EMP Educação Matemática Pesquisa
ISSN 1983-3156
A2
http://dx.doi.org/10.23925/1983-3156.2019vol21i3p50-74

O pensamento funcional e a capacidade de perceber o pensamento funcional de futuras educadoras e professoras dos anos iniciais[1]

Preservice preschool and primary teachers' functional thinking and noticing of students' functional thinking

JOANA CABRAL[2]
HÉLIA OLIVEIRA [3]
FÁTIMA MENDES[4]

Resumo

Este artigo propõe-se caracterizar o pensamento funcional de futuras educadoras e professoras (FEPs) e a sua capacidade de perceber (noticing) o pensamento funcional de alunos dos anos iniciais, no âmbito da resolução de tarefas sobre sequências pictóricas crescentes. Pretende-se, também, refletir sobre a relevância de uma intervenção centrada na Early Algebra na formação de FEPs. A metodologia adotada é qualitativa, sendo os dados recolhidos por meio da observação participante e da recolha documental. Os resultados evidenciam que a experiência contribuiu para o aprofundamento do pensamento funcional das FEPs e que, no que se refere à capacidade de perceber o pensamento algébrico dos alunos, as FEPs atendem a diversos aspetos chave que permitem caracterizar o seu pensamento funcional.
Palavras-chave: *formação inicial, pensamento funcional, noticing, Early Algebra, primeiros anos*

Abstract

This article aims to characterize the functional thinking of preschool and preservice primary teachers (PPT) and how they notice early years students' functional thinking within the context of pictorial growth sequence tasks. We also intend to reflect about the relevance of an intervention focused on Early Algebra in PPTs' education. We adopted a qualitative methodology and participant observation and documents' collection as the methods of data collection. The results show that the experience contributed to the deepening of the functional thinking of the PPTs and that, as regards the ability to perceive the algebraic thinking of the students, the PPTs address several key aspects that allow to characterizing students' functional thinking.

Keywords: *initial teacher education, functional thinking, noticing, Early Algebra, early years*

[1] A pesquisa teve o apoio da FCT – Fundação para a Ciência e Tecnologia, através do Projeto REASON – Raciocínio Matemático e Formação de Professores (PTDC/CED-EDG/28022/2017)
[2] Doutoranda em Educação – Didática da Matemática: Universidade de Lisboa. Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, UIDEF, email: joanacabral@campus.ul.pt
[3] Doutorada em Educação – Didática da Matemática: Universidade de Lisboa. Professora Auxiliar no Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, UIDEF, email: hmoliveira@ulisboa.pt
[4] Doutorada em Educação – Didática da Matemática: Universidade de Lisboa. Professora coordenadora na Escola Superior de Educação, IP Setúbal, CIEF-IPS, email: fatima.mendes@ese.ips.pt

Introdução

Em vista das reconhecidas dificuldades de muitos alunos na aprendizagem da álgebra, tem vindo a emergir a proposta curricular *Early Algebra*, que se baseia na integração de modos de pensamento algébrico desde o início da escolaridade (CARRAHER; SCHLIEMANN, 2007; KAPUT; CARRAHER; BLANTON, 2008). Nesta perspetiva, o pensamento algébrico nos primeiros anos remete para o desenvolvimento de formas de pensamento a partir de atividades como a análise de relações entre quantidades, identificação de estruturas, generalização, resolução de problemas, modelação e justificação e prova (KIERAN, 2004) e, em particular, para o pensamento funcional como generalização de relações entre quantidades (BLANTON et al., 2011).

Embora a introdução da *Early Algebra* possa promover aprendizagens significativas para as crianças, ainda está pouco presente nas salas de aula. Como tal, muitos educadores e professores não passaram por essa experiência enquanto alunos, tendo, por vezes, pouca familiaridade com atividades de generalização e simbolização (MCAULIFFE; VERMEULEN, 2018). A literatura sobre a temática enfatiza a relevância da realização de estudos com futuros educadores e professores (FEPs) no âmbito da álgebra escolar que, em particular, ajudem a compreender o pensamento algébrico dos FEPs e a forma como estes reconhecem e interpretam o pensamento algébrico dos alunos (LUNA; SOUZA, 2013; MAGIERA; VAN DEN KIEBOOM; MOYER, 2013).

Associado ao reconhecimento e interpretação do pensamento dos alunos surge a capacidade de *noticing*. A capacidade de *noticing* não tem uma caracterização única, mas parece reconhecer-se globalmente que esta remete para atender a momentos importantes, raciocinar acerca dos mesmos e decidir como agir (VAN ES et al., 2017). Sendo tida em conta em vários aspetos dos processos de ensino e de aprendizagem, Jacobs, Lamb e Philipp (2010) consideram, em particular, o entendimento do pensamento dos alunos como um domínio específico da capacidade de *noticing*. A investigação evidencia a importância do *noticing* para a prática do professor (MASON, 2002; SHERIN; VAN ES, 2009; JACOBS, LAMB; PHILIPP, 2010), alertando, também, para a relevância e a necessidade de estudos que analisem o *noticing* dos professores em domínios matemáticos específicos (FERNÁNDEZ; LLINARES; VALLS, 2013; WALKOE, 2015). Neste artigo, tendo em conta a particularização da capacidade de *noticing* ao entendimento do pensamento dos alunos e a caracterização de

Sherin e van Es (2009), esta é aqui entendida como a capacidade de descrever e interpretar o pensamento dos alunos, sendo designado por *perceber* o pensamento dos alunos.

O presente artigo enquadra-se numa investigação mais abrangente, por meio da realização de uma experiência de formação, numa perspectiva de *Early Algebra*, na formação inicial de FEPs dos anos iniciais. O estudo tem como objetivo caracterizar o pensamento funcional das FEPs e a sua capacidade de *perceber* o pensamento funcional de alunos do Ensino Básico, no âmbito da resolução de tarefas sobre sequências pictóricas crescentes. A partir dos resultados deste estudo, pretende-se refletir sobre a relevância da intervenção para a formação de FEPs.

Pensamento algébrico nos anos iniciais

No contexto da *Early Algebra*, a generalização está intrinsecamente relacionada ao desenvolvimento do pensamento algébrico. Kaput (2008) refere mesmo que no coração da álgebra, nos anos iniciais, está a generalização de ideias matemáticas e a sua justificação de diferentes modos. O pensamento algébrico pode ser visto como um processo em que os alunos generalizam ideias matemáticas a partir de vários exemplos particulares, estabelecendo essa generalização a partir da argumentação, e expressando-a gradualmente de forma simbólica apropriada à sua idade (BLANTON; KAPUT, 2005).

Vários estudos com alunos dos anos iniciais, alguns deles do pré-escolar, mostram que estes são capazes de pensar algebricamente (BLANTON; KAPUT, 2005; OLIVEIRA; MESTRE, 2014) e, em particular, podem exprimir um pensamento de tipo funcional (BLANTON et al., 2011). Este tipo de pensamento remete para a generalização de relações entre quantidades, a expressão dessas relações a partir de palavras, tabelas, gráficos ou símbolos e o raciocínio sobre as representações de modo a analisar o comportamento das funções (BLANTON et al., 2011) e está fortemente ligado à análise de padrões (numéricos e geométricos) de forma a identificar mudanças e a reconhecer relações entre quantidades (BEATTY; BRUCE, 2012). Sendo o pensamento funcional uma forma de generalização, a exploração de sequências crescentes e de repetição é particularmente importante na sala de aula, pois oferece às crianças oportunidade para explorarem relações (BLANTON et al., 2011).

A formação em *Early Algebra* do futuro educador e professor

Na formação inicial de educadores e professores torna-se essencial promover o seu pensamento algébrico pois, além de, com frequência, estes evidenciarem bastantes limitações no que se refere ao conhecimento matemático na temática da álgebra, muitos tiveram pouco, ou nenhum, contacto com a *Early Algebra* enquanto alunos (HOHENSEE, 2017). Assim, a formação inicial deve proporcionar-lhes oportunidades de compreender ou reconstruir, os seus conhecimentos com maior profundidade e significado (PONTE; CHAPMAN, 2016).

Uma vez que muitos dos FEPs não tiveram possibilidades de desenvolver anteriormente a capacidade de generalização e de aprofundar a sua compreensão das estruturas algébricas (BLANTON; KAPUT, 2005; BRANCO, 2013) e considerando a importância da generalização para o desenvolvimento do pensamento algébrico (KAPUT, 2008), estes aspetos devem merecer a atenção da formação inicial. Neste contexto, a investigação apresenta casos em que inicialmente os FEPs manifestam algumas dificuldades na expressão da generalização, mas após intervenções conduzidas no sentido de promover o seu pensamento algébrico, estes desenvolvem essa capacidade (BRANCO, 2013). Nesse contexto, a exploração de sequências pictóricas crescentes tem tido um papel importante (BILLINGS, 2008; BRANCO, 2013), verificando-se que no seu percurso escolar a componente visual das sequências tinha sido pouco trabalhada (HOHENSEE, 2017).

A capacidade de perceber o pensamento dos alunos e a formação inicial

Nos últimos anos, a capacidade de *noticing* dos professores tem sido estudada por muitos investigadores, em contexto de formação inicial e contínua, sendo reconhecida a sua importância para as práticas letivas (MASON, 2002; JACOBS, LAMB; PHILIPP, 2010).

Existem diferentes entendimentos da capacidade de *noticing* profissional, contudo há duas componentes que são destacadas pela generalidade dos autores – atender e interpretar (SHERIN; VAN ES, 2009). Por exemplo, para Mason (2002) a capacidade de *noticing* caracteriza-se por dois aspetos: *accounting of* que se liga com dar informação tão objetivamente quanto possível acerca de um certo fenómeno, evitando interpretações, julgamentos ou avaliações e *accounting for* que o autor associa ao pretender explicar e interpretar o que foi percebido. Diversos estudos têm-se focado num aspeto particular da capacidade de *noticing* do professor: o pensamento dos alunos (JACOBS; LAMB; PHILIPP, 2010; CALLEJO; ZAPATERA, 2017). A capacidade de *noticing* do professor relativamente ao pensamento dos alunos pode ser vista como a capacidade cognitiva de identificar e interpretar os aspetos salientes da atividade dos alunos para que possa tomar decisões conscientes (JACOBS; LAMB; PHILIPP, 2010).

No que diz respeito à Educação Matemática, Llinares (2013) considera que, para que o professor possa perceber e analisar o pensamento dos alunos, é necessário reconstruir e fazer inferências sobre a compreensão dos mesmos a partir do que escrevem, dizem ou fazem. Deste modo, a capacidade de *perceber* o pensamento dos alunos envolve mais do que apenas identificar o que está correto ou incorreto nas suas respostas, requerendo que o professor determine de que forma estas são, ou não, significativas no contexto matemático (WILSON; MOJICA; CONFREY, 2013).

Contudo, a capacidade de *noticing* não é inata aos professores (JACOBS; LAMB; PHILIPP, 2010) e, como tal, na formação inicial tem-se procurado proporcionar aos formandos o contacto com o trabalho dos alunos a partir de vários meios, tais como, a análise de vídeos de sala de aula (SHERIN; VAN ES, 2009; RODRIGUES; CYRINO; OLIVEIRA, 2019) e de resoluções escritas de alunos (FERNÁNDEZ; LLINARES; VALLS, 2013; CALLEJO; ZAPATERA, 2017). Em particular, no que se refere à capacidade de *perceber* o pensamento dos alunos, a literatura tem enfatizado o contributo destas práticas de formação, inclusive em experiências de curta duração (FERNÁNDEZ; LLINARES; VALLS, 2013; CALLEJO; ZAPATERA, 2017).

No âmbito da Matemática, vários estudos focam-se no desenvolvimento da capacidade de *perceber* o pensamento dos alunos a partir das dimensões de identificação e interpretação (FERNÁNDEZ; LLINARES; VALLS, 2013; MAGIERA; VAN DEN KIEBOOM; MOYER, 2013). Embora os resultados não sejam unânimes, de um modo geral, os FEPs parecem ter mais dificuldades em interpretar o pensamento dos alunos do que em identificá-lo. O papel do conhecimento matemático no desenvolvimento desta capacidade dos FEPs é também alvo de investigação, sendo que, apesar de ser importante (FERNÁNDEZ; LLINARES; VALLS, 2013; MAGIERA; VAN DEN KIEBOOM; MOYER, 2013), só por si não garante que eles *percebam* o pensamento dos alunos em profundidade (JACOBS; LAMB; PHILIPP, 2010; LLINARES, 2013).

Contexto e metodologia do estudo

O estudo foi desenvolvido no âmbito de uma experiência de formação na unidade curricular (UC) *Padrões e Álgebra* do 3.º ano de uma Licenciatura em Educação Básica (LEB), em Portugal, focada nos temas – Da Aritmética à Álgebra: desenvolver o pensamento algébrico e Padrões e funções. A experiência de formação, em que a primeira autora assumiu simultaneamente o papel de investigadora e de formadora, foi delineada em colaboração com a docente responsável pela UC e decorreu durante 11 aulas, no ano letivo 2018/2019. Foi realizada uma tarefa de diagnóstico na primeira aula e 14 tarefas ao longo da experiência.

O objetivo da experiência de formação foi desenvolver, em simultâneo, o conhecimento matemático das formandas (futuras educadoras de infância e professoras dos anos iniciais) e a sua capacidade de perceber o pensamento algébrico das crianças, pelo que as tarefas de formação são constituídas, na sua maioria, por duas partes. A primeira parte integra questões de conhecimento matemático visando o aprofundamento do pensamento algébrico das formandas, uma vez que o programa de Matemática vigente quando as formandas frequentaram, enquanto alunas, os anos iniciais, não contemplava o domínio da *Early Algebra*. A segunda parte, centrada na percepção do pensamento algébrico de crianças (4 a 10 anos), consiste na análise de resoluções escritas de crianças, transcrições de excertos de episódios de sala de aula e vídeos relativos a momentos de trabalho autónomo e de discussão coletiva em turma.

A experiência de formação seguiu, globalmente, uma prática de ensino exploratório (CANAVARRO; OLIVEIRA; MENEZES, 2014; HOHENSEE, 2017). Como tal, as aulas tiveram um grande foco no trabalho autónomo das formandas em tarefas que foram realizadas maioritariamente a pares. Geralmente, após a resolução das tarefas, ocorria uma discussão coletiva e sistematização das ideias principais.

A metodologia adotada é qualitativa e os métodos de recolha de dados são a observação participante das aulas da experiência de formação, com registo áudio e vídeo, e a recolha documental de tarefas realizadas individualmente ou a pares pelas formandas (MERRIAM, 2002). No âmbito deste estudo, selecionámos as produções relativas à tarefa de diagnóstico (questões 1, 2 e 6) realizada individualmente no início da experiência de formação (ANEXO 1) e à tarefa “Os Colares II” (ANEXO 2), realizada a pares numa das últimas aulas, na qual analisamos questões relativas ao pensamento funcional (questões 1, 2 e 3 da parte 1) e de análise do pensamento de alunos (questões da parte 2), em que as formandas são confrontadas com as resoluções de três grupos de alunos do 1.º Ciclo do ensino básico da mesma tarefa.

Foram selecionados dois pares como participantes: Anabela e Bianca (PAB) e Beatriz e Júlia (PBJ). As formandas tinham, no momento da recolha de dados, entre 20 e 21 anos. Anabela e Bianca frequentaram, com sucesso, a disciplina de Matemática A, enquanto Beatriz e Júlia não frequentaram qualquer disciplina de Matemática no ensino secundário. A escolha destes pares teve por base a diversidade dos seus percursos no ensino secundário relativamente à disciplina de Matemática e o seu desempenho na tarefa de diagnóstico, no que se refere ao pensamento funcional.

Tendo em conta que os dados provêm da resolução das formandas de tarefas matemáticas de sequências pictóricas crescentes e da sua análise do pensamento algébrico dos alunos neste âmbito, o quadro de análise resulta do cruzamento de duas dimensões do (I) pensamento funcional (*Explorar Relações* e *Generalizar*) com duas dimensões da (II) capacidade de *perceber* (*Descrever* e *Interpretar*).

(I) Relativamente ao pensamento funcional, *Explorar Relações* refere-se à identificação da estrutura da sequência, das variáveis presentes e do modo como se relacionam (WALKOE, 2015). Atentando ao tipo de relação entre duas variáveis são consideradas três formas (AYALON; WATSON; LERMAN, 2016): (a) recursiva, isto é, focada na relação entre termos consecutivos, dando apenas atenção à variável dependente; (b) covariação, ou seja, percepção de que as duas quantidades envolvidas variam simultaneamente e quantificação dessa variação e (c) correspondência, isto é, apreensão de uma regra explícita que permite determinar, para cada valor da variável independente, o único valor correspondente da variável dependente. *Generalizar* remete para a identificação da comunalidade entre casos ou a extensão do raciocínio para além do domínio inicial (LANNIN; ELLIS; ELLIOT, 2011) e para a formulação de uma regra geral acerca de um determinado conjunto de dados (CARRAHER; MARTINEZ; SCHLIEMANN, 2008). A regra que expressa a relação entre as variáveis pode ser apresentada com recurso a diferentes representações (MESTRE, 2014; RADFORD, 2018), assumindo-se, neste estudo, três tipos de representações: linguagem natural, sincopada e matemática simbólica. Na linguagem natural recorre-se ao uso de palavras, por escrito ou oralmente, para descrever a regra. A linguagem sincopada, que também pode ser considerada pré-simbólica (MESTRE, 2014), corresponde a uma mistura de símbolos, muitas vezes de uso próprio, com abreviaturas e linguagem natural. Na linguagem matemática simbólica, a regra é expressa por meio de uma notação alfanumérica. Atendendo ao modo como a regra é concebida são considerados três tipos de generalização (adaptados de RADFORD, 2018): *generalização factual,* quando a regra é expressa a partir de casos particulares, sendo que as variáveis estão presentes de uma forma tácita; *generalização contextua*l, em que os objetos são nomeados a partir da estrutura da sequência e fazendo referências ao contexto da sequência para exprimir a relação entre as variáveis; e *generalização simbólica* em que a relação entre as variáveis é apresentada a partir de uma expressão alfanumérica.

(II) No que diz respeito a *perceber* o pensamento dos alunos, a análise alicerça-se nas duas dimensões consideradas neste artigo: descrever e interpretar. *Descrever* remete para a identificação dos aspetos matemáticos relevantes presentes nas resoluções/discurso dos alunos e nas suas estratégias (JACOBS; LAMB; PHILIPP, 2010) e está associada ao reconhecimento dos elementos matemáticos essenciais das produções dos alunos, ao recontar e à explicação dos aspetos que despertam a atenção (ESTAPA et al., 2018). Englobam-se, ainda, os comentários sobre a correção ou incorreção das respostas (VAN ES et al., 2017). *Interpretar* corresponde ao modo como as formandas raciocinam acerca dos elementos que reconheceram e descreveram (SHERIN & VAN ES, 2009), olhando para além do que foi escrito ou dito pelo alunos (JACOBS; LAMB; PHILIPP, 2010), fazendo inferências sobre o seu conhecimento matemático e procurando perceber os motivos que o levaram a apresentar determinada produção escrita ou oral.

A análise de dados está organizada em duas secções, a primeira relativa ao pensamento funcional das formandas e a segunda relativa à sua capacidade de *perceber* o pensamento funcional dos alunos. A análise da capacidade de *perceber* o pensamento dos alunos terá em conta as resoluções escritas (RE) das formandas e as transcrições das discussões ocorridas entre os elementos de cada par (DP).

Pensamento funcional na resolução das tarefas

Na tarefa de diagnóstico (Anexo 1) – Explorar Relações

O par Anabela e Bianca. Anabela evidencia um raciocínio recursivo, obtendo cada termo a partir do anterior, pela adição de 3 unidades, denotando compreender a estrutura da sequência (Figura 1). Verifica-se que a partir da observação da sequência representada pictoricamente, Anabela considera os quatro elementos na primeira figura (1.º termo) e a partir daí, a cada nova figura, vai adicionando três novos pentágonos que refere corresponderem “às pontas”, ou seja, um pentágono por cada uma das três partes da figura. Assim, para determinar o 10.º termo da sequência, Anabela atende à variável dependente (número de pentágonos), usando a relação entre termos consecutivos identificada.

Figura 1 - Resolução de Anabela das questões 2 e 3 da tarefa de diagnóstico

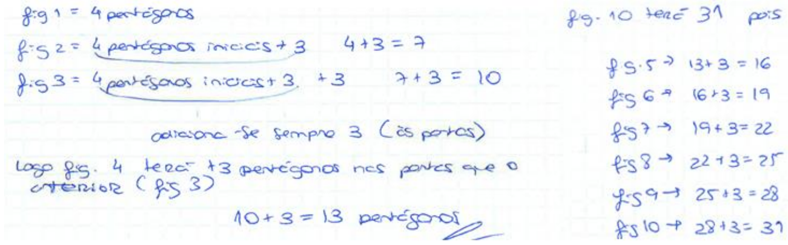
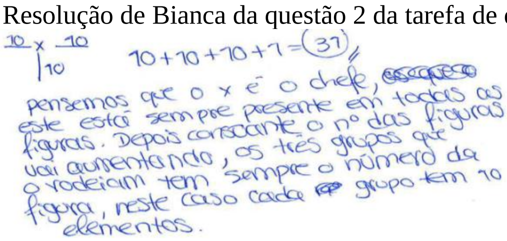


fig 1 = 4 pentágonos
fig 2 = 4 pentágonos iniciais + 3 4+3 = 7
fig 3 = 4 pentágonos iniciais + 3. +3 7+3 = 10
adiciona-se sempre 3 (às pontas)
Logo fig. 4 terá +3 pentágonos nas pontas que o anterior (fig 3)
10+3 = 13 pentágonos
fig. 10 terá 31 pois
fig 5 → 13+3 = 16
fig 6 → 16+3 = 19
fig 7 → 19+3 = 22
fig 8 → 22+3 = 25
fig 9 → 25+3 = 28
fig 10 → 28+3 = 31

Fonte: Anabela, 2018

Bianca mostra compreender a estrutura da sequência, focando-se na sua representação pictórica: identifica a existência de um pentágono fixo, o elemento central de cada figura, e de três grupos de pentágonos que o rodeiam (Figura 2). A formanda reconhece a relação entre o número da figura (variável independente) e o número de pentágonos em cada grupo. Embora não se exprimindo de forma totalmente correta, é perceptível que Bianca consegue identificar a relação funcional entre as variáveis presentes como uma correspondência, identificando um valor constante e um variável e, usando essa noção, indica por meio de cálculos como obtém o 10.º termo da sequência.

Figura 2 - Resolução de Bianca da questão 2 da tarefa de diagnóstico

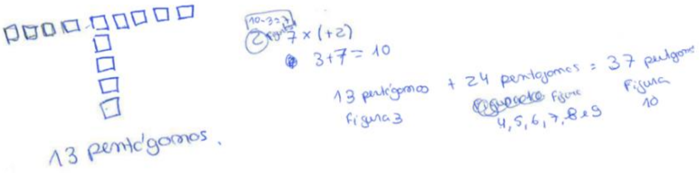

10 x 10
10
10+10+10+1 = 31
pensemos que o x é o chefe, este está sempre presente em todas as figuras. Depois consoante o nº das figuras vai aumentando, os três grupos que o rodeiam tem sempre o número da figura, neste caso cada grupo tem 10 elementos.

Fonte: Bianca, 2018

O par Beatriz e Júlia. Beatriz evidencia reconhecer a relação funcional existente entre o número da figura (variável independente) e o número total de pentágonos (variável dependente) como uma correspondência, escrevendo apenas: “3x10+1=31”. A formanda identifica um valor que depende do número da figura e um constante, não explicando de que forma terá percebido a relação entre as variáveis, mas aparentemente usa-a para determinar o 10.º termo.

No caso de Júlia, embora a resolução não esteja correta, a formanda parece reconhecer que cada termo da sequência se obtém adicionando três ao anterior, identificando a sua estrutura (Figura 3). Para determinar o 10.º termo da sequência terá, aparentemente, procurado usar o múltiplo da diferença entre termos consecutivos, identificando uma relação de covariação entre as variáveis. No entanto, a formanda parece equivocar-se nos valores apresentados pois inicialmente usa o número de pentágonos da 4.ª figura referindo que se trata da “figura 3” e, em seguida, adiciona 24 pentágonos.

Figura 3 - Resolução de Júlia das questões 1 e 2 da tarefa de diagnóstico

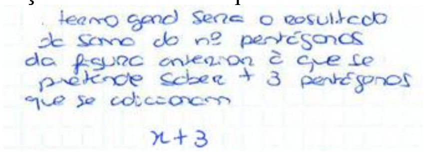


Fonte: Júlia, 2018

Na tarefa de diagnóstico (Anexo 1) – Generalizar

O par Anabela e Bianca. Em linha com a forma como determinou o 10.º termo quando lhe é pedido o termo geral da sequência, Anabela apresenta um raciocínio de tipo recursivo (Figura 4). Escreve a expressão algébrica $x + 3$, onde x representará o termo anterior, como se pode depreender da sua explicação “… o resultado do n.º de pentágonos da figura anterior … + 3 pentágonos”. Portanto, Anabela evidencia associar o termo geral a uma expressão em linguagem matemática e que, neste caso, representa por recorrência, ainda que de forma incompleta.

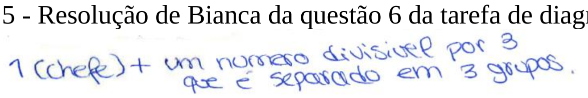
Figura 4 - Resolução de Anabela da questão 6 da tarefa de diagnóstico



Fonte: Anabela, 2018

Bianca, a partir da forma como percebeu a estrutura da sequência, já descrita para a determinação do 10.º termo, identifica uma característica numérica comum a todos os termos da sequência: resultam da adição de uma unidade e de um múltiplo de três (Figura 5). No entanto, a regra que apresenta, em linguagem predominantemente natural, não expressa a relação entre as variáveis (n.º da figura e n.º de pentágonos), não permitindo determinar um qualquer termo da sequência.

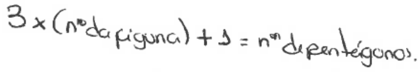
Figura 5 - Resolução de Bianca da questão 6 da tarefa de diagnóstico



Fonte: Bianca, 2018

O par Beatriz e Júlia. Beatriz, que já tinha evidenciado reconhecer a relação funcional entre as variáveis ao apresentar o valor do 10.º termo, expressa esta relação por meio de uma regra, em linguagem sincopada, que permite determinar qualquer termo da sequência (Figura 6).

Figura 6 - Resolução de Beatriz da questão 6 da tarefa de diagnóstico



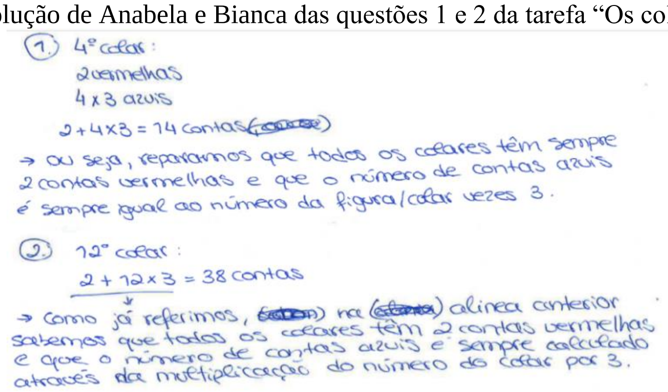
Fonte: Beatriz, 2018

Júlia não indicou o termo geral da sequência, nem o 42.º termo, o que parece indiciar que neste momento não foi capaz de generalizar a relação.

Na tarefa "Os colares II: Parte 1" (Anexo 2) – Explorar Relações

O par Anabela e Bianca. As formandas evidenciam reconhecer corretamente a estrutura da sequência, uma vez que explicitam que cada termo da sequência é constituído por duas contas vermelhas, sendo este valor constante (e, portanto, não dependente do número do colar) e um número variável de contas azuis (dependente do número do colar) (Figura 7). Como se pode observar pelo modo como calculam o 12.º termo da sequência, as formandas identificam a relação funcional entre as variáveis – o número do colar e o número total de contas – como uma correspondência.

Figura 7 - Resolução de Anabela e Bianca das questões 1 e 2 da tarefa "Os colares II: Parte 1"



Fonte: Anabela e Bianca, 2018

O par Beatriz e Júlia. As formandas reconhecem a relação funcional entre as variáveis como uma correspondência (Figura 8). Na explicação que apresentam relativamente à determinação do 4.º termo, as formandas mostram identificar corretamente a estrutura da sequência, reconhecendo 2 como o número constante de contas vermelhas e atendendo ao facto de cada colar ter mais 3 contas azuis que o anterior. A partir da transcrição da discussão entre Beatriz e Júlia é perceptível que entendem a relação entre o número do colar e o número total de contas como uma correspondência que utilizam para determinar qualquer termo.

Figura 8 - Resolução de Beatriz e Júlia das questões 1 e 2 da tarefa “Os colares II: Parte 1”

1. O 4º colar terá 14 contas pois se aplicarmos a regra $3n + 2$, sendo $\underline{n}$ o número da figura, sabemos sempre o nº de contas de cada colar. O 3 é o número de contas que acrescentam, e o 2 é o número de contas vermelhas.

2. O colar número 12 terá 38 contas, pois, tal como anteriormente, ao aplicarmos a regra $3n + 2$, sendo $\underline{n}$ o número da figura, sabemos sempre o número de contas.

Fonte: Beatriz e Júlia, 2018

Na tarefa “Os colares II: Parte 1” (Anexo 2) – Generalizar

O par Anabela e Bianca. Anabela e Bianca apresentam a regra que relaciona o número do colar com o número total de contas recorrendo a linguagem simbólica, explicitando corretamente a variável independente como o número da figura (ou “número do colar”) (Figura 9). A expressão algébrica indicada não se encontra na forma canónica, sendo que a ordem pela qual escrevem os termos parece decorrer do modo como percecionaram a estrutura da sequência, isto é, considerando primeiro o valor constante e em seguida o valor que depende da variável independente, que se obtém multiplicando o número do colar por 3. No entanto, pelo facto de exprimirem a relação recorrendo apenas à linguagem alfanumérica, verifica-se que generalizam a regra num nível simbólico, já não dependente do contexto da situação.

Figura 9 - Resolução de Anabela e Bianca da questão 3 da tarefa “Os colares II: Parte 1”

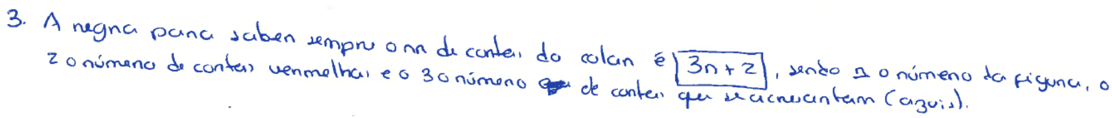
$2 + n \times 3$

$n \rightarrow$ é o número do colar / figura

Fonte: Anabela e Bianca, 2018

O par Beatriz e Júlia. As formandas apresentam a regra que relaciona o número do colar com o número total de contas (Figura 10). Além da regra, expressa em linguagem alfanumérica e na forma canónica, Beatriz e Júlia explicam a origem do termo geral, em linguagem natural, nomeando corretamente a variável independente como o número da figura, o seu coeficiente como a diferença entre termos consecutivos e o termo independente como o número de contas vermelhas. Com os registos áudio da discussão entre as formandas é possível concluir que, além de se apoiarem no contexto da sequência para determinar a regra, Beatriz reconhece que o coeficiente da função corresponde à diferença entre dois termos, provavelmente uma generalização que fez a partir do trabalho com sequências ao longo da experiência de formação. Deste modo, a regra, que evidencia um nível de generalização simbólica, engloba elementos decorrentes do contexto e uma generalização sobre o coeficiente de uma função afim.

Figura 30 - Resolução de Beatriz e Júlia da questão 3 da tarefa “Os colares II: Parte 1”


3. A regra para saber sempre o nº de contas do colar é $\boxed{3n+2}$, sendo n o número da figura, o 2 o número de contas vermelhas e o 3 o número de contas que se acrescentam (azuis).

Fonte: Beatriz e Júlia, 2018

Perceber o pensamento dos alunos

Nas resoluções dos alunos (Anexo 2) – Explorar Relações

O par Anabela e Bianca. No início da análise de cada uma das resoluções dos alunos, as formandas identificam se estas estão corretas ou incorretas. No caso do grupo A, associam a correção da resposta ao modo como os alunos reconhecem a estrutura da sequência:

> O grupo A pensou de maneira correta (…) estes aperceberam-se que se adicionassem 3 vezes o número de contas azuis que existiam entre cada conta vermelha e se a esse resultado adicionassem duas vezes o número de contas vermelhas que existe entre cada conjunto de azuis (PAB-RE1.1.Parte2A).

A partir desta afirmação é possível inferir que as formandas têm em conta não só a resolução escrita dos alunos como também o seu discurso oral, uma vez que estes não referem, por escrito, o modo como cada termo é constituído. Enquanto na resolução deste grupo, Anabela e Bianca não atendem à relação estabelecida pelos alunos entre o número do colar e o número total de contas, relativamente ao grupo B a identificação da correção, além do reconhecimento da estrutura da sequência, provém da relação estabelecida entre o número do colar (variável independente) e o número de contas azuis:

> O grupo B pensou de maneira correta (…) [os alunos] perceberam que se multiplicassem o número do colar por 3 - número de conjuntos de contas azuis e a este adicionassem 2 contas vermelhas chegavam ao número total de contas do colar em questão (PAB-RE1.2.Parte2A).

No caso do grupo C, as formandas identificam uma incorreção que está relacionada com o facto de os alunos não explicitarem de forma rigorosa a relação entre o número do colar e o número de contas azuis: “O grupo C não respondeu corretamente à questão uma vez que estes dizem que *A* corresponde ao número total de contas azuis e não ao número da figura/colar” (PAB-RE1.Parte2B). As formandas concretizam a regra apresentada pelos alunos para um caso particular para justificarem porque consideram a resposta incorreta, mas não fazem ilações sobre o modo como os alunos poderão ter pensado para apresentar tal resposta.

Nas situações analisadas, o par Anabela e Bianca *descreve* as resoluções dos alunos, essencialmente, em termos da sua correção ou incorreção, apresentando uma justificação que retoma a explicação dos próprios alunos em estreita associação com uma explicitação da estrutura da sequência. Embora o par atenda a aspetos chave das resoluções dos grupos, a dimensão *interpretativa* está pouco presente na sua análise.

O par Beatriz e Júlia. Na análise realizada, as formandas atendem particularmente ao modo como os alunos reconhecem a estrutura da sequência e à relação entre as variáveis consideradas. A partir das relações estabelecidas pelos grupos, Beatriz e Júlia identificam também correções e incorreções nas resoluções. Nos casos dos grupos A e C, embora as resoluções sejam diferentes, relativamente às regras que os alunos apresentam, as formandas reconhecem que estes parecem fazer confusão entre o número de contas azuis de cada grupo e o número total de contas azuis:

> [Grupo A] eles juntam o número total de contas várias vezes não falando do número de contas do conjunto mas sim no geral" (PBJ-RE1.1.Parte2A)
> [Grupo C]: Eles não conseguem distinguir que é as contas em cada grupo (PBJ-DP1).

Focando-se nas variáveis, para o grupo A, as formandas relacionam a incorreção da resolução dos alunos com o facto de estes, na sua opinião, não atenderem ao facto de o número de contas vermelhas ser constante e o número de contas azuis ser variável: "(…) não está correta pois eles não conseguem separar o que é constante [contas vermelhas] do que é variável [contas azuis]"(PBJ-RE1.2.Parte2A). Para o grupo C, as formandas associam diretamente a identificação da variável *A* à incorreção da resposta: "O grupo C não responde de forma correta pois considera *A*=número de contas azuis" (PBJ-RE1.Parte2B) e explicam também de que forma os alunos deveriam ter nomeado a variável *A*: "O que deviam ter pensado era que o seu *A* seria o número do colar, aí estaria correto" (PBJ-RE1.Parte2B).

No caso da resolução do grupo B, as formandas não associam diretamente a correção ou incorreção da resolução à relação estabelecida entre variáveis. No entanto, identificam algo que, na sua opinião não está correto – a forma como os alunos designam a variável independente: "em vez de dizer que o x3 é o número dos grupos do colar ou o número de contas azuis que se acrescentam dizem que o x3 é o número de vezes que o colar aparece" (PBJ-RE1.1.Parte2A). O par procura explicar o que estará na origem desta incorreção, fazendo inferências a partir do contexto do problema:

> só que em vez de dizer que o x3 é o número de vezes que o colar aparece, não, eles queriam dizer, mas não conseguiram exprimir isso, que o x3 é o número de vezes que as contas azuis se repetem (…) é que eu acho que além

> de dizer isso, quer dizer que o número do colar é o número de contas azuis que cada grupo tem (PBJ-DP2).

Nas situações analisadas, este par foca-se na relação entre as variáveis estabelecidas pelos alunos. Na dimensão *descritiva* centram-se na correção ou incorreção das resoluções dos alunos, que justificam, maioritariamente, a partir do modo como os alunos identificam a estrutura da sequência e designam as variáveis. A identificação das variáveis está também na base da *interpretação* que Beatriz e Júlia fazem das resoluções dos alunos, sendo que as formandas procuram, a partir do contexto da sequência, explicar a origem do modo como eles reconhecem e identificam as variáveis.

Nas resoluções dos alunos (Anexo 2) – Generalizar

O par Anabela e Bianca. As formandas atendem às regras que são enunciadas pelos grupos identificando, essencialmente, o modo como os alunos as expressam e a linguagem utilizada. Relativamente ao grupo A, na análise que registam por escrito, as formandas replicam a regra apresentada pelos alunos focando essencialmente a operação usada para obter o número total de contas do colar, afirmando "[os alunos] recorrem apenas à adição (…) iam chegar ao número total de contas do colar" (PAB-RE1.1.Parte2A). Nesta análise, Anabela e Bianca não parecem ter reconhecido a incongruência entre a regra que o grupo explica oralmente e a que apresenta por escrito, contudo, a partir das transcrições da discussão oral ocorrida entre elas é perceptível que identificaram algo de incorreto na regra e procuraram explicar o que esteve na sua origem: "Eles depois escreveram a regra, não acho que funciona para todas as figuras. Eles disseram em relação à primeira figura, isto está certo para o primeiro colar" (PAB-DP1)". Apesar de não se referirem explicitamente à linguagem utilizada, as formandas parecem entender a dificuldade dos alunos em transpor para linguagem simbólica o que referiram em linguagem natural: "Eles pensaram bem mas quando foi para a escrita [referindo-se ao termo geral] pronto [não está correto]" (PAB–DP2).

Para os grupos A e B, as formandas atendem às operações usadas pelos alunos para determinar o número total de contas para comparar e fazer inferências sobre o desenvolvimento do seu pensamento algébrico, considerando que: "O grupo B apresenta um maior desenvolvimento do pensamento algébrico uma vez que ao contrário do grupo A que só recorre à adição para chegar ao resultado, estes conseguiram generalizar usando linguagem simbólica" (PAB-RE1.2.Parte2A). A partir desta afirmação podemos inferir que o par associa o facto de o termo geral estar mais simplificado (e mais próximo da forma canónica) a um pensamento algébrico mais desenvolvido. A identificação da linguagem utilizada pelos alunos é também explorada na sua análise como se pode verificar na afirmação relativa ao grupo B "estes conseguiram generalizar usando linguagem simbólica" (PAB-RE1.2.Parte2A) e ao grupo C: "recorrerem a uma linguagem simbólica" (PAB-RE2.Parte2B). No caso deste grupo, as formandas identificam a incorreção da regra apresentada pelos alunos: "se seguirmos a expressão do grupo vamos multiplicar 3 vezes o número total de contas azuis de um colar e desta forma não chegamos ao resultado correto" (PAB-RE1.Parte2B), associando a incorreção à nomeação da variável *A*. O par procura interpretar esta incorreção na resposta dos alunos, pondo a hipótese de estes se terem equivocado a escrever: "(…) não sabemos se estes ao substituírem as incógnitas da expressão por valores não substituem o *A* pelo valor correto" (PAB-RE2). Também no momento em que analisam, em interação, a resposta deste grupo, emerge uma certa convicção deste par de que o raciocínio por trás da regra está correto mas que os alunos se enganaram a registá-la: "Eles chegam à regra certa, eu acho mesmo que eles só se enganaram a escrever esta coisa [nomear *A*], eu acho que eles têm o pensamento desenvolvido" (PAB-DP3). A inferência que as formandas fazem sobre o pensamento algébrico dos alunos assenta possivelmente na linguagem utilizada por estes, já que na sua análise escrita dizem "achamos que o grupo tem um pensamento algébrico desenvolvido pois consegue utilizar uma linguagem simbólica e consegue generalizar" (PAB-RE2). Na discussão, Anabela e Bianca evidenciam entender que os alunos recorrem a letras que se relacionam com o contexto mas que isso nada interfere no tipo de linguagem utilizada na generalização: "Eles já usam uma linguagem simbólica, eles usam outras letras mas isso não faz mal porque o *n* não é obrigatório usar. Eles usam simbólica que é mais desenvolvida que a sincopada" (PAB-DP4).

Nas situações analisadas, as formadas focam-se essencialmente na linguagem utilizada pelos alunos na escrita de regra. Anabela e Bianca *descrevem* as regras apresentadas, em termos da sua correção ou incorreção, e da linguagem utilizada. O par busca *interpretar* as resoluções dos alunos, fazendo inferências acerca do seu pensamento algébrico tendo por base o uso da linguagem simbólica, dando a entender que o recurso a esta representação é indício de um pensamento algébrico mais desenvolvido.

O par Beatriz e Júlia. As formandas atendem às regras enunciadas pelos três grupos, focando-se maioritariamente no modo como é expressa a relação entre as variáveis e associando-a à correção/incorreção das resoluções. No caso do grupo A, as formandas afirmam: “O grupo A tenta arranjar uma regra mas esta não está correta” (PBJ-RE1.2.Parte2A). Beatriz e Júlia justificam a incorreção, ainda que não explicitamente, com base no uso de letras, pelos alunos, para designar o número de contas vermelhas que é constante na sequência “(…) pois eles não conseguem separar o que é constante do que é variável”. Este par evidencia entender que os alunos tiveram dificuldade no uso de simbologia adequada mas que, na sua explicação oral, indicam corretamente a regra que relaciona o número do colar e o número total de contas: “Ele explica a regra bem oralmente só que não escreve isso (PBJ-DP3)”. As formandas identificam a correção da regra apresentada pelo grupo B (que assumem na análise na forma canónica) e referem também o exemplo dado pelos alunos para verificar que a regra encontrada permite determinar um termo distante: “O grupo B tem um pensamento correto pois consegue aplicar a regra *3n+2* para descobrir o número de contas de qualquer colar, dando até um exemplo” (PBJ-RE1.2.Parte2A). Ao procurarem explicar as correções ou incorreções das resoluções de cada um dos grupos, o par dá especial atenção ao modo como é identificada a variável independente na expressão das regras. No caso do grupo A, as formandas procuram explicar a resolução fazendo uma ligação entre o que os alunos dizem e a regra que apresentam:

> dizem que é número de azuis mais o número de azuis mais o número de azuis mas não pode ser, ele tinha de dizer que aqui está uma conta azul, uma conta azul, uma conta azul e no meio uma vermelha e uma vermelha. Eles não explicam que é em cada grupo, não consegue distinguir (PBJ-DP4).

Apesar de não o indicarem explicitamente, as formandas parecem referir-se ao facto de os alunos não identificarem de forma correta a variável *nA*, que se deveria referir ao número de contas azuis de cada grupo (número do colar) e não ao número total de contas. No caso do grupo B, embora considerem a regra correta, as formandas assumem que “os alunos apenas têm dificuldade na linguagem utilizada” (PBJ-RE1.2.Parte2A), sendo que esta dificuldade provém da explicação que fazem sobre o que representa *nx3*. Na sua discussão as formandas referem “Parece-me que como ele escreveu a regra é que não está correto porque o número de contas azuis é sempre o número do colar mas não é sempre o número do colar vezes três” (PBJ-DP5). Esta afirmação decorre, possivelmente, do facto de as formandas estarem focadas no contexto e não reconhecerem que os alunos entendem a relação funcional entre as variáveis de uma forma mais abstrata. No caso do grupo C, o par explica o uso da variável *A* por parte dos alunos, relacionando com a sua própria resolução:

> Onde nós usámos n eles puseram *A*, só que o nosso *n* é o número da figura e o *n* deles (vamos fingir que *A* é um *n*) é o número total de contas azuis por isso o pensamento deles aqui está errado (…) eles estão a pôr azuis a mais porque 3 é obrigatoriamente as azuis e depois multiplicam pelas azuis (PBJ-DP6).

O seu comentário “3 é obrigatoriamente as azuis” remete para a abordagem das formandas ao termo geral, em que reconhecem que o número de contas que aumentam em cada termo, corresponde ao coeficiente da função. A linguagem utilizada pelos alunos na representação da regra geral é considerada no caso do grupo C, sendo que as formandas afirmam: “(…) formular uma regra em linguagem sincopada, quase simbólica” (PBJ-RE2.Parte2B). Na sua discussão, ao identificarem, ainda que incorretamente, a linguagem utilizada pelos alunos, as formandas evidenciam relacionar o facto de usarem como símbolos as primeiras letras que associam às variáveis (*A* de azul, *T* de total) a abreviaturas “Linguagem sincopada quando eles fazem abreviaturas. E é quase simbólica porque eles já têm símbolos” (PBJ-DP7).

As formandas recorrem ainda à correção ou incorreção da regra para avaliar o nível de desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos. Ao comparar os grupos A e B, o par afirma: “O grupo B tem o pensamento algébrico mais desenvolvido pois consegue arranjar uma regra para descobrir o número de contas em qualquer colar. O grupo A tenta arranjar uma regra mas esta não está correta”. No caso do grupo C, as formandas referem, na sua resolução escrita, que consideram que o pensamento algébrico dos alunos não está completamente desenvolvido, uma vez que a regra apresentada não está correta mas, na discussão entre elas parecem ter uma opinião contrária: “É assim, eles até têm um pensamento desenvolvido, a regra não está errada mas a forma como eles pensam está” (PBJ-DP8). Assim, pode inferir-se que as formandas analisaram o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos tendo em conta a designação que aqueles fizeram da variável *A*.

Na análise das situações propostas, Beatriz e Júlia *descrevem* as regras apresentadas indicando a sua correção ou incorreção, e buscam *interpretar* o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos a partir do modo como estes expressam as variáveis na regra geral. A análise das formandas é bastante focada no contexto da sequência, atendendo a um conjunto importante de aspetos das resoluções, embora, por vezes, desconsiderem aspetos relevantes, como a origem da generalização dos alunos ou a linguagem utilizada. A partir das transcrições é possível constatar, em alguns comentários, que o par tem uma perceção bastante mais profunda das resoluções dos alunos do que o que referem por escrito.

Discussão dos resultados

A partir deste estudo procurámos caracterizar o pensamento funcional de dois pares de formandas e a sua capacidade de perceber o pensamento funcional de alunos do ensino básico, no âmbito da resolução de tarefas sobre sequências pictóricas crescentes. Além disso, tendo em conta os resultados pretendemos refletir sobre o modo como uma experiência de formação, assente na perspectiva da *Early Algebra*, com o objetivo simultâneo de promover o desenvolvimento do conhecimento matemático e a capacidade de *perceber* o pensamento dos alunos, impacta a formação de educadoras e professoras dos anos iniciais.

Ao iniciar a experiência de formação as FEPs revelam bastantes diferenças na mobilização do *pensamento funcional* na resolução de uma tarefa com uma sequência pictórica crescente. Apenas duas FEPs reconhecem, simultaneamente, a estrutura da sequência e a relação entre as variáveis como uma correspondência, ainda assim com focos distintos: Beatriz centra-se na relação funcional entre a variável independente e a variável dependente, apresentando uma regra em linguagem sincopada e revelando um nível de generalização contextual enquanto Bianca, embora exprimindo a relação funcional, para um caso particular, acaba por se focar em regularidades numéricas que não conduzem ao termo geral da sequência. Júlia recorre ao múltiplo da diferença entre termos consecutivos para determinar um termo distante, associado à covariação dos valores das variáveis, mas manifesta dificuldades no cálculo e não apresenta o termo geral. Anabela usa uma estratégia recursiva para determinar termos desconhecidos e apresenta um termo geral por recorrência, incompleto, em linguagem matemática. É de realçar que nenhuma das duas alunas que realizaram com sucesso a disciplina de Matemática no ensino secundário conseguiu exprimir corretamente a generalização da relação funcional presente na tarefa, sendo que uma delas aplica mesmo um raciocínio recursivo. Tais resultados, antes de iniciar a experiência de formação, espelham, por um lado, a dificuldade de aplicação do seu conhecimento matemático no domínio da álgebra em situações simples que requerem um pensamento funcional e, por outro, a sua falta de familiaridade com a *Early Algebra*, (HOHENSEE, 2017; MCAULIFFE;VERMEULEN, 2018), na medida em que a maioria não conseguiu fazer uso da representação pictórica e das relações identificadas nos casos particulares, para chegar à generalização.

Na parte final da experiência de formação, na tarefa realizada a pares, verifica-se uma evolução significativa no modo como as formandas identificam a relação entre as variáveis e apresentam a sua generalização, o que vai ao encontro de outros estudos em que inicialmente se registaram dificuldades neste âmbito que foram superadas ao longo da formação (BRANCO, 2013). Ambos os pares evidenciam reconhecer a estrutura da sequência, identificando as variáveis envolvidas e apresentam corretamente a relação funcional generalizada como uma correspondência. Embora apresentando uma generalização simbólica, verifica-se que se apoiaram no contexto da sequência para apreender a relação funcional. Adicionalmente, um dos pares indicia ter realizado uma generalização sobre o coeficiente de uma função afim a partir da sequência numérica, o que pode representar uma aprendizagem importante neste contexto. Tais resultados evidenciam um modo de pensar coerente com a perspectiva de *Early Algebra*, adotada na experiência de formação, e que se adequa aos objetivos de formação para futuros educadores e professores dos anos iniciais (MCAULIFFE; VERMEULEN, 2018).

No que se refere à capacidade de *perceber o pensamento algébrico dos alunos*, verifica-se que as formandas atendem a diversos aspetos chave que permitem caracterizar o pensamento funcional dos alunos, nas dimensões de explorar relações e generalizar, a partir da sua resolução de uma tarefa sobre sequências pictóricas crescentes. *Descrevem* as resoluções dos alunos, mostrando particular atenção à sua correção/incorreção, e atendendo a aspetos matemáticos que consideram relevantes como a relação entre as variáveis identificadas ou a linguagem utilizada. Nesta dimensão é notória a diferença entre os pares, sendo que Anabela e Bianca centram-se no modo como os alunos entendem a estrutura da sequência, na linguagem e nas operações utilizadas na regra escrita, enquanto Beatriz e Júlia se focam principalmente na relação que os alunos estabelecem entre as variáveis.

No que diz respeito à dimensão *interpretativa* ambos os pares procuram fazer inferências sobre o pensamento algébrico dos alunos a partir das suas resoluções. Os dois pares identificam, por exemplo, incongruências entre a escrita da regra e a explicação oral do grupo A, apesar de nenhuma formanda referir diretamente que a dificuldade dos alunos deste grupo teve por base o uso de letras para designar indiferentemente o que é variável e o que é constante. Embora, de um modo geral, os dois pares *interpretem* o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos tendo em conta a correção da regra apresentada, é notório que, à semelhança do que se registou na dimensão *descrever*, Anabela e Bianca focam-se particularmente na linguagem utilizada enquanto Beatriz e Júlia atendem principalmente às relações estabelecidas entre as variáveis, procurando entender o modo como os alunos percecionaram a sequência. Ainda assim, verifica-se que as formandas não atendem a alguns aspetos distintivos entre as resoluções dos grupos de alunos analisadas, como por exemplo, o facto de dois deles ainda se apoiarem no contexto da sequência para exprimir a sua generalização e um outro grupo o fazer de uma forma totalmente simbólica, o que reforça a ideia de que a dimensão *interpretativa* é mais desafiante para as FEPs (CALLEJO; ZAPATERA, 2017).

Apesar das diferenças observadas entre os dois pares de formandas no que diz respeito aos aspetos do pensamento funcional que identificam a partir das resoluções dos alunos, regista-se que a sua análise vai muito para além da simples identificação da correção das mesmas, que habitualmente caracteriza a atenção das FEPs (LLINARES, 2013), evidenciando capacidade de descrever e interpretar o pensamento dos alunos. Estes resultados, assim como os que dizem respeito às evidências de pensamento funcional das formandas, permitem-nos refletir sobre a relevância de uma formação inicial que articule aspetos do conhecimento matemático com o conhecimento dos alunos. Em particular, tendo em conta que o objetivo da experiência de formação é habilitar as FEPs a ensinarem, no futuro, numa perspetiva de *Early Algebra*, foi-lhes proporcionada uma experiência prolongada no tempo de: resolução de tarefas matemáticas assentes nessa perspetiva curricular que favorecessem o aprofundamento do seu pensamento algébrico; análise e discussão de resoluções escritas e excertos de vídeo com alunos que resolveram as mesmas tarefas de modo a compreenderem os processos envolvidos e associarem as aprendizagens dos alunos neste domínio ao desenvolvimento de uma capacidade e não a uma lista de conteúdos a ensinar. A própria abordagem de ensino exploratório, adotada na formação, terá contribuído para as aprendizagens das formandas, uma vez que lhes foi proporcionado o espaço para elas próprias pensarem e discutirem sobre as situações propostas.

Considerações

Este estudo contribui assim para uma área da investigação na formação inicial de educadores e professores que está ainda pouco desenvolvida, mesmo a nível internacional: a preparação das FEPs para ensinar numa perspetiva de *Early Algebra* (HOHENSEE, 2017). Apesar de a UC em que foi realizada a experiência de formação ter como objetivo principal o aprofundamento do conhecimento matemático das FEPs, a especificidade da perspetiva de *Early Algebra* requer uma abordagem que as leve a encarar a álgebra de uma forma muito diferente daquela que experimentaram como alunas. Como tal, a intencionalidade da formação em torno do *perceber* o pensamento algébrico dos alunos, não só visa a promoção de uma capacidade fundamental às FEPs para a sua atividade docente futura, mas também contribui para uma compreensão mais aprofundada sobre o próprio domínio da *Early Algebra*, do ponto de vista das capacidades e conhecimentos matemáticos que estão envolvidos. Adicionalmente, o trabalho desenvolvido em torno da análise do pensamento das crianças dos anos iniciais é fundamental para que as FEPs consigam vislumbrar a exequibilidade de tal perspetiva.

Referências

AYALON, M.; WATSON, M.; LERMAN, S. Progression towards functions: Identifying variables and relations between them. *International Journal of Science and Mathematics Education*, v. 14, n. 6, p. 1153-1173, aug. 2016.

BEATTY, R.; BRUCE, C. *From patterns to algebra: Lessons for exploring linear relationships*. Toronto, ON: Nelson Education, 2002.

BILLINGS, E. *Exploring generalization through pictorial growth patterns*. In C. Greenes; R. Rubenstein (Eds.), *Algebra and algebraic thinking in school mathematics* Reston, VA: NCTM, 2008, p. 279-293.

BLANTON, M.; KAPUT, J. Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education,* Reston, VA, v. 36, n. 5, p. 412-446, nov. 2005.

BLANTON, M. et al. *Essential Understanding of Algebraic Thinking for Teaching Mathematics in Grades 3-5*. Reston, VA: NCTM, 2011.

BRANCO, N. *O desenvolvimento do pensamento algébrico na formação inicial de professores dos primeiros anos*. 2013. 506 f. Tese (Doutoramento em Educação, Didática da Matemática) - Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, Lisboa, 2013.

CALLEJO, M. L.; ZAPATERA, A. Prospective primary teachers' noticing of students' understanding of pattern generalization. *Journal of Mathematics Teacher Education,* Netherlands, v. 20, n. 4, p. 309-333, aug. 2017.

CANAVARRO, A. P.; OLIVEIRA, H.; MENEZES, L. *Práticas de ensino exploratório da Matemática: Ações e intenções de uma professora*. In J. P. Ponte (Ed.), *Práticas* *profissionais dos professores de Matemática*. Lisboa: Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, 2014, p. 217-236.

CARRAHER, D. W.; MARTINEZ, M. V.; SCHLIEMANN, A. D. Early algebra and mathematical generalization. *ZDM Mathematics Education*, Berlin, v. 40, n. 1, p. 3-22, jan. 2008.

CARRAHER, D. W.; SCHLIEMANN, A. D. *Early algebra and algebraic reasoning*. In F. Lester (Ed.), *Second Handbook of Mathematics teaching and learning*. Charlotte: Information Age Inc., 2007, p. 669-795.

ESTAPA, A. T. et al. Preservice teachers' articulated noticing through pedagogies of practice. *Journal of Mathematics Teacher Education, Netherlands,* Netherlands, v. 21, n. 4, p. 387-415, aug. 2018.

FERNÁNDEZ, C.; LLINARES, S.; VALLS, J. Primary school teachers' noticing of students' mathematical thinking in problem solving. *The Mathematics Enthusiast*, Montana, vol. 10, n. 1, p. 440-467, jan. 2013.

HOHENSEE, C. Preparing elementary prospective teachers to teach early algebra. *Journal of Mathematics Teacher Education,* Netherlands, v. 20, n. 3, p. 231-257, jun. 2017.

JACOBS, V. R.; LAMB, L. L.; PHILIPP, R. A. Professional noticing of children's mathematical thinking. *Journal for Research in Mathematics Education*, Reston, VA, v. 41, n. 2, p. 169-202, mar. 2010.

KAPUT, J.; CARRAHER, D. W.; BLANTON, M. L. (Eds.). *Algebra in the early grades*. New York: Routledge, 2008.

KIERAN, C. Algebraic thinking in the early grades: what is it? *The Mathematics Educator*, Athens, GA, v. 8, n. 1, p.139-151, 2004.

LANNIN, J.; ELLIS, A. B.; ELLIOTT, R. *Developing essential understanding of mathematical reasoning for teaching mathematics in prekindergarten-grade 8.* Reston, VA: NCTM, 2011.

LLINARES, S. Professional noticing: A component of the mathematics teachers' professional noticing. *Sisyphus Journal of Education,* Lisboa, v. 1, n. 3, p. 76-93, abril. 2013.

LUNA, A. V. A.; SOUZA, C. C. C. F. Discussões sobre o ensino de álgebra nos anos iniciais do Ensino Fundamental. *Educação Matemática Pesquisa*, São Paulo, v. 15, n. especial, p. 817-835, 2013.

MAGIERA, M.; VAN DER KIEBOOM, L.; MOYER, J. An exploratory study of pre-service middle school teachers' knowledge of algebraic thinking. *Educational Studies in Mathematics,* Netherlands, v. 84, n. 1, p. 93-113, set. 2013.

MASON, J. *Researching your own practice. The discipline of noticing*. London: Routledge-Falmer, 2002.

MCAULIFFE, S.; VERMEULEN, C. *Preservice Teachers' Knowledge to Teach Functional Thinking*. In C. Kieran (Ed.), *Teaching and learning algebraic thinking with 5- to 12-year-olds: The global evolution of an emerging field of research and practice*. New York: Springer, 2018, p. 403-425.

MERRIAN, S. B. *Introduction to qualitative research*. In S. B. Merrian & Associates (Eds.), *Qualitative research in practice: examples for discussion and analysis*. San Francisco: Jossey-Bass, 2002, p. 3-17.

MESTRE, C. *O desenvolvimento do pensamento algébrico de alunos do 4.º ano de escolaridade: Uma experiência de ensino*. 2014. 357 f. Tese (Doutoramento em Educação, Didática da Matemática) - Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, Lisboa, 2014.

OLIVEIRA, H.; MESTRE, C. *Opportunities to develop algebraic thinking in elementary grades throughout the school year in the context of mathematics curriculum changes*. In Y. Li, E. Silver; S. Li (Eds). *Transforming Mathematics Instruction: Multiple approaches and practices*. Dordrecht: Springer, 2014, p. 173-197.

PONTE, J. P.; CHAPMAN, O. *Prospective mathematics teachers' learning and knowledge for teaching*. In L. English; D. Kirshner (Eds.), *Handbook of international research in mathematics education (3rd ed.)*. New York: Routledge. 2016, p. 275–296.

RADFORD, L. *The emergence of symbolic algebraic thinking in primary school*. In C. Kieran (Ed.), *Teaching and learning algebraic thinking with 5- to 12-year-olds: The global evolution of an emerging field of research and practice*. New York: Springer. 2018, p. 3-25.

RODRIGUES, R.V.R.; CYRINO, M. C. C. T.; OLIVEIRA, H. Percepção profissional de futuros professores sobre o pensamento algébrico dos alunos na exploração de um caso multimídia. *Quadrante*, Lisboa, v. XXVIII, n. 1, p. 100-123, jun. 2019.

SHERIN, M. G.; VAN ES, E. A. Effects of video club participation on teachers' professional vision. *Journal of Teacher Education*, v. 60, n. 1, p. 20–37, nov. 2009.

VAN ES, E. A. et al. Learning to Notice Mathematics Instruction: Using Video to Develop Preservice Teachers' Vision of Ambitious Pedagogy. *Cognition and Instruction*, v. 35, n. 3, p. 165-187, mai. 2017.

WALKOE, J. Exploring teacher noticing of student algebraic thinking in a video club. *Journal of Mathematics Teacher Education*, Netherlands, v. 18, n. 6, p. 523-550, dec. 2015.

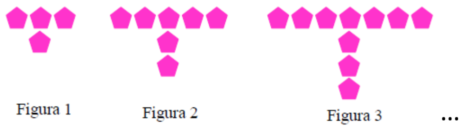
WILSON, P. H.; MOJICA, G; CONFREY, J. Learning trajectories in teacher education: supporting teachers' understanding of students' mathematical thinking. *Journal of Mathematical Behavior*, Amsterdam, v. 32, n. 2, p. 103-121, jun. 2013.

Texto recebido: 31/07/2019
Texto aprovado: 23/11/2019

Anexos

ANEXO 1 - Tarefa de diagnóstico

Considere a seguinte sequência de figuras.

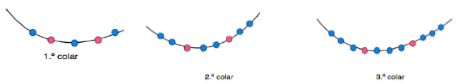


1. Desenhe a figura seguinte e indique o número de pentágonos que a constituem.
2. Determine o número de pentágonos da figura 10. Mostre como pensou.
3. Quantos pentágonos terá a figura 42? Explique como pensou.
4. Existe alguma figura com 396 pentágonos? Justifique a sua resposta.
5. Descreva uma regra que permita saber o número de pentágonos necessários para construir uma qualquer figura.
6. Escreva o termo geral da sequência de pentágonos. Justifique a sua resposta.

Tarefa adaptada de SANTOS, M. *Generalização de padrões: um estudo no 5.º ano de escolaridade*. 2008. Tese (Mestrado em Educação) - Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, Lisboa, 2008.

ANEXO 2 - Os colares II

Parte 1 - A Beatriz decidiu construir novos colares, desta vez com um padrão diferente mas mantendo as cores, como mostra a figura.



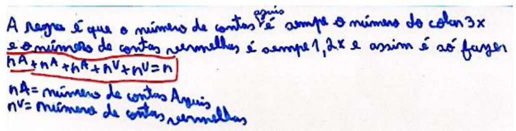
1. Seguindo o mesmo padrão, quantas contas terá o quarto colar construído pela Beatriz? Explique como pensou.
2. Quantas contas terá o colar número 12? Mostre como pensou.
3. Encontre uma regra que lhe permita dizer qual o número total de contas em qualquer colar deste tipo.

Tarefa adaptada de MESTRE, C. *O desenvolvimento do pensamento algébrico de alunos do 4.º ano de escolaridade: Uma experiência de ensino.* 2014. 357 f. Tese (Doutoramento em Educação, Didática da Matemática) - Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, Lisboa, 2014.

Parte 2 Uma turma do 4.º ano de escolaridade realizou, em pequenos grupos, uma tarefa semelhante à apresentada na parte 1.

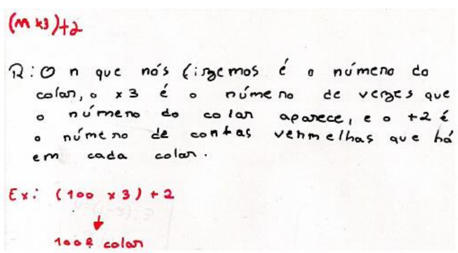
Parte 2A. Em resposta à questão 3 da parte 1, considere a resolução escrita e a explicação oral apresentadas pelo grupo A e a resolução escrita apresentada pelo grupo B.

1. Em resposta à questão 3 da parte 1, considere a resolução escrita e a explicação oral apresentadas pelo grupo A e a resolução escrita apresentada pelo grupo B.



Resolução e explicação do grupo A

João P. – Então, aqui (apontando para o primeiro colar) tem um azul em cada, só que estão separados. Por isso nós pusemos um vezes três, que ao todo são três azuis. E depois o vermelho, pusemos um vezes dois. São duas contas vermelhas. (…). A regra é que o número de contas é sempre o número do colar três vezes e o número de contas vermelhas é sempre um duas vezes (…) Então, como nós dizemos três vezes, fizemos na mais na mais na, três vezes e depois como é sempre dois vermelhos, fizemos nv mais nv é igual a n que é o número total de contas.

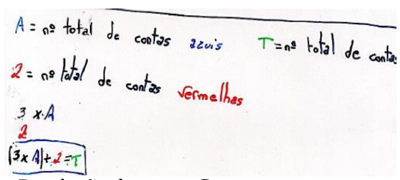


Resolução do grupo B

1.1. Indique de que forma lhe parece que terão pensado os alunos de cada grupo.
1.2. Compare as duas resoluções apresentadas fazendo conjeturas acerca do desenvolvimento de pensamento algébrico dos alunos de cada grupo.

Parte 2B - Considere agora a regra apresentada pelo grupo C.

1. Analise a resolução dos alunos e indique, justificando, se considera que estes responderam corretamente.
2. A partir da resolução deste grupo que inferências pode fazer acerca do desenvolvimento do seu pensamento algébrico.



Resolução do grupo C