

Operações com números complexos: análise de erros cometidos por acadêmicos de Engenharia

Complex number operations: analysis of errors made by engineering scholars

Cassiano Scott Puhl¹
Tháisa Jacintho Müller²
Isolda Gianni de Lima³

Resumo

Este artigo apresenta um trabalho de pesquisa que se propôs a verificar o nível de compreensão sobre números complexos em acadêmicos de Engenharia de uma Instituição de Ensino Superior do Rio Grande do Sul. Justifica-se a escolha do conteúdo matemático uma vez que números complexos configuram um conhecimento base para a análise de circuitos elétricos em corrente alternada, praticada em cursos de Engenharia. Em específico, esta investigação buscou identificar e analisar os erros cometidos pelos acadêmicos em operações de matemática básica, como adição, subtração, multiplicação e divisão com números complexos. De cunho qualitativo, a pesquisa caracteriza-se como um estudo de caso múltiplo e holístico, cujos dados, produzidos por um questionário misto, foram analisados a partir de proposições da Análise de Erros. Conclui-se que são poucos os acadêmicos que compreendem conceitos e operações básicas com números complexos, tendo sido constatado certo domínio apenas nas operações de adição e subtração. Mesmo havendo, entre os acadêmicos, participantes que estudaram números complexos no Ensino Superior, a maioria deles apresentou dificuldades ou não resolveu as operações de multiplicação e divisão. Diante disso, em busca de auxiliar acadêmicos de Engenharia e seus professores, está sendo criado um objeto de aprendizagem como recurso de apoio para recuperar as lacunas de conhecimento em números complexos. Esse material tem enfoque na análise de circuitos elétricos em corrente alternada, colaborando para qualificar os processos de ensino e de aprendizagem em Engenharia.

Palavras chave: Números Complexos; Lacunas de Aprendizagem; Acadêmicos de Engenharia; Análise de Erros.

¹ Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul | c.s.puhl@hotmail.com

² Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul | thaisa.muller@pucrs.br

³ Universidade de Caxias do Sul | iglima@ucs.br

Abstract

This paper describes a research that took place in a University in Rio Grande do Sul, with the aim at verifying levels of comprehension on Complex Numbers in Engineering scholars. The choice of that specific content is justified since complex numbers are the knowledge foundation for the analysis of alternating current circuits, practiced in Engineering courses. In a specific way, this investigation sought to identify and analyze errors committed by the scholars in basic mathematical operations, as addition, subtraction, multiplication and division with complex numbers. The research had a qualitative nature, being characterized as a multiple and holistic case study, whose instrument was a mixed questionnaire and whose analysis method used was Error Analysis. It is concluded that only a few scholars understand basic concepts and are able to operate with complex numbers. That was verified mainly and almost exclusively when considering addition and subtraction operations though. Even academics who had studied complex numbers in previous courses found it difficult to solve multiplication and division operations, and most have not solved these operations. Therefore, seeking to assist engineering professors and academics, a learning object is being created with the purpose of filling these learning gaps. That material aims to provide prior knowledge for the analysis of alternating current circuits and, thus, to help qualifying the processes of teaching and learning in Engineering.

Keywords: Complex numbers; Learning Gaps; Engineering students; Error Analysis.

Introdução

As Instituições de Ensino Superior estão passando por dificuldades financeiras devido à diminuição do número de estudantes de graduação e pós-graduação. Além desse problema, observam-se altas taxas de reprovação e de evasão, expressivamente nos primeiros anos de curso e, principalmente, nos cursos de Engenharia. Entre os principais motivos para a evasão, nesse caso, há as lacunas de aprendizagem em conhecimentos base, que dificultam o andamento dos estudos pelos acadêmicos (VELOSO; ALMEIDA, 2002; CURY, 2002, 2007; FERLIN; TOZZI, 2007; LIMA; SAUER; SOARES, 2007; LOBO, 2012; ALMEIDA; GODOY, 2016).

Um desses conteúdos fundamentais pouco dominados pelos acadêmicos de Engenharia é o de números complexos, que são conhecimentos prévios, ou de matemática básica, necessários, principalmente, na compreensão e análise de circuitos elétricos em corrente alternada. Tem-se, como explicação para esse fenômeno, o fato de que, em algumas escolas brasileiras, esse conteúdo não está sendo ensinado no Ensino Médio (ELI, 2014; PEREIRA, 2016; COSTA, 2016), e que, em outras, quando ensinados, muitos estudantes demonstram dificuldades de aprendizagem (NOBRE, 2013; GUEDES JUNIOR, 2016; AVELAR, 2016). Para Monzon (2012) e Neto (2013), não compreender conceitos e operações com números complexos está relacionado à falta de atividades contextualizadas, que estabeleçam relações com conhecimentos prévios, implicando em dificuldade em construir significados e em questionamentos sobre a utilização e aplicação desses conhecimentos. Ainda, Neto (2013) e Bitencourt, Vargas e Felicetti (2014) constataram que os livros didáticos do Ensino Médio abordam o conteúdo na forma teoria-exemplo-exercícios, reforçando técnicas de memorização e dificultando o processo de construção de conhecimentos.

Para os próximos anos, com a homologação da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), que “[...] define o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica” (BRASIL, 2019), possivelmente, o ensino de números complexos deixará de ocorrer no Ensino Médio, pois esse conteúdo não foi considerado essencial ao estudante da Educação Básica. Observa-se, então, que o ensino de números complexos se encontra em uma situação polêmica que gera debates para além da escola: de um lado, há uma organização de conteúdos que exclui a abordagem do conteúdo na Educação Básica e, de outro, professores do Ensino Superior que consideram números complexos um conhecimento base para acadêmicos ingressantes em Engenharia. Tem-se, enfim, um conteúdo que ocupa uma posição singular, não sendo definido o nível de escolaridade adequado para promover o seu ensino (CARNEIRO, 2004; PORTOLAN, 2017).

Diante desse contexto, decidiu-se investigar o seguinte problema: *Quais conhecimentos de números complexos são compreendidos por acadêmicos de Engenharia de uma instituição de Ensino Superior do Rio Grande Sul?* O objetivo desta pesquisa foi verificar indícios de compreensão desse conteúdo, a partir de um teste com acadêmicos de Engenharia de uma Instituição de Ensino Superior do Rio Grande do Sul, identificando e analisando erros cometidos nas operações matemáticas.

Para apresentar esse estudo, o presente artigo está estruturado da seguinte maneira: na primeira parte, faz-se uma breve discussão sobre o ensino de números complexos no Ensino Médio e sobre a sua importância nos cursos de Engenharia; na segunda parte, de revisão bibliográfica, são apresentados estudos que envolvem o ensino de números complexos no Ensino Superior; na terceira seção, de aspectos metodológicos, são esclarecidos os procedimentos desta pesquisa; a quarta seção é dedicada à apresentação e discussão dos resultados da pesquisa e, por fim, são expostas considerações finais com a sugestão de um recurso digital que pode auxiliar professores e acadêmicos na construção de significados em números complexos.

Números complexos no Ensino Superior

Nesta seção apresentam-se as contribuições de pesquisadores que já investigaram sobre números complexos e seu ensino e aprendizagem no Ensino Superior, principalmente para a área da Engenharia Elétrica. O estado do conhecimento é uma etapa primordial da pesquisa que cumpre vários objetivos (BOGDAN; BIKLEN, 2006; CRESWELL, 2010; GRAY, 2012), dentre eles permitir que o pesquisador reconheça os processos metodológicos e os resultados de investigações realizadas com temática igual ou similar.

As produções acadêmicas que foram selecionadas para isso, neste trabalho, são artigos publicados em anais e periódicos⁴ das áreas de ensino de Matemática, Engenharia e Informática na Educação, disponíveis virtualmente. Além deles, mapearam-se dissertações e teses publicadas no Banco de Teses da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de

⁴ Os artigos selecionados para o mapeamento encontram-se em periódicos de *Qualis* A1, A2 ou B1, na área de avaliação Ensino do quadriênio 2013-2016, conforme consta na Plataforma Sucupira.

Nível Superior (CAPES)⁵. O conhecimento dessas pesquisas é de fundamental importância para conhecer o contexto investigado e para que se estabeleçam referências de comparação de resultados entre está e as outras já realizadas (BOGDAN; BIKLEN, 2006; GRAY, 2012).

A partir desse levantamento, da leitura das produções científicas selecionadas, e de diálogos com professores universitários, constatou-se que o conhecimento de números complexos é necessário em vários âmbitos da Engenharia Moderna, como em dinâmica dos fluidos, eletromagnetismo, mecânica quântica, sistemas dinâmicos, eletrônica, elétrica, soluções de vibrações estruturais no domínio da frequência, entre outros (FERREIRA; CAMARGO; FRASSON; MANSUR, 2007; STUMP; ABAR, 2013; KAMASSURY; BARRETO; DUARTE, 2016). Nesta pesquisa, o contexto investigado envolveu a análise de circuitos elétricos, que pode ser realizada com duas formas de representação para os componentes do circuito: a trigonométrica e a fasorial (STUMP; ABAR, 2013).

Na análise utilizando a representação trigonométrica, as operações realizadas envolvem conceitos que necessitam de conhecimento matemático de nível do Ensino Superior, como: equações de identidades trigonométricas e equações diferenciais (STUMP; ABAR, 2013; VILAS BOAS JUNIOR, 2014; AGRICCO JUNIOR, 2017; LINHARES, 2017; OLIVEIRA, 2018). Já a representação fasorial, permite que as tensões e as correntes senoidais sejam expressas em números complexos, denominando-se fasores; com as resistências, indutâncias e capacitâncias sendo chamadas de impedâncias (REIS, 2009; LIRA, 2014; GERMANO, 2016). Os números complexos transformam as equações diferenciais que representam um circuito elétrico em equações algébricas e, nesse caso, as equações algébricas simplificam as operações para realizar a análise (STUMP; ABAR, 2013; VILAS BOAS JUNIOR, 2014; AGRICCO JUNIOR, 2017; LINHARES, 2017; OLIVEIRA, 2018). Em virtude disso, os números complexos são considerados um conhecimento básico inclusive nas disciplinas dos cursos Engenharia que abordam circuitos elétricos em corrente alternada.

Apesar disso, o conhecimento prévio sobre números complexos que os acadêmicos apresentam não tem sido suficiente para aprender os conteúdos abordados nas disciplinas dos cursos da Engenharia. Em uma pesquisa com 15 acadêmicos de Engenharia de uma Instituição de Ensino Superior da Serra Gaúcha, Morales, Puhl e Lima (2013) já haviam constatado lacunas de aprendizagem quanto às operações envolvendo números complexos e à compreensão de conceitos necessários para a resolução de problemas em disciplinas cujo foco seja, principalmente, a eletricidade. Os professores, em busca preencher tais lacunas de aprendizagens, optam por dedicar uma ou parte de uma aula para apresentar a definição de números complexos e mostrar como fazer operações nas formas algébrica e trigonométrica (MORALES; PUHL; LIMA, 2013; PUHL; LIMA, 2014; PUHL, 2016). Nesses casos, contudo, rápidas explanações dos professores dificilmente auxiliarão o acadêmico a aprender conceitos relativos ao conteúdo e o que ocorre, muitas vezes, é um ensino meramente expositivo do que é necessário utilizar. Tem-se, então, alguns poucos aprendizados, mais de modo mecânico do que com significado.

⁵ O Banco de Teses da CAPES está disponível em: <http://bancodeteses.capes.gov.br>. Esse repositório digital permite a consulta do título de dissertações e teses defendidas desde 1987. Para artigos publicados a partir de 2013, estão disponíveis mais informações, como o resumo, palavras-chave e a pesquisa na íntegra (BRASIL, 2017).

Em um contexto similar, Mello e Santos (2005) realizaram uma pesquisa com professores de 28 escolas profissionalizantes de nível médio do estado do Rio Grande do Sul, em que se oferece a disciplina de Eletricidade. Nessa pesquisa, constataram que as principais dificuldades dos estudantes em análise de circuitos elétricos em corrente alternada tinham relação com dois fatores: a falta de entendimento de números complexos e, principalmente, o fato de não perceberem alguma aplicação desses números quando os estudaram (MELLO; SANTOS, 2005). Também Monzon (2012), Neto (2013), Freitas (2014) e Costa (2016) concluíram que a pouca compreensão de conceitos e a falta de domínio com as operações com números complexos estão associadas à ausência de atividades que mostrem a aplicação desses conhecimentos em situações-problema ou atividades contextualizadas.

Mello e Santos (2005), por sua vez, afirmam que, na perspectiva dos professores participantes da pesquisa, os estudantes compreendem os conhecimentos relativos aos circuitos elétricos em corrente alternada – como capacitor, indução eletromagnética, bobina e ressonância –, mas apresentam dificuldades nos conhecimentos matemáticos considerados pré-requisitos na disciplina de Eletricidade (MELLO; SANTOS, 2005). Essa constatação é compartilhada por Linhares (2017), ao relatar que os números complexos são um pré-requisito para cursar disciplinas de Engenharias, cujo conteúdo é circuitos elétricos em corrente alternada, da Universidade Santa Úrsula, no Rio de Janeiro.

Em outra pesquisa com estudantes da disciplina de Eletrotécnica-II do curso Técnico em Eletromecânica do Colégio Técnico Industrial de Santa Maria, Abegg e Ramos (2013) também relatam obstáculos no processo de aprendizagem da análise de circuitos elétricos em corrente alternada. Os estudantes, na maioria das vezes, não conseguem relacionar adequadamente conteúdos matemáticos, como números complexos, conceitos de geometria e noções de grandezas fatoriais, com conhecimentos da Física mais avançada, como leis do eletromagnetismo ou produção de energia elétrica.

Kamassury, Barreto e Duarte (2016) igualmente apontam ao fato de que o ensino de números complexos em cursos de Engenharia não atinge níveis satisfatórios, pois há dificuldades em correlacionar conceitos matemáticos com exemplos práticos intrínsecos à Engenharia. Esse distanciamento entre a teoria e a prática deve-se a várias causas, como: a ênfase dada a aspectos teóricos; ao enxugamento de carga horária de disciplinas de Matemática; a falta de experimentos em laboratórios apropriados; e a postura resistente de professores em repensar suas estratégias didáticas.

Aliado a isso, há pouca abordagem, nos livros de circuitos elétricos, de números complexos, os quais são apresentados, geralmente, em apêndices, na forma de revisão de conteúdo do Ensino Médio. No caso dos números complexos, é comum aparecer, nessas revisões, a definição e uma síntese de propriedades das operações. Agricco Junior (2017) analisou o conteúdo – explicações teóricas, exercícios resolvidos e os enunciados dos exercícios propostos – de quatro livros didáticos⁶ de Engenharia utilizados em algumas universidades na disciplina de Circuitos Elétricos I e II, ou outra similar. Sua pesquisa

⁶ Os livros didáticos analisados foram: HILBURN, J. L.; JOHNSON, D. E.; JOHNSON, J. R. *Fundamentos de análise de circuitos elétricos*. 4. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2000.; BOYLESTAD, R. L. *Introdução à análise de circuitos*. 10. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2004.; ALEXANDER, C. K.; SADIKU, M. N. O.; PARMA, G. G. *Fundamentos de Circuitos Elétricos*. 3. ed. Porto Alegre: Bookman, 2008.; DORF, R. C.; SVOBODA, J. A. *Introdução aos Circuitos Elétricos*. 8. ed. São Paulo: Pearson, 2012.

constatou que os livros didáticos analisados apresentam números complexos predominantemente na forma algébrica, cartesiana e polar, enfocando nas operações e não favorecendo a construção de significados para acadêmicos que não possuem familiaridade com o conteúdo (AGRICCO JUNIOR, 2017).

Segundo Coelho (2013), os professores de Ensino Superior dificilmente esperam que os acadêmicos apresentem lacunas de aprendizagem, na maioria das vezes considerando a existência de conhecimentos prévios que possibilitem criar significados para aprender novos conteúdos nas disciplinas. O que se observa, porém, como se viu, é a falta de conhecimentos de números complexos pelos acadêmicos, ou porque não os conhecem ou por problemas de compreensão, ocasionando dificuldades na aprendizagem de conteúdos da Engenharia em que esses números são aplicados (COELHO, 2013). Além de causar problemas de aprendizagem de conteúdos da Engenharia, a falta de conhecimento prévio, muitas vezes, ocasiona o abandono de disciplinas e até mesmo a evasão no curso (LINHARES, 2017).

Aspectos metodológicos

Esta pesquisa, de cunho qualitativo (BOGDAN; BIKLEN, 2006; CRESWELL, 2010; GRAY, 2012), buscou compreender os erros dos acadêmicos ao realizar operações com números complexos, tornando-se, assim, um meio para explorar e para entender o significado atribuído aos conceitos envolvidos (CRESWELL, 2010). Sendo também descritiva, os procedimentos tiveram um foco mais relevante do que as respostas finais, com os dados analisados de forma indutiva (BOGDAN; BIKLEN, 2006; CRESWELL, 2010; GRAY, 2012).

O instrumento de coleta de dados foi um questionário misto (CRESWELL, 2010; GRAY, 2012) que abordou as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão de números complexos, além da representação geométrica do número no plano complexo. O questionário foi aplicado no segundo semestre do ano de 2017, a 107 acadêmicos de Engenharia de uma Instituição de Ensino Superior da região metropolitana de Porto Alegre.

Os participantes da pesquisa foram divididos em dois grupos, sendo: 1) acadêmicos que iriam estudar análise de circuitos elétricos em corrente alternada futuramente, e que ainda não haviam estudado números complexos no Ensino Superior; e 2) acadêmicos que iriam estudar análise de circuitos elétricos em corrente alternada futuramente, e que já haviam estudado números complexos no Ensino Superior. Essa divisão foi feita para verificar o possível impacto que uma disciplina introdutória de números complexos pode ocasionar na aprendizagem dos acadêmicos de Engenharia.

Com isso, tem-se que o estudo de caso foi múltiplo e holístico (YIN, 2015), e os dados constituíram uma unidade de análise para cada grupo de participantes. O estudo de caso é definido como “[...] uma investigação empírica que investiga um fenômeno contemporâneo em profundidade e em seu contexto de vida real, especialmente quando os limites do fenômeno e o contexto não são claramente evidentes” (YIN, 2015, p. 39).

Os dados foram analisados segundo proposições da Análise de Erros (CURY, 2007). Esse método auxilia a identificar dificuldades, em termos conceituais ou procedimentais, na resolução de exercícios e, para o que foi identificado, a planejar estratégias didáticas para promover a compreensão dos conteúdos (CURY, 2007). A ação de pesquisar auxilia, então, o trabalho do professor, ao analisar as produções dos estudantes, sendo essa “[...] uma das

formas de auxiliá-los a construir o conhecimento básico necessário para transitar pelos conteúdos específicos de suas áreas de formação” (CURY, 2007, p. 73).

O procedimento da Análise de Erros compreende três fases: pré-análise, exploração do material e tratamento dos resultados (CURY, 2007). Na pré-análise, identificaram-se os cálculos que continham erros, e esses cálculos foram registrados em um único arquivo, constituindo o *corpus* da pesquisa. Na exploração do material, realizou-se uma leitura atenta que permitiu delinear as unidades de sentido em uma categorização inicial. Após isso, a partir de similaridade de erros, definiram-se as categorias finais. No caso desta pesquisa, procedeu-se a uma classificação de erros para as seguintes operações com números complexos: adição e subtração; multiplicação; e divisão. Quanto à representação no plano complexo, também abordada no questionário, não foi possível estabelecer categorias, pois em todas as tentativas, estas mostraram-se inconclusivas. Na análise dos dados realizou-se a descrição dos erros, produzindo-se um texto-síntese sobre cada categoria, em que se apresentou um exemplo ilustrativo do tipo de erro constatado.

Resultados da pesquisa

Os resultados da pesquisa foram organizados e serão apresentados separadamente para cada grupo participante da pesquisa, seguidos de um comparativo. Sendo assim, apresentam-se os dados do Grupo 1 – acadêmicos de Engenharia que iriam estudar análise de circuitos elétricos em corrente alternada, e que ainda não haviam estudado números complexos no Ensino Superior – para posteriormente apresentar do Grupo 2 – acadêmicos de Engenharia que iriam estudar análise de circuitos elétricos em corrente alternada e que já haviam estudado números complexos no Ensino Superior.

O nível de compreensão do Grupo 1

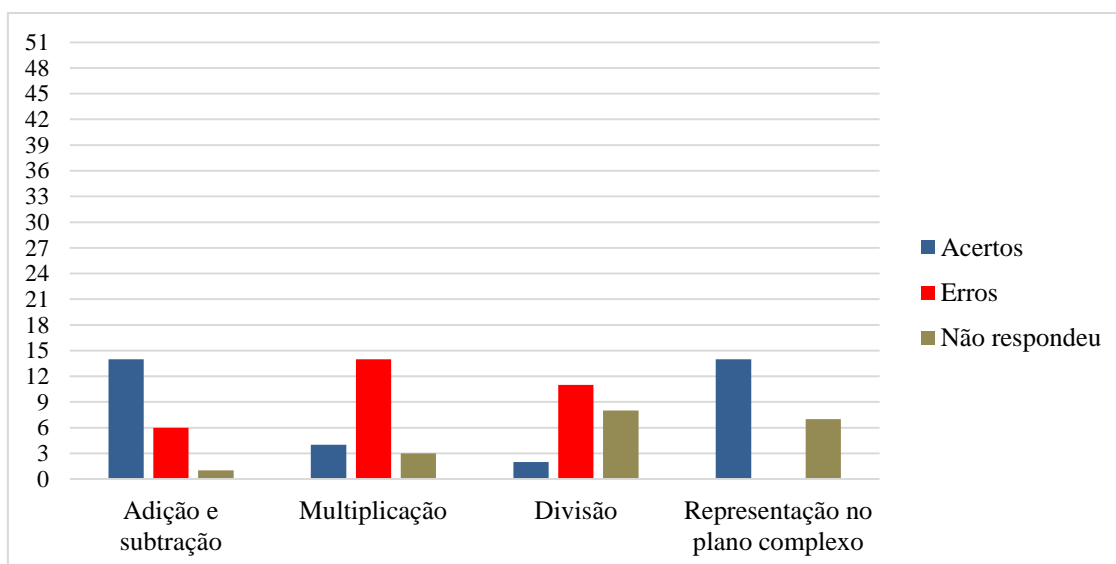


Figura 1 – Aproveitamento nas resoluções do Grupo 1.

O Grupo 1 foi composto por 41 acadêmicos, 26 dos quais cursaram o Ensino Médio em escola privada e 15, em escola pública estadual. Sobre o ensino de números complexos, 25 participantes afirmaram havê-los estudado no Ensino Médio, oito, no Ensino Superior, dois,

em cursos pré-vestibular e seis disseram não os ter estudado. Do total de alunos do Grupo 1, porém, somente 21 consideraram saber efetuar operações com números complexos. A Figura 1 apresenta o aproveitamento desses acadêmicos em operações de adição, subtração, multiplicação e divisão envolvendo o conteúdo, bem como na representação dos números no plano complexo.

Os erros nas soluções da adição ou subtração totalizaram seis, classificados em dois tipos:

- O primeiro erro ocorreu na operação de subtração, para cinco acadêmicos que subtraíram somente a parte real do número complexo. A questão proposta era a seguinte: dado os números complexos $z_1 = 4 + 3i$ e $z_2 = 2 - 5i$, determine $z_1 - z_2$. Ao efetuar o cálculo, os acadêmicos que erraram subtraíram apenas a parte real e acabaram por somar partes imaginárias; assim seu resultado foi $4 + 3i - 2 - 5i$, ao invés de $4 + 3i - (2 - 5i)$, respondendo $2 - 2i$ para o que é, de fato, $2 + 8i$.
- O segundo erro deu-se na adição e na subtração, por um acadêmico que igualou a operação a zero e a considerou uma equação cuja variável seria a unidade imaginária. Esse tipo de erro também foi identificado na pesquisa de Bermejo, Moraes, Lima e Graça, (2010) como um indicativo da falta de compreensão dos números complexos. A questão proposta era a seguinte: dados os números complexos $z_1 = 4 + 3i$ e $z_2 = 2 - 5i$, determine $z_1 + z_2$. Ao resolver, o acadêmico procedeu da seguinte forma:

$$\begin{aligned} 4 + 3i + 2 - 5i &= 0 \\ 4 - 2i &= 0 \\ - 2i &= - 4 \\ i &= 2 \end{aligned}$$

Na multiplicação, ocorrem 14 erros, classificados em três tipos:

- O primeiro erro, de cinco acadêmicos, revelou que os acadêmicos têm noção do processo de multiplicação, pois aplicaram a propriedade distributiva e somaram termos semelhantes; porém, não efetuaram a equivalência da unidade imaginária, ficando o cálculo incompleto. O indício, então, é de que entendem $- 2 + 5i - i^2$, por exemplo, todos como termos de natureza diferente.
- O segundo erro foi cometido por oito acadêmicos que não aplicaram a propriedade distributiva, multiplicando entre si as partes reais e as partes imaginárias, como no seguinte exemplo $(2 + 3i)(4 - 2i) = 8 - 6i^2$, o qual, para alguns, resultou em 14, por terem substituído $6i^2$ por $- 6$.
- O terceiro erro apresenta uma situação semelhante à do segundo erro observado nas operações de adição e subtração, pois um acadêmico aplicou corretamente a propriedade distributiva, mas igualou o resultado a zero, considerando o número complexo como um polinômio de 2º grau cuja variável seria a unidade imaginária, para o qual determinou as raízes.

Em relação à operação de divisão, ocorreram 11 erros, classificados em dois tipos:

- O primeiro erro, cometido por nove acadêmicos, aconteceu depois de expressarem a divisão como uma fração, ao desmembrarem-na em divisões do que era real e do que era imaginário, ao invés de realizar a racionalização do denominador. O erro cometido está exemplificado nessa divisão: $(8 - 6i) \div (2 + 3i) = \frac{8-6i}{2+3i} = \frac{8}{2} - \frac{6i}{3i} = 4 - 2i$.
- O segundo erro, de dois acadêmicos, deu-se em resoluções em que mostravam indícios de saber como dividir, pois buscaram efetuar a racionalização do

denominador, mas o procedimento não foi executado corretamente, como ocorreu para um acadêmico: $\frac{1+2i}{-2i} = \frac{1+2i}{-2i} \cdot \frac{2i}{2i} = \frac{2i+4}{-4}$. Observa-se, aqui, que o erro não está na divisão, e sim na forma incorreta de usar a equivalência $i^2 = -1$, uma vez que, no numerador, a multiplicação de $2i$ por $2i$ resulta em $4i^2$ que é igual a -4 ; e no denominador, $(-2i)(2i) = -4i^2 = 4$. Destaca-se que na operação de multiplicação, esse acadêmico também errou a multiplicação pelo mesmo motivo. Já outro acadêmico procedeu da seguinte forma: $\frac{1+2i}{-2i} = \frac{1+2i}{-2i} \cdot \frac{2i}{2i} \cdot \frac{1+2i}{1+2i} = \frac{(1+2i)^2 \cdot 2}{4(1+2i)} = \frac{1+2i}{4}$. Nesse caso, houve a multiplicação da fração por $1 + 2i$, o que não era necessário, mas que provocou um erro na multiplicação $(1 + 2i)(2i)(1 + 2i)$, resultando em $2(1+2i)^2$, quando o correto era $2i(1+2i)^2$. Sendo assim, o acadêmico indica ter algumas noções de como operar com números complexos, mas não ter clareza sobre como, de fato, realizar a divisão, mesmo havendo indícios de que se enganou ao efetuar uma das multiplicações.

Sobre a representação de número complexo no plano de Argand-Gauss, todos os que a fizeram, ou seja, 14 acadêmicos, acertaram; os outros sete participantes da pesquisa optaram por não fazer a representação. Ao final do questionário, somente três acadêmicos do Grupo 1 afirmaram conhecer números complexos o suficiente para utilizá-los nas disciplinas de Engenharia; os demais apontaram como principais dificuldades a conversão entre formas algébrica e trigonométrica (polar) e a operação de divisão.

O nível de compreensão do Grupo 2

O Grupo 2 foi composto por 66 participantes, sendo que destes, 32 acadêmicos eram egressos de escolas rede privada, 31 de escolas estaduais e três do Instituto Federal do Rio Grande do Sul (IFRS). Pela divisão de grupos feita, todos os acadêmicos haviam estudado números complexos no Ensino Superior, e 36 também no Ensino Médio. Diferente do Grupo 1, a maioria dos acadêmicos do Grupo 2 afirmou conhecer o suficiente sobre os números complexos e somente seis disseram não saber efetuar as quatro operações básicas. A Figura 2 apresenta o aproveitamento dos 60 acadêmicos em relação às operações propostas no questionário.

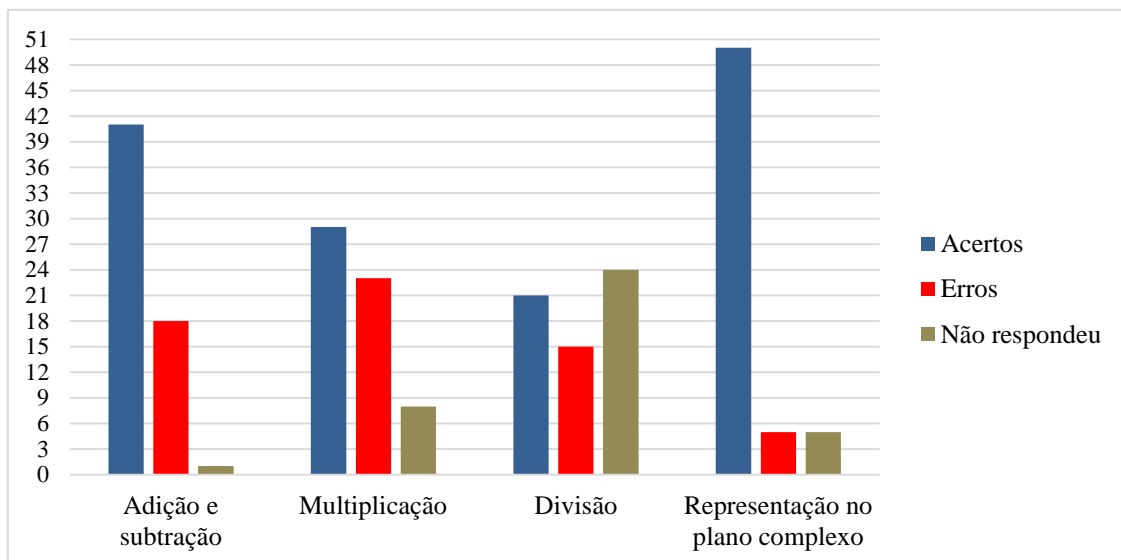


Figura 2 – Aproveitamento nas resoluções do Grupo 2.

Observa-se, nesse grupo, um aumento considerável de acertos em todas as operações, mostrando indícios da relevância, em termos de aprendizagem, de uma disciplina no curso de Engenharia que aborde números complexos. Os acadêmicos do Grupo 2 resolveram com facilidade boa parte das operações, reconhecendo-se, assim, mais capazes para analisar circuitos elétricos em corrente alternada. Entretanto, ainda é considerável o percentual de erros e de operações não realizadas, principalmente na multiplicação e na divisão.

Em relação à adição e à subtração, apareceram erros análogos aos do outro grupo, totalizando 18, classificados em dois tipos:

- O primeiro erro, assim como aconteceu para o Grupo 1, foi na operação de subtração, em que 16 acadêmicos subtraíram apenas a parte real e somaram o que era parte imaginária, ou seja, subtraíram do primeiro número apenas a primeira parte do segundo, não subtraindo corretamente dois termos. Em virtude do que se evidenciou nas outras operações, esse erro pode ser entendido facilmente pelos acadêmicos, e provavelmente um questionamento do professor sobre o erro seria suficiente para que percebessem o equívoco.
- Já o segundo erro, observado nas resoluções de dois acadêmicos, é indicativo da falta de conhecimento do conteúdo, já que, ao efetuar a adição e a subtração, não consideraram e não diferenciaram as partes real e imaginária dos números complexos. Ao efetuar a soma de $z_1 = 4 + 3i$ com $z_2 = 2 - 5i$, os acadêmicos apresentaram $4i$ como resultado.

Em relação à multiplicação, ocorreram 23 erros, classificados em três tipos:

- O primeiro erro, de seis acadêmicos, deu-se depois de aplicarem a propriedade distributiva, por não utilizarem a equivalência $i^2 = -1$ para concluir a operação. Esse tipo erro esteve também presente no Grupo 1.
- O segundo erro foi cometido por 15 acadêmicos que, para multiplicar dois números complexos, não aplicaram a propriedade distributiva, multiplicando somente as partes real e imaginária entre si, a exemplo do que ocorreu no Grupo 1.
- O terceiro erro foi interpretado como um descuido de dois acadêmicos, pois efetuaram corretamente a propriedade distributiva e usaram a equivalência da unidade imaginária, mas não somaram corretamente as partes semelhantes do número complexo, conforme consta: $(2 + 3i)(4 - 2i) = 8 - 4i + 12i - 6i^2 = 8 - 4i + 12i + 6 = 12 - 8i$.

A operação de divisão, novamente, foi a que os acadêmicos menos resolveram (24 acadêmicos) e, sendo efetuada, a que mais erraram (15 acadêmicos), cometendo erros que foram classificados em dois tipos:

- O primeiro erro, análogo ao do Grupo 1, ocorreu após a representação da divisão como uma fração, no qual oito acadêmicos desmembraram de forma incorreta a fração, realizando divisões entre si do que era real e do que era imaginário.
- O segundo erro, de sete acadêmicos, dá indicativos de que conhecem o procedimento da divisão com números complexos, pois tentaram realizar a racionalização do denominador. No entanto, acabaram cometendo erros de multiplicação de sinais e na equivalência da unidade imaginária. Esse tipo de erro é análogo ao segundo erro de divisão cometido no Grupo 1.

Sobre a representação do número complexo no plano de Argand-Gauss, poucos acadêmicos não a fizeram corretamente, sendo que quatro representaram pontos ou

segmentos de retas aleatórios, e um inverteu a posição das coordenadas do número complexo.

O que se observou nos erros do Grupo 2 indica que a maioria dos acadêmicos possui conhecimento básico de números complexos. Mesmo assim, 54 participantes afirmaram que teriam dificuldades de utilizá-los na análise de circuitos elétricos em corrente alternada. As principais dificuldades citadas foram: a operação de divisão; a representação; e a transformação entre as formas algébrica e trigonométrica (polar), sendo que essas são operações realizadas com frequência na análise de circuitos elétricos em corrente alternada.

Discussão dos resultados

Os resultados do Grupo 1, em termos da quantidade de acerto e tipo de erro, são similares aos de uma pesquisa realizada em 2014 com 21 acadêmicos de Engenharia Civil do Centro Universitário Nossa Senhora do Patrocínio, localizada na cidade de São Paulo (FREITAS, 2014). Freitas (2014) também solicitou que participantes efetuassem operações com números complexos, sendo que: a adição foi efetuada corretamente por dois acadêmicos, cinco erraram e 24 não a efetuaram, a multiplicação foi resolvida por cinco acadêmicos, sem que ninguém acertasse, e a representação no plano Argand-Gauss foi expressa corretamente por um acadêmico; três erraram e os demais não fizeram.

Em outra pesquisa, tendo como participantes 103 acadêmicos que estudavam sobre componentes de um circuito elétrico em corrente alternada nos cursos de Engenharia (PUHL; LIMA, 2014) foram constatadas sérias lacunas de aprendizagem. Apesar de 85 acadêmicos afirmarem reconhecer os números complexos, os resultados obtidos em questões que envolviam conceitos e operações revelaram um panorama diferente: 22 participantes souberam efetuar a adição e subtração; 19 representaram corretamente um número complexo no plano de Argand-Gauss; três multiplicaram corretamente; e ninguém acertou a divisão sem auxílio de uma calculadora científica.

Na atual pesquisa, em oposição ao Grupo 1, os acadêmicos do Grupo 2 apresentaram indícios de compreender mais sobre números complexos, possivelmente, devido à disciplina relacionada, cursada no Ensino Superior. Entretanto, boa parte dos acadêmicos do Grupo 1 apresentou dificuldades em efetuar as operações de multiplicação e divisão, evidenciando lacunas de aprendizagem que provavelmente implicam em problemas com atividades de análise de circuitos de corrente alternada. Em relação às defasagens dos acadêmicos participantes da pesquisa, o Quadro 1 apresenta os tipos de erros cometidos e a frequência de cada um.

A operação de adição com números complexos não é diferente de efetuá-la com outros tipos de termos algébricos, cujo princípio aditivo é juntar termos semelhantes; isso acontece também com a subtração, assim que é convertida em adição de um número com o oposto do outro. A defasagem que prevaleceu nessas operações foi na subtração: ao subtrair um número $c + di$ de $a + bi$, por exemplo, os acadêmicos subtraíram apenas a parte real c de a , não subtraindo di de bi , incorrendo nos mesmos erros que acontecem quando a subtração envolve mais de um termo e “entra na conta” apenas o primeiro deles, ou, também como aconteceu para alguns, ainda não há clareza em operar com sinais do tipo “menos mais”, “mais menos” e “menos menos”.

Operação	Tipos de erros	Frequência	
		Grupo 1	Grupo 2
Adição e subtração	Subtrair somente do que é parte real	5	16
	Não considerar diferentes as partes real e imaginária	0	2
	Igualar a zero uma operação e resolvê-la como uma equação	1	0
Multiplicação	Não aplicar a propriedade distributiva	8	15
	Não efetuar a equivalência $i^2 = -1$	5	6
	Não somar partes semelhantes corretamente	0	2
	Igualar a zero a operação e resolvê-la como uma equação	1	0
Divisão	Representar a divisão na forma de fração e desmembrá-la em duas frações, uma para cada parte, real e imaginária	9	8
	Não efetuar corretamente a racionalização	2	7

Quadro 1 – Tipos de erros em operações básicas

Na multiplicação, um grupo considerável de acadêmicos mostrou, como é comum de se observar em qualquer nível de ensino, dificuldades com conhecimentos básicos de Matemática, como não aplicar a propriedade distributiva para resolver uma multiplicação de números complexos. De outro lado, outros acadêmicos aplicaram a propriedade distributiva, mas, para boa parte deles, i^2 não era conhecido como -1 , dando indícios de que não compreendiam o conceito da unidade imaginária.

O fato de os acadêmicos não reconhecerem a igualdade da unidade imaginária pode estar associada a uma concepção errônea ou alternativa construída na Educação Básica. Neto (2009), em uma pesquisa com cinco professores – dois do Ensino Médio e três de cursos pré-vestibular –, verificou que a unidade imaginária é o conceito que causa maior dificuldade no ensino dos números complexos, pois, na perspectiva dos professores, o estudante conclui o Ensino Fundamental com a concepção de que todo número elevado ao quadrado tem como resultado um número positivo, ou seja, de que não existe raiz quadrada de um número negativo, não sendo válida para muitos a equivalência $i^2 = -1$ (NETO, 2009).

Em relação à operação da divisão, novamente a falta ou a pouca familiaridade com os números complexos ficou evidente. Nessa operação, houve um percentual maior de acadêmicos que não resolveram a questão do que daqueles que erraram a resposta. O erro mais frequente consistiu em, depois de representar a divisão como uma fração, desmembrá-la em divisão do que era real entre si e do que era imaginário entre si. No segundo tipo erro mais frequente, alguns conheciam o procedimento da divisão, porém apresentaram erros na multiplicação ou na equivalência da unidade imaginária.

Em concordância de resultados com outras pesquisas já mencionadas, nesta também, em todos os grupos, têm-se indícios de compreensão da maioria dos participantes em

relação às operações de adição e subtração. Além dessas, a maior parte dos participantes desta pesquisa representaram corretamente o número complexo no plano de Argand-Gauss. Portanto, essas operações foram mais facilmente reconhecidas e efetuadas, possivelmente pelo fato de envolverem um pensamento análogo ao que requerem outros conhecimentos presentes na estrutura cognitiva dos acadêmicos, como é o caso da adição e subtração de polinômios e da representação de pontos no plano cartesiano.

Nas outras operações, apesar de o Grupo 2 apresentar mais acertos que o Grupo 1, a maioria errou ou não resolveu as questões de multiplicação e de divisão, sendo a divisão, segundo os participantes dos dois grupos, a operação mais difícil de ser realizada e também a menos compreendida. Mesmo os acadêmicos do Grupo 2, que estudaram números complexos no Ensino Superior, tiveram dificuldades em realizar essas operações. Esses dados evidenciam que alguns conhecimentos aparentam ser simples, mas não o são a ponto de serem compreendidos, e que as estratégias didáticas utilizadas com os acadêmicos do Grupo 2, também no Ensino Superior, possivelmente não propiciaram a construção de significados sobre os números complexos.

Esses resultados, em termos das operações em geral, reforçam a perspectiva que os estudantes de Ensino Médio não estão compreendendo os conceitos e as operações com números complexos, conforme indicam outras pesquisas (NOBRE, 2013; GUEDES JUNIOR, 2016; AVELAR, 2016). Além disso, reforça-se o contexto que mostra outros acadêmicos de Engenharia, de outras instituições de Ensino Superior, com dificuldades em compreender os conceitos e realizar operações com números complexos (MORALES; PUHL; LIMA, 2013; ABEGG; RAMOS, 2013; PUHL; LIMA, 2014; PUHL, 2016; KAMASSURY; BARRETO; DUARTE, 2016; LINHARES, 2017).

Conclusão

Os dados desta pesquisa evidenciam que o ensino de números complexos não tem ocorrido ou não está promovendo uma aprendizagem significativa no Ensino Médio. Pelos dados construídos, é possível uma resposta à questão norteadora desta investigação: *Quais conhecimentos de números complexos são compreendidos por acadêmicos de Engenharia, de uma instituição de Ensino Superior do Rio Grande Sul?* Conclui-se que são poucos os que compreendem conceitos e operações básicas com números complexos, sendo que há certo domínio apenas das operações de adição e subtração. Contudo, para cursar a disciplina de Engenharia que analisa circuitos elétricos em corrente alternada faz-se necessário, ao menos, dominar as quatro operações.

As lacunas de aprendizagem são, em geral, também motivo para as altas taxas de evasão que ocorrem expressivamente nos primeiros anos da graduação e, principalmente, nos cursos de Engenharia (VELOSO; ALMEIDA, 2002; CURY, 2002, 2007; FERLIN; TOZZI, 2007; LIMA; SAUER; SOARES, 2007; ALMEIDA; GODOY, 2016). É importante, então, o professor buscar alternativas para que os acadêmicos superem dificuldades ao enfrentar exigências curriculares, de modo a não comprometer o processo de aprendizagem. Uma forma para isso está em propiciar estratégias e com recursos de apoio para a recuperação de lacunas em conhecimentos básicos necessários para a construção de novos saberes, como são os de números complexos para aprender sobre circuitos em corrente alternada, também com uma prática pedagógica que não permaneça conservadora, repetitiva e acrítica (MORAN; MASETTO; BEHRENS, 2013).

Nesse sentido, em busca de auxiliar professores e acadêmicos de Engenharia, está sendo criado, por autores deste artigo, um objeto de aprendizagem com diversos ambientes que atendem a objetivos didáticos variados e com o propósito de qualificar os processos de ensino e de aprendizagem, denominado *Números Complexos: interação e aprendizagem* (PUHL; LIMA, 2018). Entre os ambientes de aprendizagem, destaca-se o do *Fazer e compreender*, que consiste de uma sequência de atividades planejada com aplicativos do GeoGebra criados com o propósito de instigar a ação cognitiva do acadêmico e favorecer a construção de significados de conceitos e operações com números complexos.

Os acadêmicos participantes da atual pesquisa consideraram a possibilidade de utilizar um objeto de aprendizagem para aprender conceitos e operações com números complexos, porém ressaltaram a importância de estabelecer uma relação dos conhecimentos matemáticos com a área de Engenharia, isto é, por meio da proposição de atividades contextualizadas, conforme constatado por Monzon (2012), Neto (2013), Freitas (2014) e Costa (2016). Diante disso, o objeto de aprendizagem está sendo aprimorado para contemplar atividades contextualizadas e, posteriormente, será aplicado novamente para avaliar as suas potencialidades como um recurso didático de construção ou reconstrução de significados dos conhecimentos básicos de números complexos, necessários na disciplina sobre circuitos elétricos em corrente alternada.

Neste trabalho relatou-se uma pesquisa que concluiu que os participantes, acadêmicos de Engenharia de uma instituição de Ensino Superior do Rio Grande Sul, têm lacunas de aprendizagem quanto às operações com números complexos, por desconhecerem ou não compreenderem conceitos considerados básicos por professores de Engenharia que ministram disciplinas de análise de circuitos elétricos em corrente alternada. As tecnologias estão disponíveis para propor alternativas que auxiliem a resolver esse problema, como é o caso do objeto de aprendizagem *Números Complexos: interação e aprendizagem* que está em fase de reestruturação, visando à integração de situações didáticas contextualizadas que estabeleçam uma relação do conhecimento matemático (números complexos) com a área de Engenharia (análise de circuitos elétricos em corrente alternada). A expectativa é de incentivar os acadêmicos a interagirem no objeto de aprendizagem e a desenvolverem uma aprendizagem significativa sobre números complexos.

Referências

- ABEGG, I.; RAMOS, D. B. Investigação de ferramentas e métodos de ensino de circuitos de corrente alternada para curso introdutório de eletrotécnica. *Revista Dynamis*, Blumenau/SC, v. 19, n. 1, 2013.
- AGRICCO JUNIOR, R. C. *Números complexos e grandezas elétricas: análise de livros didáticos apoiada na teoria dos registros de representações semióticas*. 2017. 215 f. Dissertação (Mestrado). Universidade Anhanguera de São Paulo, São Paulo/SP, 2017.
- ALMEIDA, E.; GODOY, E. V. A evasão nos cursos de Engenharia: uma análise a partir do Cobenge. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE EDUCAÇÃO EM ENGENHARIA, 44., 2016, Curitiba. *Anais...* Curitiba, 2016.

- AVELAR, C. B. *O fascinante mundo dos números complexos*. 2016. 103f. Dissertação (Mestrado em Ciências). Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, São Carlos/SP, 2016.
- BERMEJO, A. P. B.; MORAES, M. S. F.; LIMA, T. A.; GRAÇA, V. V. Dificuldades na aprendizagem dos números complexos. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 10., 2010, Salvador. *Anais...* Salvador/BA, 2010.
- BITENCOURT, L. A.; VARGAS, P. R.; FELICETTI, V. L. Uma proposta pedagógica: usando o software Geogebra na rotação vetores complexos. *Amazônia: Revista de Educação em Ciências e Matemáticas*, v. 11, n. 21, p. 5-15, dez. 2014.
- BOGDAN, R. C.; BIKLEN, S. K. *Investigação qualitativa em educação: uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto: Porto Editora, 2006.
- BRASIL. Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular*. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br>. Acesso em: 01 ago. 2019.
- CARNEIRO, J. P. A geometria e o ensino dos números complexos. *Revista do Professor de Matemática*, São Paulo, n. 55, jul. 2004.
- COELHO, M. C. B. *Números Complexos e suas aplicações geométricas no ensino superior*. 2013. 112f. Dissertação (Mestrado Profissional). Centro Federal de Educação Tecnológica Celso Suckow da Fonseca, Rio de Janeiro/RJ, 2013.
- COSTA, J. C. *Números Complexos: uma abordagem com ênfase em aplicações na matemática e em outras áreas*. 2016. 67f. Dissertação (Mestrado Profissional). Universidade Federal do Maranhão, São Luís, 2016.
- CRESWELL, J. W. *Projeto de Pesquisa: Métodos qualitativo, quantitativo e misto*. 3. ed. Porto Alegre: Artmed, 2010.
- CURY, H. N. *Análise de erros: o que podemos aprender com as respostas dos alunos*. Belo Horizonte: Autêntica, 2007.
- CURY, H. N. Cobenge e ensino de disciplinas matemáticas nas Engenharias: um retrospecto dos últimos dez anos. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE ENSINO DE ENGENHARIA, 30., 2002, Piracicaba. *Anais...* Piracicaba: Unimep, 2002.
- ELI, J. *Números complexos e suas aplicações: uma proposta de ensino contextualizado com abordagem histórica*. 2014. 171f. Dissertação (Mestrado). Universidade Regional de Blumenau, Blumenau, 2014.
- FERLIN, E. P.; TOZZI, M. J. Integração Universidade - Ensino Médio. In: TOZZI, M. J.; OLIVEIRA, V. F.; GIOGETTI, M. F.; ROCHA, A. (Org.). *Novos Paradigmas na Educação em Engenharia*. Curitiba: Abenge – UNICENP, 2007.
- FERREIRA, W. G.; CAMARGO, R. S.; FRASSON, A. M.; MANSUR, W. J. O número complexo e seu uso na engenharia estrutural. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE EDUCAÇÃO EM ENGENHARIA, 35., 2007, Curitiba. *Anais...* Curitiba/PR, 2007.
- FREITAS, T. M. A. *O estudo dos Números Complexos no Ensino Médio: uma abordagem com a utilização do GeoGebra*. 2014. 238f. Dissertação (Mestrado Profissional). Universidade Federal de São Carlos, São Carlos/SP, 2014.

- GERMANO, J. G. C. *Uma proposta de abordagem dos Números Complexos com o uso do Geogebra*. 2016. 132f. Dissertação (Mestrado Profissional). Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2016.
- GRAY, D. E. *Pesquisa no mundo real*. 2. ed. Porto Alegre: Penso, 2012.
- GUEDES JUNIOR, R. R. *Números complexos: desenvolvimento e aplicações*. 2016. 64f. Dissertação (Mestrado). Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Seropédica, 2016.
- KAMASSURY, J. K. S.; BARRETO, E. H.; DUARTE, W. G. Uma breve discussão sobre as aplicações das funções de variável complexa do curso de engenharia física da UFOPA. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE EDUCAÇÃO EM ENGENHARIA, 44., 2016, Natal. *Anais...* Natal/RN, 2016.
- LIMA, I. G.; SAUER, L. Z.; SOARES, E. M. S. Integração Universidade - Ensino Médio: Melhoria das Condições de Aprendizagem em Matemática. In: TOZZI, M. J.; OLIVEIRA, V. F.; GIOGETTI, M. F.; ROCHA, A. (Org.). *Novos Paradigmas na Educação em Engenharia*. Curitiba: Abenge – UNICENP, 2007.
- LINHARES, M. F. *Análise dos Ambientes Virtuais de Aprendizagem (AVA's) AulaNet, Moodle e TelEduc e implementação do ambiente Moodle na Universidade Santa Úrsula*. 2017. 109f. Dissertação (Mestrado). Universidade Santa Úrsula, Rio de Janeiro, 2017.
- LIRA, E. S. *Uma aplicação dos números complexos no Ensino Médio Técnico da Educação Profissional*. 2014. 68f. Dissertação (Mestrado). Universidade Federal do Piauí, Teresinha, 2014.
- LOBO, M. B. *Panorama da evasão no ensino superior brasileiro: Aspectos gerais das causas e soluções*. São Paulo: Instituto Lobo para o Desenvolvimento da Educação, da Ciência e da Tecnologia, 2012.
- MELLO, S. Q.; SANTOS, R. P. O ensino de Matemática e a educação profissional: a aplicabilidade dos números complexos na análise de circuitos elétricos. *Acta Scientiae*, Canoas, v. 7, n. 2, jul./dez. 2005.
- MONZON, L. W. *Números complexos e funções de variável complexa no ensino médio uma proposta didática com uso de objeto de aprendizagem*. 2012. 134f. Dissertação (Mestrado). Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2012.
- MORALES, A.; PUHL, C. S.; LIMA, I. G. Números complexos e corrente alternada: um contexto interdisciplinar. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE EDUCAÇÃO EM ENGENHARIA, 41., 2013, Gramado. *Educação na era do conhecimento*. Gramado: UFRGS, 2013.
- MORAN, J. M.; MASETTO, M. T.; BEHRENS, M. A. *Novas tecnologias e mediação pedagógica*. 21. ed. Campinas: Papirus, 2013.
- NETO, R. M. R. *Alternativa Metodológica para o Ensino e Aprendizagem de Números Complexos: Uma Experiência com Professores e Alunos*. 2009. 142f. Dissertação (Mestrado). Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2009.
- NETO, R. V. O ensino de números complexos. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 11., 2013, Curitiba. *Anais...* Curitiba/PR, 2013.
- NOBRE, W. R. *Números complexos e algumas aplicações*. 2013. 54f. Dissertação (Mestrado). Universidade Federal Fluminense, Niterói, 2013.

- OLIVEIRA, W. G. A. *Estudo e Aplicações dos Números Complexos: O uso dos Números Complexos na Análise de Circuitos Elétricos*. 2018. 66f. Dissertação (Mestrado). Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2018.
- PEREIRA, F. O. *Números Complexos na Educação Básica*. 2016. 127f. Dissertação (Mestrado). Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2016.
- PORTOLAN, J. *A importância do ensino de números complexos no Ensino Médio, na visão dos professores de matemática, em alguns municípios da região oeste do Paraná*. 2017. 96f. Dissertação (Mestrado). Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Pato Branco, 2017.
- PUHL, C. S. *Números complexos: interação e aprendizagem*. 2016. 244f. Dissertação (Mestrado Profissional). Universidade de Caxias do Sul, Caxias do Sul, 2016.
- PUHL, C. S.; LIMA, I. G. Na busca de desenvolver uma aprendizagem significativa de números complexos. In: JORNADA NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 5., 2014, Passo Fundo. *Educação Matemática: o que ensinar? Por que aprender?* Passo Fundo: Universidade de Passo Fundo, 2014.
- REIS, A. C. M. *A Aplicação dos Números Complexos aos Circuitos de Corrente Alternada no Ensino Técnico: Uma análise no Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Piauí (IFPI)*. 2009. 98f. Dissertação (Mestrado). Universidade Luterana do Brasil, Canoas, 2009.
- STUMP, S. M.; ABAR, C. A. A. P. Objetos de aprendizagem para ensino de circuitos elétricos em regime estacionário com o uso de números complexos em um curso de engenharia elétrica. In: CONGRESSO INTERNACIONAL EM EDUCAÇÃO EM ENGENHARIA E COMPUTAÇÃO, 8., 2013, Luanda – Angola. *Anais...* Luanda – Angola, 2013.
- VELOSO, T. C. M. A.; ALMEIDA, E. P. Evasão nos cursos de graduação da Universidade Federal de Mato Grosso, campus universitário de Cuiabá – um processo de exclusão. *Série-Estudos - Periódico do Programa de Pós-Graduação em Educação da UCDB*, nov. 2013.
- VILAS BOAS JUNIOR, V. P. *Números Complexos: Interpretação geométrica e aplicações*. 2014. 58f. Dissertação (Mestrado Profissional). Universidade Federal da Bahia, Salvador/BA, 2014.
- YIN, R. K. *Estudo de caso: planejamento e métodos*. 5. ed. Porto Alegre: Bookman, 2015.