase-dobro (Informar/Sugerir). Se ele é um quase-dobro, o que acontece? (Guiar/Apoiar)*
> ***Luís:*** *É dois mais dois mais um.*
> ***Professora:*** *Dois mais dois mais um (Informar/Sugerir). E ao distribuir o 5 nos dois nenúfares, o que que acontece? Quando ele é quase-dobro (Guiar/Apoiar). Põe o dedo no ar. Pensem um bocadinho.*
> [Como as crianças não respondem, a professora prossegue.]
> ***Professora:*** *Olhem para os números que aparecem aqui* [mostra a tabela escrita na lousa]. *Se fosse um dobro, o que poderia aparecer ali que não está ali sendo um quase-dobro? Se fosse um dobro, por exemplo, o seis (Guiar/Apoiar). Diz Rui.*
> ***Rui:*** *É o três mais três. E pode ser três mais três...*
> ***Professora:*** *O que é que o 3 é em relação ao 6? (Guiar/Apoiar)*
> ***Alunos:*** *Metade.*
> ***Professora:*** *O 3 em relação ao 6?*
> ***Alunos:*** *Metade.*
> ***Professora:*** *Metade. (Informar/Sugerir) Vocês conseguem ver aqui* [indica a tabela novamente] *a metade do 5? (Guiar/Apoiar)*

***Alunos:** Sim.*
***Professora:** Onde? (Guiar/Apoiar)*
***Um aluno:** No dois e no três.*
***Professora:** É metade?* [Indica tais números na lousa.] *(Guiar/Apoiar)*
***Alunos:** Não!*
***Gabriel:** Se fosse metade não ia ter mais um número.*
***Professora:** O dois* [indica o dois na lousa] *é metade de 5? Então o que acontece com os quase-dobros? Eu estou a decompô-los em dois. (Guiar/Apoiar)*
***Matilde:** Não tem metade.*
***Professora:** Não tem metade. A Matilde está a dizer que o 5, que é um quase-dobro, não tem metade. (Informar/Sugerir)*
***Matilde:** Não tem inteiro. Só se nós partimos ao meio e ficamos com metade.*

Este trecho evidencia três tipos de ações da professora. Há momentos de *Convidar* em que solicita que algum aluno compartilhe seu raciocínio com a classe. Além disso, continua a fazer questionamentos com a finalidade de obter respostas e contribuições dos alunos durante a discussão. Essas ações se enquadram na categoria *Guiar/Apoiar.* Num dado momento, a professora passa a direcionar seus questionamentos com a finalidade de conduzir o pensamento dos alunos na tentativa de auxiliá-los a compreender que os quase-dobros (no caso, o 5) não tem metade inteira, ações que também se enquadram na categoria *Guiar/Apoiar.* Em alguns momentos a professora repete as ideias dos alunos para compartilhá-las com os demais e validar uma resposta correta, ações que são enquadradas na categoria *Informar/Sugerir.*

Na sequência, a professora solicita que os alunos reflitam a respeito do contexto no qual a tarefa está inserida.

Trecho 5

***Professora:** Nessa situação das rãs, fazia sentido isso? (Desafiar)*
***Alunos**: Não!*
***Professora:** Partir uma rã ao meio? (Desafiar)*
***Alunos:** Não!*
***Professora:** Em que situações isso faz mais sentido? Consigo achar a metade do quase-dobro ou não? (Desafiar)*
***Lucas:** Conseguimos.*
***Professora:** Conseguimos? Eu acho que nem toda a gente ouviu o que disse a Matilde. Vamos lá Matilde. (Convidar)*
***Matilde:** O 5 não tem metade, só se nós partirmos ao meio.*
***Professora:** Pois para achar a metade temos que partir ao meio. (Informar/Sugerir) Acabaste de dizer...*
***Matilde:** Fica uma metade para cada lado.*

Professora: *Mas então se tu disseste que o 5, se conseguir achar a metade do 5, consigo ou não. Olha, os outros podem pensar um bocadinho. Não é só a Matilde. A Matilde está a dizer que os quase-dobros, que é o caso do 5, vocês conseguem ver aqui a metade do 5?* [Indica a tabela na lousa novamente.] *(Guiar/Apoiar).*
Jonas: *Sim.*
Professora: *Onde? Conseguem ver? (Guiar/Apoiar)*
Alunos: *Não.*
Professora: *Para ser a metade o que é que tem que acontecer no A e no B?* [Indica as colunas A e B da tabela.] *(Guiar/Apoiar).*
Alunos: *Silêncio.*
Professora: *Para haver a metade o que é que tem que acontecer no A e no B? (Guiar/Apoiar) Rui.*
Rui: *Temos que partir.*
Alunos: *Partir ao meio.*
Professora: *Para haver uma metade o que é que tinha que aparecer no A e no B? (Guiar/Apoiar)*
Jonas: *Dois iguais.*
Professora: *E o que acontecia ao partir ao meio? (Guiar/Apoiar)*
Aluna z: *Ficava uma metade em cada lado.*
Professora: *E são iguais ou diferentes? São... (Guiar/Apoiar)*
Alunos: *Iguais.*
Professora: *São iguais (Informar/Sugerir). Isso acontece aqui?* [Indica novamente a tabela da lousa.] *(Guiar/Apoiar)*
Alunos: *Não!*
Professora: *Não. (Informar/Sugerir) A questão que eu estava a perguntar e que a Matilde estava a responder... eu perguntei se o 5 não tem metade? (Desafiar)*
Alunos: *Não, não tem metade.*
Professora: *Não tem? Então só os dobros é que têm metade? (Desafiar)*
[Alguns alunos começam a discutir entre si.]
Matilde: *O 5 é metade do 10.*
Professora: *O 5 é metade do 10, o dez é um dobro. (Informar/Sugerir) A questão é se os quase-dobros, que é o caso do 5, se não têm metade? (Desafiar)*

A professora questiona seus alunos sobre a pertinência de transferir a resposta obtida (para ter a metade de 5 é necessário partir ao meio) para o contexto das rãs. Essa ação está adequada à categoria *Desafiar,* uma vez que ela solicita que os alunos reflitam sobre a resposta fornecida por eles. Com relação a esta categoria, há momentos em que ela pressiona os alunos a fornecerem uma resposta exata, pressionando-os para precisão ("Consigo achar a metade do quase-dobro ou não?"). Diante das dificuldades apresentadas pelos alunos, a professora conduz uma série de questões com a finalidade de auxiliá-los na compreensão da metade dos quase-dobros. Tais ações enquadram-se na categoria *Guiar/Apoiar*. Além disso, ela recorre às ações da categoria *Convidar*, ao solicitar que um aluno apresente para a turma sua resposta, e da categoria *Informar/Sugerir* quando compartilha com os demais uma resposta correta fornecida por um aluno.

Neste momento, a professora apresenta aos alunos uma estratégia alternativa para a compreensão da questão da metade dos quase-dobros (no caso, o 5). Chama cinco alunos à frente da classe e entrega uma folha de papel sulfite branco para cada um deles.

Trecho 6

> ***Professora:*** *O que podem representar essas folhas: uma, duas, três, quatro, cinco. (Convidar)*
> ***Alice:*** *Cinco rãs.*
> ***Professora:*** *Cinco rãs. (Informar/Sugerir). E agora quero que coloquem, mas da maneira que acharem adequada, vamos ver se faz sentido com rãs...Qual é a metade de 5? Quem é que vai para cada lado? Temos aqui cinco meninos com uma folha. Podemos usar a folha, como é que eu divido as cinco folhas? (Guiar/Apoiar)*
> ***Alunos:*** *Silêncio.*
> ***Professora:*** *Supondo que são as rãs, pois logo já vamos discutir isso. Distribuam lá para mim e para o Pedro. Se é dividir ao meio eu tenho que receber o mesmo que o Pedro recebe. (Informar/Sugerir)*
> [As crianças distribuem as folhas entre a professora e o Pedro e constatam que uma criança ainda ficou com uma folha.]
> ***Jonas:*** *Um vai ficar cortado. Um vai ficar cortado!*
> ***Professora:*** *Isto fazia sentido nas rãs? Dividir uma rã ao meio? (Desafiar)*
> ***Alunos:*** *Não!*
> ***Professora:*** *Em que situações isso faz mais sentido? (Desafiar)*
> ***Jonas:*** *Com folhas.*
> ***Professora:*** *Com folhas. Mas, o que partilhamos às vezes? (Guiar)*
> ***Luís:*** *Bolo, rebuçados...*
> ***Professora:*** *E agora, que se faz com essa folha? Então, o que se faz? (Guiar/Apoiar)*
> [O aluno Pedro começa a dobrar a folha ao meio, a professora ajuda e termina a partir a folha ao meio.]
> ***Professora:*** *E agora o que é que eu faço com essa folha, o Pedro dividiu ao meio. Me pediu para cortar. O que é que eu faço? Quanto é que isso vale?* [Mostra uma metade da folha.] *(Desafiar)*
> ***Alice:*** *Duas metades.*
> ***Professora:*** *As duas. E esta só?* [Mostra só uma metade da folha.] *(Desafiar)*
> ***Alice:*** *Uma metade.*
> ***Professora:*** *Uma metade. Uma metade para ti [entrega para o aluno Pedro] e outra metade para mim. (Informar/Sugerir).*
> ***Filipa:*** *Tu ficas com dois e meio e o Pedro também, dois e meio.*
> ***Professora:*** *Dois e meio é metade do cinco ou não? Não é metade do 5? (Desafiar)*
> ***Alunos:*** *É.*
> ***Professora:*** *Tenho dois e meio e tu?* [Pergunta ao Pedro.] *(Guiar/Apoiar)*
> ***Pedro:*** *Dois e meio também.*

Professora: *Dois e meio (Informar/Sugerir). Os quase-dobros não têm metade? (Guiar/Apoiar)*
Alunos: *Têm.*
Professora: *Mas o que essas metades têm de diferente dos dobros? (Desafiar)*
Lucas: *É que uma é maior que outra.* [Referindo-se ao tamanho das folhas.]
Professora: *Uma é maior que outra, sim (Informar/Sugerir). Quanto é que vale esta?* [Indica a folha inteira.] *(Guiar/Apoiar)*
Alunos: *Vale um.*
Professora: *Um (Informar/Sugerir). E esta?* [Indica a folha cortada ao meio.] *(Guiar/Apoiar)*
Alunos: *Metade.*
Professora: *Então o que acontece com os dobros e não acontece com os quase-dobros, ou ao contrário? (Desafiar)*
Filipa: *É que os quase-dobros nós temos que partir ao meio para acharmos a metade.*
Professora: *Para acharmos a metade. E com os dobros? (Desafiar)*
Gabriel: *Não temos que partir.*
Professora: *Exatamente (Informar/Sugerir).*
Alice: *Fica duas inteiras.*
Professora: *Então por que é que ali não aparece a metade?* [Volta a mostrar a tabela da lousa.] *(Desafiar)*
Gabriel: *Porque não dá para dividir uma rã.*
Professora: *Porque não dá para dividir uma rã... (Informar/Sugerir).*
Alunos: *Ao meio.*
Professora: *Faz sentido?*
Alunos: *Não!*
Matilde: *E ficava nos dois lados.* [Se referindo às duas colunas da tabela.]
Professora: *Ficava meia rã de cada lado. (Informar/Sugerir).*
[A professora finaliza a discussão e pede aos alunos para voltarem aos seus lugares.]

Este trecho evidencia a preocupação da professora em oferecer aos alunos uma maneira diferente de resolver a questão da metade do 5. O procedimento escolhido por ela é distribuir cinco folhas de papel sulfite para cinco alunos (recorrendo ao uso de um material de apoio) e pedindo que as folhas sejam distribuídas entre ela e outro aluno. Nesse caso, o número de folhas representa o número de rãs e ela e o outro aluno o número de nenúfares. Ao fornecer essa nova estratégia para a resolução do problema, suas ações se enquadram na categoria *Informar/Sugerir*.

O objetivo da professora é que os alunos percebam, ao recorrer a um material concreto, que cinco, que é um quase-dobro, tem metade, mas essa metade é diferente da de seis (que é um dobro), por exemplo. Para isso ela vai conduzindo a discussão com diversas ações articuladas entre as categorias, desde as com menos potencial, como fazendo questionamentos pontuais e fornecendo pistas – *Guiar/Apoiar;* repetindo respostas corretas dadas pelos alunos – *Informar/Sugerir*, até as ações que apresentam maior potencial para o desenvolvimento do raciocínio dos alunos – *Desafiar*.

Ao conduzir uma série de questionamentos, sua ação está guiando os alunos para o entendimento da natureza da metade dos quase-dobros, tendo como base as discussões e contribuições anteriores. Essas ações caracterizam-se como pertencentes à categoria *Guiar/Apoiar,* e apresentam forte potencial para o desenvolvimento do raciocínio matemático. Ainda, é possível observar ações relacionadas à categoria *Desafiar.* As ações dessa categoria estão no extremo de um *continuum*, uma vez que aumentam a oportunidade de os alunos desenvolverem seu raciocínio matemático. Por exemplo, quando a professora encoraja os alunos a refletirem sobre a pertinência de dividir uma rã ao meio*;* ao solicitar uma resposta exata para a questão; ao encorajar os alunos a pensarem conceitualmente em uma tarefa ("Mas o que essas metades têm de diferente dos dobros?"); até que eles consigam generalizar e justificar ("É que os quase-dobros nós temos que partir ao meio para acharmos a metade"; e com os dobros "Não temos que partir"). De notar que os alunos conseguem sair do caso particular (o cinco para o quase-dobro) e elaborar uma justificação que evidencia a generalização para toda a classe. O mesmo ocorre com o dobro. Estas ações da professora, que se enquadram na categoria *Desafiar,* levam os alunos à generalização e justificação.

Discussão e conclusão

Neste artigo, assume-se que o raciocínio matemático é uma das aprendizagens essenciais a desenvolver durante toda a escolarização (NCTM, 2007; STYLIANIDES, 2007). Ponte, Mata-Pereira e Henriques (2012) igualmente salientam o desenvolvimento da capacidade de raciocínio dos alunos como um dos grandes desafios do ensino de matemática. Deste modo, é fundamental discutir o papel desempenhado pelos professores na promoção do raciocínio, nomeadamente as suas ações que podem contribuir para o desenvolvimento do raciocínio nos alunos. Para isso, neste estudo, assumimos as ações docentes discutidas por Wood (1998), Ponte, Mata-Pereira e Quaresma (2013) e Ellis, Özgür e Reiten (2018), categorizadas e sintetizadas no modelo de análise apresentado na figura 2.

Os resultados do presente estudo evidenciam que os questionamentos realizados pela professora convidam, apoiam, guiam e ampliam o raciocínio matemático dos alunos. Discutimos as ações desempenhadas pela professora distribuídas nas quatro categorias de análise ao longo de cada um dos trechos analisados. O nosso objetivo é evidenciar o movimento entre elas, bem como salientar a maneira como a professora encaminha a discussão, partindo das ações de menor potencial para o desenvolvimento do raciocínio matemático, para as ações com maior potencial.

Em todos os trechos que apresentamos, o início da discussão tem origem em ações de *Convidar*. Os alunos são convidados a relatar aos demais como resolveram a tarefa. Para Ponte, Mata-Pereira e Quaresma (2013), as ações de *Convidar* têm como finalidade levar os alunos a um contato inicial com o que está sendo discutido e Ellis, Özgür e Reiten (2018) alegam que, embora tais ações apresentem baixo potencial para o desenvolvimento do raciocínio matemático, elas são importantes pois dão suporte às demais ações a desenvolver. Nos exemplos apresentados, estas ações serviram para criar o contexto necessário para os alunos poderem expor as suas resoluções e o professor poder promover o seu raciocínio.

As ações da categoria *Guiar/Apoiar* têm um papel preponderante em todos os trechos evoluindo do questionamento de questões pontuais para questões que possam conduzir o pensamento dos alunos ao ponto que a professora deseja (ELLIS; ÖZGÜR; REITEN, 2018). Por exemplo, quando esta, insistentemente, questiona os alunos se 0 + 5 e 5 + 0, no caso das rãs, são a mesma coisa, coloca questões pontuais. No entanto, estas questões subsidiam o entendimento da relação entre o número de rãs e as possibilidades de distribuição entre os nenúfares. Essas ações vão sendo substituídas por outras de maior potencial ao longo da discussão. No trecho 4, a propósito dos alunos conseguirem dizer o que sabem sobre o número 5, a professora faz diversos questionamentos que os conduzem a pensar na metade dos dobros e quase-dobros. Tais ações apresentam um elevado potencial para o desenvolvimento do raciocínio dos alunos (ELLIS; ÖZGÜR; REITEN, 2018), uma vez que o objetivo dos questionamentos, bem como o seu encadeamento, contribui para a generalização e justificação de ideias matemáticas.

Na categoria *Informar/Sugerir,* as ações crescem ao longo da discussão, estando normalmente relacionadas com a validação de respostas dadas pelos alunos tornando-as públicas, ou ainda, fornecendo outras formas de explicação e estratégias de resolução. Para Wood (1998), as situações de interação proporcionadas pelo professor estão diretamente relacionadas com o desenvolvimento do pensamento matemático dos alunos. Nessa perspectiva, é preciso considerar também aqueles que estão ouvindo. Assim, ao validar as respostas corretas, corrigir as incorretas ou, ainda, reelaborar uma resposta e compartilhá-la com os demais alunos, a professora possibilita a participação ativa de todos os alunos, além de garantir o acesso de todos àquela informação. Portanto, para além de responder e dar continuidade ao pensamento dos alunos (PONTE; MATE-PEREIRA; QUARESMA, 2013), embora não apresentem grande potencial para o desenvolvimento do raciocínio matemático (ELLIS; ÖZGÜR; REITEN, 2018), as ações dessa categoria são especialmente importantes por compartilhar o que está sendo discutido com os colegas (WOOD, 1998).

No que respeita a *Desafiar*, as ações desempenhadas pela professora aparecem a partir do trecho 5 e continuam presentes até o final da discussão. As ações dessa categoria auxiliam os alunos a clarificarem seus significados e fornecerem razões para justificar e fundamentar seu pensamento (WOOD, 1998). Para Ponte, Mata-Pereira e Quaresma (2013), tais ações colocam o aluno na situação de avançar em seu entendimento por meio do estabelecimento de conexões, do raciocínio, da argumentação e da avaliação. Ellis, Özgür e Reiten (2018) consideram que estas ações promovem um raciocínio matemático sofisticado, apresentando, por isso, um alto potencial. As ações da professora ao longo da discussão conduzem os alunos à generalização e justificação com relação à questão da metade dos dobros e quase-dobros.

Com relação ao raciocínio matemático, as ações da professora apoiaram alguns processos. Ao questionar constantemente seus alunos se 2+3 e 3+2, 5+0 e 0+5, 1+4 e 4+1, são ou não a mesma coisa, os alunos puderam identificar um padrão, um processo de raciocínio de procura de semelhanças e diferenças entre o objeto matemático ou possíveis relações (JEANNOTTE; KIERAN, 2017), que podem conduzir a uma conjectura, um processo de raciocínio que permite analisar as relações matemáticas, identificar pontos comuns entre vários casos com o objetivo de desenvolver afirmações (MATA-PEREIRA; PONTE, 2012). A partir da observação do esgotamento das possibilidades de distribuir as cinco rãs pelos dois nenúfares, os alunos conseguem afirmar que a relação entre o número de rãs e as possibilidades *"é mais uma",* ou seja, cinco rãs e seis possibilidades.

Ao questionar os alunos sobre "*o que é o 5"*, a professora conduz os alunos a recorrer a conhecimentos que já possuem (*"é um ímpar", "é um quase-dobro"; é dois mais dois mais um"*) para a construção de novo conhecimento, no caso a metade dos dobros e dos quase-dobros. Essa ação vai ao encontro do que está estabelecido na literatura que define raciocínio matemático como a capacidade de usar informações já conhecidas para obter, de forma justificada, novas conclusões (JEANNOTTE; KIERAN, 2017; MATA-PEREIRA; PONTE, 2017). A partir disso, são necessárias várias ações da professora até que os alunos consigam justificar e generalizar tal questão. O processo de generalização tem como finalidade chegar a conclusões válidas estabelecendo uma relação, aplicandoa em diferentes objetos matemáticos e transferindo essa relação para um conjunto maior (JEANNOTTE; KIERAN, 2017). Os alunos conseguiram ultrapassar o caso particular analisado, no caso o número 5, e transferiram a relação estabelecida para um conjunto maior, os quase-dobros. Também conseguiram apresentar uma justificação para a diferença entre a metade dos dobros e dos quase-dobros.

De acordo com Lannin, Ellis e Elliot (2011), uma justificação é válida quando composta por uma sequência lógica de afirmações que se apoiam em outros conhecimentos já estabelecidos e conduzem a uma conclusão. Neste caso, os alunos partiram de conhecimentos já existentes que, mediados pelas ações da professora, os conduziram à conclusão de que nos *"[...] quase-dobros nós temos que partir ao meio para acharmos a metade"* e nos dobros *"não temos que partir."*

Os resultados obtidos por este estudo evidenciam o potencial que as ações docentes podem ter no desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos. Embora as ações de desafiar sejam as que têm maior potencial para promover o raciocínio dos alunos, são ações que requerem uma preparação e um suporte de ações de guiar/apoiar e até de informar. Deste modo, as ações da professora nas quatro categorias de análise, devidamente distribuídas e articuladas, foram cruciais para estes processos, pois, direta ou indiretamente, favoreceram e ampliaram o raciocínio matemático dos alunos.

Agradecimentos

Agradecemos à Capes pelo apoio recebido pela primeira autora na realização desta pesquisa, por meio do Programa PVEX (Programa de Professor Visitante no Exterior)/Processo nº 88881.170306/2018-01.

Referências

BRUNHEIRA, L.; PONTE, J. P. Justificando generalizações geométricas na formação inicial de professores dos primeiros anos. **Bolema,** Rio Claro (SP), v. 33, n. 63, p. 88-108, abr. 2019.

COBB, P.; JACKSON, K.; DUNLAP, C. Design research: an analysis and critique. In: ENGLISH, L. D.; KIRSHNER, D. (Eds.). **Handbook of international research in mathematics education**. New York, NY: Routledge, 2016. p. 481-503.

ELLIS, A., ÖZGÜR, Z., REITEN, L. Teacher moves for supporting student reasoning. **Mathematics Education Research Journal**, v. 30, n. 2, p. 1-26, jun. 2018.

JEANNOTTE, D.; KIERAN, C. A conceptual model of mathematical reasoning for school mathematics. **Educational Studies in Mathematics**, v. 96, n. 1, p.1-16, set. 2017.

LANNIN, J.; ELLIS, A. B.; ELLIOT, R. **Developing essential understanding of mathematics reasoning for teaching mathematics in prekindergarten-grade 8**. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 2011.

MATA-PEREIRA, J., PONTE, J. P. Enhancing students' mathematical reasoning in the classroom: teacher actions facilitating generalization and justification. **Educational Studies in Mathematics,** n. 2, v. 96, p. 169-186, out. 2017.

MATA-PEREIRA, J.; PONTE, J. P. Raciocínio matemático em conjuntos numéricos: uma investigação no 3.º ciclo. **Quadrante**, v. XXI, n. 2, p. 81-110, 2012.

MORAIS, C.; SERRAZINA, L.; PONTE, J. P. Mathematical Reasoning Fostered by (Fostered) Transformations of Rational Number Representations. **Acta Scientiae**, Canoas (RS), v. 20, n. 4, p. 552-570, jul./ago. 2018.

NCTM. **Princípios e Normas para a Matemática Escolar.** Lisboa: APM, 2007. Disponível em <http://www.apm.pt/files/_Conf_Cangueiro_Leitao_487e4d92df2e1.pdf>. Acesso em 10/04/2019.

NCTM. **Principles and standards for school mathematics**. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 2000.

PONTE, J. P.; CARVALHO, R.; MATA-PEREIRA, J.; QUARESMA, M. Investigac¸a˜o baseada em *design* para compreender e melhorar as pra´ticas educativas. **Quadrante**, Lisboa, v. XXV, n. 2, p. 77-98, 2016.

PONTE, J. P.; MATA-PEREIRA, J.; QUARESMA, M. Ações do professor na condução de discussões matemáticas. **Quadrante,** vol. XXII, n. 2, p. 55-81, 2013.

PONTE, J. P.; QUARESMA, M. Teachers' professional practice conducting mathematical discussions. **Educational Studies in Mathematics**, n. 1, v. 93, p. 51-66, set. 2016.

PONTE, J. P., MATA-PEREIRA, J., HENRIQUES, A. O raciocínio matemático nos alunos do ensino básico e do ensino superior. **Práxis Educativa**, Ponta Grossa (PR), v. 7, n. 2, p. 355-377, jul-dez. 2012.

RUTHVEN, K.; HOFMANN, R.; MERCER, N. A dialogic approach to plenary problem synthesis. In: **Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education**, 35, 2011, Ankara. Proceedings of the 2011 joint meeting of PME and PME-NA, v. 4. Ankara, Turkey: PME, 2011, p. 81-88.

STYLIANIDES, A. J. The notion of proof in the context of elementary school mathematics. **Educational Studies in Mathematics**, v. 65, n. 1, p. 1-20, mai. 2007.

WOOD, T. Creating classroom interactions for mathematical reasoning: beyond "natural teaching". In: ABRANTES, P., PORFÍRIO, J. & BAÍA, M. (Org.), The interactions in the mathematics classroom, proceedings of the CIEAEM 49. Setúbal: Escola Superior de Educação, 1997, p. 34-43.

Texto recebido: 30/04/2019
Texto aprovado: 18/06/2019