

## MODELAGEM MATEMÁTICA E PENSAMENTO ALGÉBRICO NO 6º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

DOI: <https://doi.org/10.33871/22385800.2021.10.23.98-123>

Cristiana Fadin<sup>1</sup>  
Emerson Tortola<sup>2</sup>

**Resumo:** Este artigo tem por objetivo investigar como atividades de Modelagem Matemática, na perspectiva da *Model-Eliciting Activities* (MEAs), podem contribuir com o desenvolvimento do pensamento algébrico no 6º ano do Ensino Fundamental. Para isso foi desenvolvida uma atividade de Modelagem Matemática nessa perspectiva em uma turma de 6º ano, com alunos de 11 a 14 anos, de um Colégio Estadual localizado no Norte do Paraná. A pesquisa foi realizada no âmbito de um Mestrado Profissional em Ensino de Matemática e tem caráter qualitativo, de cunho interpretativo, cujos dados analisados advêm das gravações em áudio, vídeo e imagens e das produções escritas dos alunos. Constatamos no desenvolvimento da atividade a presença das cinco formas de pensamento algébrico, indicadas por Kaput (1999), algumas com mais frequência que outras, uma vez que os alunos utilizaram conhecimentos condizentes com sua idade e ano escolar, sinalizando que as formas de pensamento algébrico podem ser desenvolvidas ao longo dos anos escolares, possibilitando o estabelecimento de estruturas capazes de fornecer uma base para níveis mais elevados de abstração e formalização. Pontuamos, ainda, o potencial das atividades de Modelagem Matemática, na perspectiva das MEAs, para desenvolver o pensamento algébrico, particularmente no que se refere à produção de modelos matemáticos.

**Palavras-chave:** Educação Matemática. Modelagem Matemática. Pensamento Algébrico. Ensino Fundamental.

## MATHEMATICAL MODELLING AND ALGEBRAIC THINKING IN THE 6<sup>th</sup> GRADE OF ELEMENTARY SCHOOL

**Abstract:** This paper aims to investigate how Mathematical Modelling activities, from the perspective of Model-Eliciting Activities (MEAs), can contribute to the development of algebraic thinking in the 6<sup>th</sup> Grade of Elementary School. In order to do that, a Mathematical Modelling activity was developed in this perspective in a 6<sup>th</sup> Grade class, with students from 11 to 14 years old, from a State School located in the North of Paraná. The research was carried out within the scope of a Professional Master' Degree in Mathematics Teaching and has a qualitative character, of an interpretative nature, whose analyzed data comes from audio, video and image recordings and from the students' written productions. We found in the development of the activity the presence of the five forms of algebraic thinking, indicated by Kaput (1999), some more frequently than others, as the students used knowledge consistent with their age and grade, outlining that the forms of algebraic thinking can be developed over the school grades, enabling the establishment of structures capable of providing a basis for higher levels of abstraction and formalization. We also point out the potential of Mathematical Modelling activities, from the perspective of MEAs, to develop algebraic thinking, particularly with regard to the production of mathematical models.

**Keywords:** Mathematics Education. Mathematical Modelling. Algebraic Thinking. Elementary School.

<sup>1</sup> Mestra em Ensino de Matemática pela Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), Campi Cornélio Procópio e Londrina. Docente da Secretaria da Educação e do Esporte do Estado do Paraná. E-mail: k.ris@hotmail.com - ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-0022-144X>.

<sup>2</sup> Doutor em Ensino de Ciências e Educação Matemática pela Universidade Estadual de Londrina (UEL). Docente da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), Campus Toledo, e do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática (PPGMAT) da UTFPR, Campi Cornélio Procópio e Londrina. E-mail: emersontortola@utfpr.edu.br - ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-6716-3635>.

## Introdução

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC), homologada em 20 de dezembro de 2017, é o documento que atualmente norteia os currículos e propostas pedagógicas da Educação Básica no Brasil. Nela reconhece-se a importância do ensino da Álgebra desde os primeiros anos escolares, sinalizando a necessidade de mudanças no cenário educacional caracterizado por uma abordagem essencialmente voltada à aritmética nos anos iniciais do Ensino Fundamental e que protela a formalização da Álgebra para os anos finais do Ensino Fundamental, como sugerem, por exemplo, as Diretrizes Curriculares do Estado do Paraná.

Embora sob críticas a respeito de sua formulação, proposição e, principalmente, visão fragmentada dos conhecimentos (CUNHA, 2015; CUNHA; DA SILVA, 2016; RIBEIRO; CRAVEIRO, 2017), a BNCC sinaliza timidamente a necessidade de olhar para além dos conteúdos e pensar no desenvolvimento de habilidades e pensamentos (BRASIL, 2018), o que há algum tempo vem sendo alvo de diversas investigações no âmbito da Educação Matemática, programas e orientações curriculares nacionais e internacionais.

Pesquisas como as de Fiorentini, Miorim e Miguel (1993), Lins e Gimenez (1997), Trevisan et al. (2018), sugerem iniciar desde cedo a educação algébrica por meio de atividades que assegurem o desenvolvimento de ideias e formas de pensar, que são características da Álgebra, e vão dar subsídios para o seu estudo pelos alunos em anos posteriores. Essas ideias e formas de pensar constituem o que na literatura é comumente denominado por pensamento algébrico. Segundo Van de Walle (2009, p. 287), o pensamento algébrico “envolve formar generalizações a partir de experiências com números e operações, formalizar essas ideias com o uso de um sistema de símbolos significativos e explorar os conceitos de padrão e de função”.

A ideia de pensamento algébrico apresentada por Van de Walle (2009) se alinha à perspectiva defendida por Kaput (1999), segundo a qual a Álgebra “envolve generalizar e expressar essa generalidade usando linguagens cada vez mais formais, cuja generalização começa na aritmética, em situações de modelagem, em geometria e em praticamente toda a matemática que pode ou deve aparecer nas séries elementares” (KAPUT, 1999, p. 134). Essa perspectiva indica a possibilidade de uma nova abordagem para o ensino e a aprendizagem da Álgebra, fazendo uso do pensamento algébrico, em suas várias formas, e das representações algébricas, como gráficos, tabelas, planilhas e fórmulas tradicionais, poderosas ferramentas intelectuais desenvolvidas por nossa civilização e que podem ser utilizadas para criar ambientes de ensino em salas de aula que permitam aprender com compreensão.

O *National Council of Teachers of Mathematics*<sup>3</sup> trata o desenvolvimento do pensamento algébrico destacando quatro eixos que devem orientar o trabalho pedagógico nos vários níveis de ensino. São eles: (1) compreender padrões, relações e funções; (2) representar e analisar situações e estruturas matemáticas usando símbolos algébricos; (3) usar modelos matemáticos para representar e compreender relações quantitativas; e (4) analisar a mudança em vários contextos. Cada nível de ensino deve considerar, também, aspectos específicos da faixa etária dos alunos e dos conteúdos de outros eixos da Matemática, recebendo adequações de acordo com tais características (NCTM, 2000).

O trabalho com atividades de Modelagem Matemática em sala de aula pode ser considerado uma possibilidade que atende a esse propósito. Segundo Stillman (2015), fazer Modelagem Matemática envolve utilizar conceitos, estruturas e relações matemáticas para descrever e caracterizar, ou modelar, uma situação do mundo real de modo que capture suas características essenciais. Esse “fazer” envolve a obtenção de um modelo matemático, um sistema de elementos, operações, relações e regras que pode ser usado para descrever, explicar ou prever o comportamento de algum outro sistema familiar (DOERR; ENGLISH, 2003).

Ao obter um modelo matemático o aluno precisa observar características da situação, conjecturar regularidades, estabelecer relações, generalizá-las e externalizá-las usando a linguagem matemática (TORTOLA, 2016). Essa obtenção envolve ações que podem ser associadas ao pensamento algébrico e, se bem planejadas, podem auxiliar no seu desenvolvimento.

A perspectiva das *Model-Eliciting Activities*<sup>4</sup> (MEAs), proposta por Lesh et al. (2000), nos dá suporte para observar evidências do pensamento algébrico, uma vez que tem como pressuposto a prática da Modelagem Matemática para a elicitação de modelos, ou seja, para provocar a externalização dos pensamentos e conclusões dos alunos em relação à situação-problema por meio de um modelo matemático. Essa elicitação se dá com base em seis princípios que orientam a produção, interpretação e análise de modelos matemáticos, a saber, construção do modelo, generalização, documentação do modelo, realidade, autoavaliação e protótipo eficaz (LESH et al., 2000).

---

<sup>3</sup> Fundado em 1920, o Conselho Nacional de Professores de Matemática (NCTM) é a maior organização de Educação Matemática no mundo. Tem por objetivo aprimorar o ensino da matemática, especialmente nos campos elementares e secundários, por meio da realização de reuniões para a apresentação e discussão de trabalhos e da publicação de jornais, revistas, livros e relatórios, para vitalizar e coordenar o trabalho de muitas organizações de professores de matemática e trazer os interesses da matemática à atenção e consideração do mundo educacional. Conforme descrição apresentada em: <https://www.nctm.org/About/>.

<sup>4</sup> Optamos por designar a perspectiva das MEAs na língua de origem, inglesa, pois a tradução dos termos pode não condizer com o objetivo a que a estratégia se propõe.

Nesse contexto, investigamos *como uma atividade de Modelagem Matemática, na perspectiva das Model-Eliciting Activities (MEAs), pode contribuir com o desenvolvimento do pensamento algébrico no 6º ano do Ensino Fundamental?* Escolhemos como sujeitos da pesquisa uma turma de 6º ano do Ensino Fundamental de um colégio público paranaense, uma vez que, de acordo com as Diretrizes Curriculares da Educação Básica do Estado do Paraná (2008), é o ano que antecede o ensino formal da Álgebra, sendo, portanto, adequada para o desenvolvimento de atividades que deem suporte para a promoção do pensamento algébrico.

A análise dos dados, feita sob uma abordagem qualitativa, possui caráter descritivo e interpretativo, possibilitando fazermos referência às bases teóricas assumidas e aos registros dos alunos para fundamentar nossas inferências. Inicialmente discorremos sobre a Modelagem Matemática, na perspectiva das MEAs, e sobre o desenvolvimento do pensamento algébrico, em seguida descrevemos os aspectos metodológicos e o contexto da pesquisa e, por fim, analisamos uma atividade de Modelagem e tecemos considerações sobre os resultados obtidos.

### **Modelagem Matemática na perspectiva das MEAs**

A perspectiva das *Model-Eliciting Activities* (MEAs) consiste em uma maneira de encaminhar atividades de Modelagem Matemática, nas quais os alunos, preferencialmente em grupos, são orientados de modo a produzir modelos matemáticos para resolver problemas associados ao mundo real, a partir de descrições, explicações, construções e outras produções escritas, que podem ser elaboradas, adaptadas e utilizadas em outros contextos de forma generalizada (LESH; DOERR, 2003), “revelando, testando e refinando ou ampliando repetidamente suas formas de pensar” (LESH, et al., 2000, p. 597).

O desenvolvimento das MEAs foi norteado por dois objetivos: encorajar os alunos a criarem modelos matemáticos para resolver problemas complexos do mundo real, de forma similar aos que são empregados na Matemática Aplicada (LESH; DOERR, 2003); e viabilizar que os pesquisadores investiguem o pensamento matemático dos alunos. Dessa forma, as MEAs podem nos ajudar a compreender como atividades de Modelagem Matemática, desenvolvidas nessa perspectiva, podem contribuir com o desenvolvimento do pensamento algébrico, à medida que a atividade ocorre e, posteriormente, ao analisar os registros escritos produzidos, tendo em vista que suas orientações viabilizam a externalização dos pensamentos dos alunos por meio de diálogos e registros.

As MEAs são delineadas com base em seis princípios que orientam a produção,

interpretação e análise de modelos matemáticos, conforme Quadro 1.

**Quadro 1:** Princípios orientadores das MEAs

<b>Princípio</b>	<b>Descrição</b>
Construção do modelo	Garante que a atividade requeira a construção de uma descrição explícita, explicação ou procedimento para uma situação matematicamente significativa.
Generalização	Também conhecido como Princípio de Capacidade de Compartilhamento e Reutilização do Modelo. Requer que os alunos produzam soluções compartilháveis e modificáveis para outras situações relacionadas.
Documentação do modelo	Garante que os alunos criem alguma forma de documentação que revelará explicitamente como eles estão pensando a situação-problema.
Realidade	Requer que a atividade seja colocada em um contexto realista e seja projetada para que os alunos possam interpretar a atividade de forma significativa a partir de seus diferentes níveis de habilidade matemática e conhecimento geral.
Autoavaliação	Garante que a atividade contenha critérios que os alunos possam identificar e usar para testar e revisar suas atuais formas de pensar.
Protótipo eficaz	Garante que o modelo produzido será o mais simples possível, mas ainda matematicamente significativo para fins de aprendizagem (ou seja, um protótipo de aprendizagem ou uma “grande ideia” em Matemática).

Fonte: Stohlmann e Albarracín (2016), com base em Lesh et al. (2000).

O uso das MEAs favorece a significação de conceitos (LESH et al., 2000), pois nessa perspectiva os alunos investigam problemas matemáticos realistas e, em grupos, são incentivados a revelar seus pensamentos, individuais ou coletivos, enquanto inteiram-se com o problema, bem como a trabalhar de forma heurística, buscando métodos e produzindo modelos matemáticos que os auxiliarão a resolver o problema. Geralmente, os alunos apresentam sua solução para os colegas e têm a oportunidade de discutir e descrever seus resultados, mostrando que, embora possam existir semelhanças nos raciocínios, cada grupo resolveu o problema usando métodos de sua escolha.

Os modelos matemáticos produzidos fornecem resultados para o problema sob investigação e refletem os pensamentos dos alunos, oferecendo-lhes a oportunidade de revisitar seus próprios pensamentos à medida que documentam seus modelos. Depois, eles têm a possibilidade de testar a robustez ou estabilidade de seus modelos matemáticos aplicando-os a uma nova situação. Frequentemente, essa prática permite identificar inconsistências ou melhorias no modelo matemático e esse tipo de feedback contribui para o desenvolvimento do pensamento reflexivo e crítico dos alunos (DARK; MANIGAULT, 2007).

Glas (2002) sinaliza que a criação de modelos é uma das atividades matemáticas mais poderosas nas quais os alunos podem se envolver, pois os inserem em situações que favorecem a compreensão de que a Matemática não é uma série de subseções desconexas, pelo contrário, revela a interconectividade dos conceitos durante a produção dos modelos.

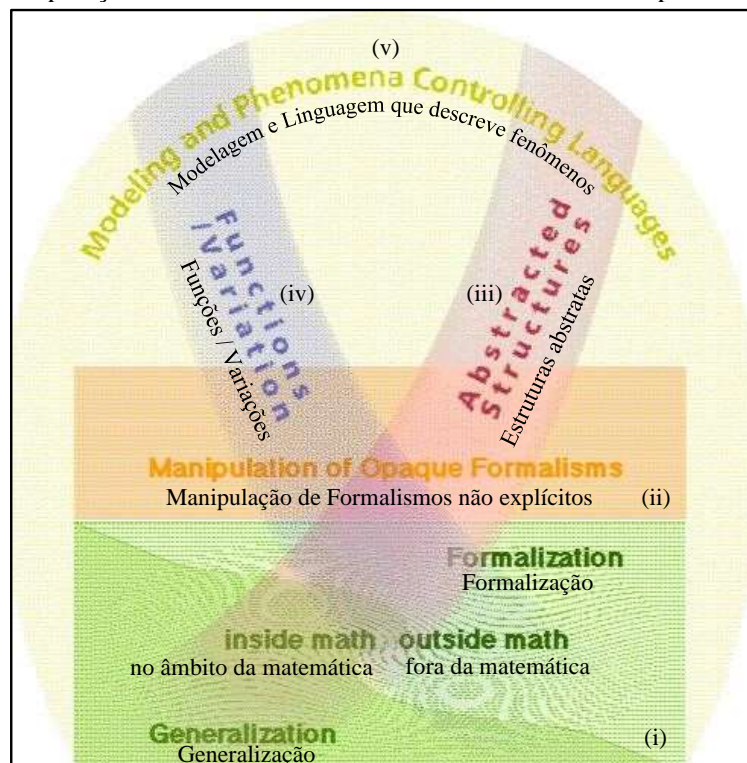


Portanto, a criação de modelos matemáticos por meio das MEAs é uma possibilidade eficaz para estimular o desenvolvimento conceitual no processo de aprendizagem da Matemática à medida que envolve os alunos no pensamento matemático elementar (LESH, et al., 2000). As MEAs se configuram como um método disponível para inserir modelos e Modelagem no currículo de matemática.

### Formas de desenvolvimento do Pensamento Algébrico

Diante da multiplicidade de entendimentos a respeito do pensamento algébrico, neste artigo nos alinhamos à concepção apresentada por Kaput (1999), segundo a qual há cinco diferentes formas de desenvolvimento do pensamento algébrico: (i) álgebra como generalização e formalização de padrões e restrições; (ii) álgebra como manipulação sintática de formalismos (não explícitos); (iii) álgebra como estudo de estruturas abstratas a partir de cálculos e relações; (iv) álgebra como estudo de funções, relações e variações conjuntas; e (v) álgebra como modelagem e linguagem que descreve fenômenos. Segundo Kaput (1999), as cinco formas de pensamento algébrico estão sobrepostas e inter-relacionadas entre si, como mostra a Figura 1. Elas interagem ricamente de forma conceitual e sinalizam como o pensamento algébrico pode ser desenvolvido ao longo dos anos escolares.

**Figura 1:** Sobreposição e inter-relacionamento das cinco formas de pensamento algébrico



Fonte: Adaptado de Kaput (1999, p. 135).

A forma (i) álgebra como generalização e formalização de padrões e restrições, indicada na Figura 1 pelo retângulo verde, se configura como a base para as outras, pois de acordo com Kaput (1999), a generalização e a formalização são intrínsecas à atividade matemática, são elas que caracterizam um pensamento como matemático.

A forma (ii) álgebra como manipulação sintática de formalismos (não explícitos), indicada na Figura 1 pelo retângulo laranja, implica na construção de relações que não estão evidentes, mas que podem ser constatadas e descritas por meio de símbolos e regras sintáticas que permitem construir significados.

A forma (iii) álgebra como estudo de estruturas abstratas a partir de cálculos e relações, indicada na Figura 1 pela faixa vermelha, sugere que das experiências matemáticas dos alunos surgem estruturas capazes de fornecer uma base para níveis mais elevados de abstração e formalização, como ocorre, por exemplo, com as ideias de correspondência e variação de quantidades que fundamentam o conceito de função, embasadas nos diversos tipos de experiências matemáticas envolvendo contagem, medição e estimativa, que indicam a forma (iv) álgebra como estudo de funções, relações e variações conjuntas, representada na Figura 1 pela faixa azul.

Por fim, a forma (v) álgebra como modelagem e linguagem que descreve fenômenos, indicada na Figura 1 pela área amarela, indica a modelagem como uma forma de descrever fenômenos extramatemáticos e matematizá-los por meio da linguagem. “Na descrição de Kaput do pensamento algébrico, a modelagem reflete a álgebra como uma ‘rede de linguagens’ que penetra todos os outros aspectos da matemática” (VAN DE WALLE, 2009, p. 318) e, por isso, na figura, engloba todas as outras formas de pensamento algébrico apresentadas.

Assim, para Kaput (1999), o trabalho com a Álgebra em sala de aula deve incluir essas cinco formas de pensamento algébrico, o qual pode ser viabilizado por meio de atividades que requerem dos alunos observações de fenômenos e experimentações, que envolvem formulação de conjecturas, justificações, argumentações, generalizações e descrições a partir do uso da linguagem matemática, assim como a Modelagem Matemática.

Alinham-se a essa concepção trabalhos como o de Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) que defende o desenvolvimento do pensamento algébrico por meio de elementos como “a percepção de regularidades, a percepção de aspectos invariantes em contraste de outros que variam, as tentativas de expressar ou explicar a estrutura de uma situação-problema e a presença do processo de generalização” (FIORENTINI; MIORIM; MIGUEL, 1993, p. 87).

Ainda nessa linha, Schliemann, Carraher e Brizuela (2007, p. 12) afirmam que “a generalização está no coração do pensamento algébrico” e Canavarro (2007, p. 87) argumenta que o pensamento algébrico “está na atividade de generalizar”, assim além de utilizar letras para expressar ideias algébricas, “a linguagem natural e outros elementos como diagramas, tabelas, expressões numéricas, gráficos, podem também ser usados para expressar a generalização”. Lins e Gimenez (1997, p. 114), por sua vez, retratam essa generalização como uma situação que “emerge quando os alunos passam a falar do que é comum a um conjunto de casos particulares”. Essas ideias corroboram com a concepção de a generalização ser a base para as demais formas de pensamento algébrico, conforme aponta Kaput (1999).

### **Aspectos Metodológicos e Contexto da Pesquisa**

Com a intenção de investigar *como uma atividade de Modelagem Matemática, na perspectiva das Model-Eliciting Activities (MEAs), pode contribuir com o desenvolvimento do pensamento algébrico no 6º ano do Ensino Fundamental*, optamos por uma abordagem qualitativa, uma vez que o “foco é entender e interpretar dados e discursos” (D’AMBROSIO, 2012, p. 12) e a pesquisa qualitativa, segundo o autor, permite dar atenção aos participantes e às suas ideias, procura estabelecer significado aos discursos e às suas narrativas, possibilitando ao pesquisador projetar os próximos passos. Para Borba e Araújo (2012, p. 25), pesquisas qualitativas “fornecem informações mais descritivas, que primam pelo significado dado às ações”. Cientes de que o ambiente de coleta de dados é uma sala de aula, na qual as ações mudam constantemente, assim como significados são adquiridos, trocados, compartilhados (MOREIRA, 2011), entendemos pertinente a opção por tal abordagem.

A pesquisa foi realizada durante os anos de 2019 e 2020 no âmbito de um Mestrado Profissional em Ensino de Matemática. A atividade escolhida para análise foi desenvolvida em um Colégio Estadual localizado no Norte do Paraná, com uma turma de 27 alunos de um 6º ano do Ensino Fundamental, com idades que variavam de 11 a 14 anos, cuja autora deste artigo era a professora regente da disciplina de Matemática.

Os dados foram coletados no ano de 2019, por meio de uma filmadora, utilizada para captar imagens e auxiliar na identificação dos alunos; três gravadores e um celular, para captar áudio e registrar imagens; um diário de campo, no qual relatamos a atividade, pontuando situações que chamaram atenção por retratarem discussões sobre a situação-problema; e registros escritos produzidos pelos alunos, por nos permitirem analisar suas resoluções.



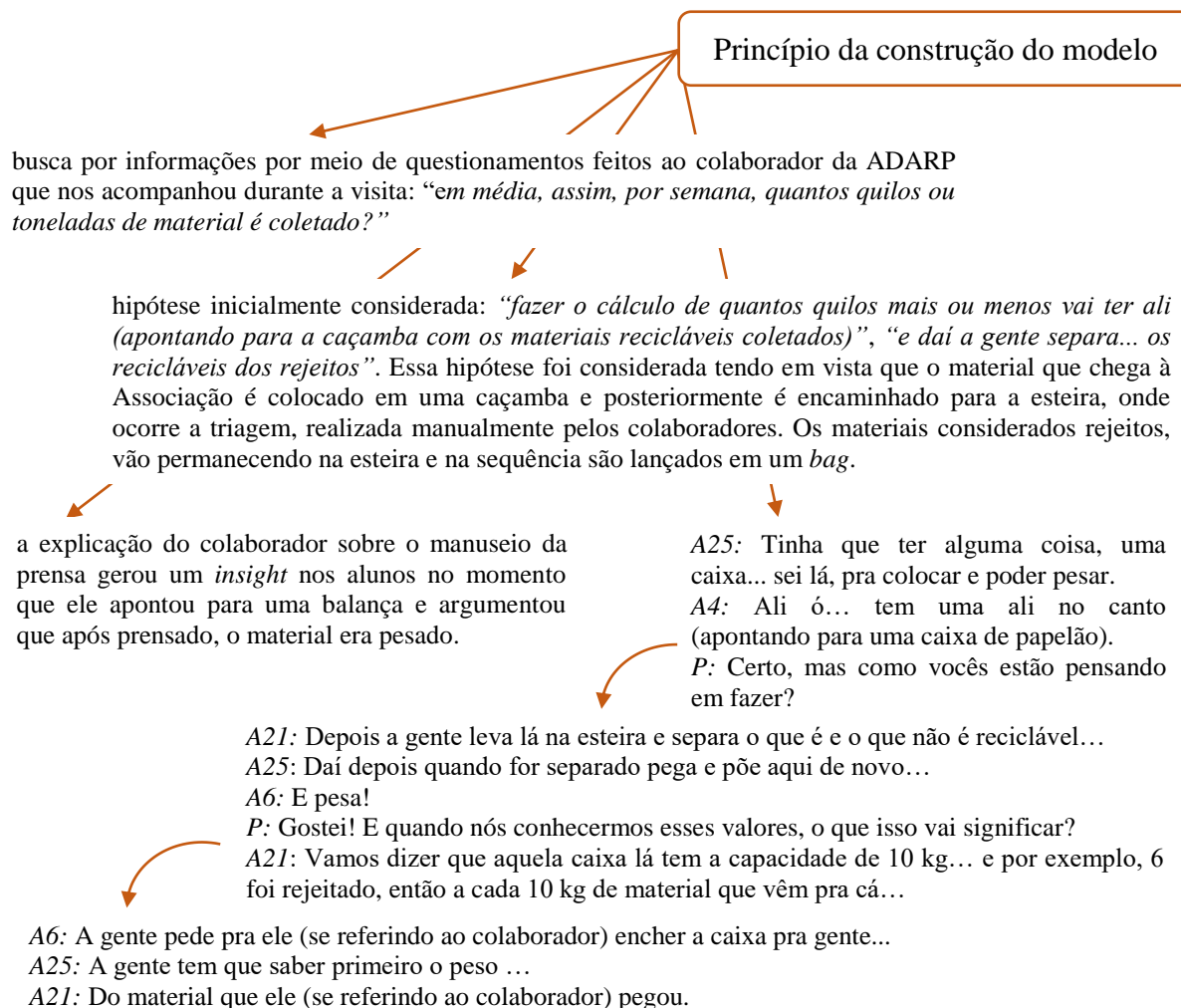
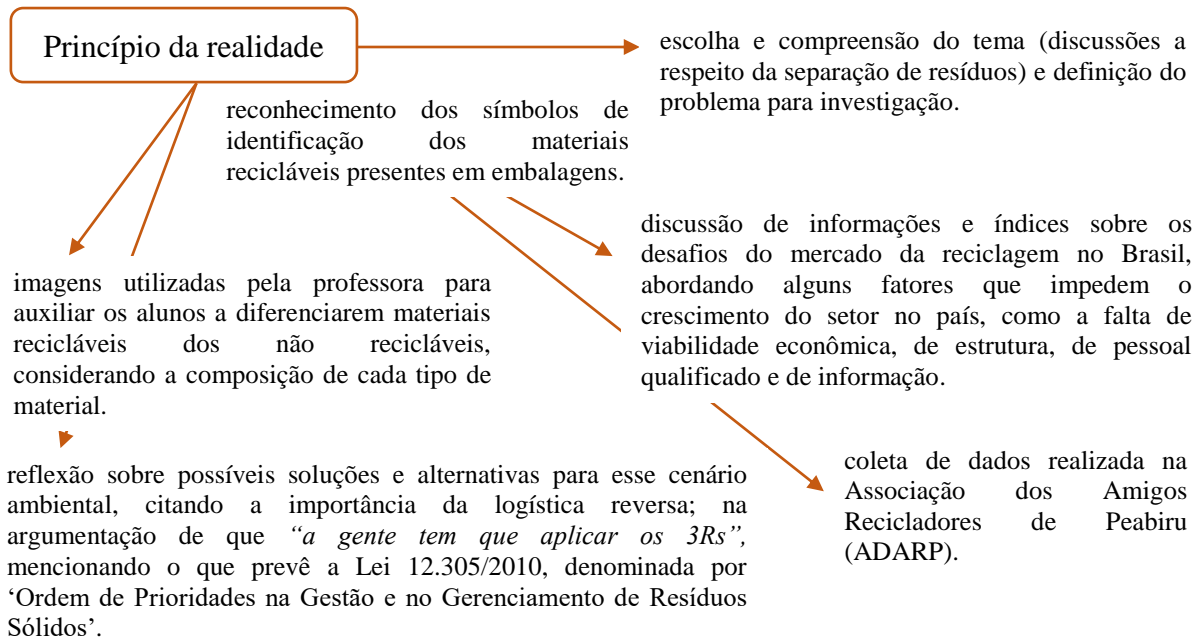
Para a análise dos dados, organizamos inicialmente os registros dos alunos de acordo com os grupos que se estabeleceram durante a atividade. Depois, para nos referirmos a eles, lhes atribuímos um código constituído da letra A seguida por um número que variava de 1 a 27, conforme uma lista que criamos, na qual organizamos seus nomes em ordem alfabética. À professora/pesquisadora atribuímos a letra P. Em seguida, transcrevemos as gravações de vídeo e de áudio na íntegra com o objetivo de selecionar episódios para a análise, na qual buscamos identificar nas transcrições e nos registros escritos a presença de elementos que indicassem as cinco formas de desenvolvimento do pensamento algébrico, conforme Kaput (1999). Para as discussões nos pautamos em pesquisas desenvolvidas na perspectiva da Educação Matemática (FIORENTINI; MIORIM; MIGUEL, 1993; LINS; GIMENEZ, 1997; CANAVARRO, 2007). Observamos toda forma de expressão durante a atividade, falas, gestos e registros – textos, tabelas, figuras, cálculos etc.

Para auxiliar na compreensão da análise, descrevemos a seguir a atividade desenvolvida de acordo com os princípios orientadores das MEAs (LESH et al., 2000).

### **Sobre a atividade**

A atividade “Reciclagem” foi desenvolvida a partir de um tema proposto pelos alunos, levando em consideração a realidade de muitos municípios, inclusive de alguns de seus familiares que trabalham com a coleta de materiais recicláveis. A problemática estabelecida foi: *“sabendo que durante o processo de triagem parte dos materiais recicláveis coletados em nosso município viram rejeitos, estime essa quantidade”*.

## Desenvolvimento da atividade segundo os princípios orientadores das MEAs



### Princípio da documentação do modelo

registro das relações observadas, escrita inicialmente na forma de razão e, posteriormente, na forma de porcentagem, como sugerida pelos alunos, a fim de estimar a quantidade de material reciclável que vira rejeito durante o processo de triagem.

produção de três tipos de gráficos por grupo: gráfico de barras, gráfico de setores e gráfico pictórico. A produção dos três tipos de gráficos partiu de um diálogo iniciado pela professora sobre as possíveis maneiras de representar o resultado da estimativa realizada, fazendo relação com os resultados de pesquisas que são divulgados, por exemplo, em telejornais, a fim de que os alunos mencionassem o uso dos gráficos.

sugestão dada sobre utilizar a razão para escrever matematicamente a relação observada sugere que os alunos compreendem o conceito de razão como uma comparação relativa entre duas grandezas, bem como, reconhecem que a razão pode ser expressa na forma de fração, que, por sua vez, pode ser escrita na forma de porcentagem. Todos esses conceitos foram sendo formalizados pela professora por meio de registros no quadro, validando o raciocínio empreendido pelos alunos.

### Princípio do protótipo eficaz

socialização da representação gráfica, que permitiu retomar e formalizar os conceitos que foram discutidos no âmbito dos grupos durante sua produção.

### Princípio da generalização

apresentação de uma situação relacionada ao contexto da atividade permitiu utilizar as compreensões presentes no modelo matemático produzido pelos alunos para determinar a quantidade de rejeito produzido diariamente no município.

a apresentação do gráfico da composição gravimétrica da coleta seletiva, no Brasil, no ano de 2019, permitiu constatar que o alto índice de rejeitos não era uma particularidade do município. O índice apresentado era muito próximo à estimativa realizada pelos alunos, o que permitiu validar a estratégia e os encaminhamentos realizados durante a atividade.

### Princípio da autoavaliação

As ações orientadas por esses princípios envolveram interpretações, descrições, conjecturas, explicações e justificativas, constituindo-se fundamentais para a aprendizagem da Matemática na atividade (DOERR; ENGLISH, 2003). Elas podem ser associadas às cinco formas de desenvolvimento do pensamento algébrico propostas por Kaput (1999), pois segundo o autor, elas requerem observações de fenômenos e experimentações, envolvendo formulação de conjecturas, justificações, argumentações, generalizações e descrições a partir do uso da linguagem matemática.

Na seção a seguir apresentamos uma análise da atividade “Reciclagem”, orientada pelos princípios das MEAs, a fim de evidenciar como ela pode contribuir com o

desenvolvimento do pensamento algébrico no 6º ano do Ensino Fundamental, conforme objetivo desta pesquisa.

### **Análise da atividade**

O problema definido pelos alunos, a respeito da quantidade de materiais recicláveis coletados que viram rejeitos no processo de triagem, nos levou a campo para realizar a coleta de dados. A coleta ocorreu na Associação dos Amigos Recicladores de Peabiru (ADARP), no contraturno escolar, por esse motivo nem todos os alunos participaram desse momento. Fomos recebidos por três colaboradores, um deles, em particular, nos acompanhou durante toda a visita, apresentando os espaços físicos, os maquinários e a rotina dos trabalhadores. Os alunos mostraram-se interessados, fizeram diversas perguntas, contemplando tanto curiosidades, como questões referentes aos registros das quantidades de material coletado pela Associação, em busca de informações que os auxiliassem a realizar a estimativa pretendida. O diálogo a seguir apresenta questionamentos feitos pelos alunos ao colaborador que nos acompanhava.

A25: Demora quanto tempo pra encher um saco desse? (se referindo ao bag contendo rejeitos)

Colaborador: Do lixo, assim?

A25: É.

Colaborador: Ah... a gente coloca uns dois ou três por dia aqui.

A1: Dois, por dia?! Minha nossa! Ainda vai tudo isso embora?

Colaborador: Vai tudo isso embora... geralmente é uns três desse aqui por dia que a gente tira.

A4: Nossa! É muita coisa.

A25: Em média, assim, por semana, quantos quilos ou toneladas de material é coletado?

Colaborador: Ah, isso aí eu não sei te responder... eu não faço ideia (risos).

A25: Ah, tá... É que eu achei, assim, se a gente soubesse quantos litros esse saco (se referindo ao bag) cabe, talvez a gente conseguisse fazer... porque que nem você falou que enche bastante desse por semana, daí de acordo com o litro, a gente podia fazer uma estimativa.

Os questionamentos de A25 revelam “tentativas de expressar ou explicar a estrutura de uma situação-problema”, que segundo Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) sinalizam elementos caracterizadores do pensamento algébrico. Indicam também que o aluno analisou possíveis relações numéricas existentes na situação, elaborando hipóteses sobre as relações e argumentando em favor dessas hipóteses, ações que sugerem, segundo Lins e Gimenez (1997), o pensamento algébrico.

As considerações presentes nesse diálogo podem ser associadas a algumas formas de pensamento algébrico, indicadas por Kaput (1999). Primeiramente à forma (i) álgebra como

generalização e formalização de padrões e restrições, pois as falas dos alunos, particularmente de A25, sugerem que conhecendo a quantidade de material coletado semanalmente eles poderiam estabelecer uma relação entre ela e a quantidade de rejeitos, ou ainda, conhecendo a capacidade de um bag, poderiam fazer tal estimativa para um determinado tempo. Essas estratégias indicam um encaminhamento para a generalização, porém, sinalizam também um direcionamento para a forma (ii) álgebra como manipulação sintática de formalismos (não explícitos), já que o aluno vislumbrou possíveis manipulações numéricas entre as grandezas, embora por falta de dados não tenha feito registros. Além disso, podem ser associadas à forma (iv) álgebra como estudo de funções, relações e variações conjuntas, pois os alunos reconheceram algumas variações que podem ser descritas por meio de funções – quanto mais material reciclável coletado, mais rejeitos serão produzidos, por exemplo – e, caso o colaborador possuísse as informações solicitadas, seria possível documentar a solução da problemática, deixando explícitas as ideias e relações estabelecidas para realizar a estimativa da quantidade de rejeitos.

Os alunos continuaram pensando em estratégias que permitissem realizar a estimativa a que se propuseram. A1 sugeriu “*fazer o cálculo de quantos quilos mais ou menos vai ter ali (apontando para a caçamba que armazenava os materiais coletados)*”, e A22 complementou “*e daí a gente separa... os recicláveis dos rejeitos*”. O encaminhamento sugerido pelos alunos apresentava dois empecilhos: primeiro, não era possível determinar a massa de todo o material que se encontrava na caçamba; segundo, teríamos que aguardar os colaboradores realizarem a triagem de todo o material que havia na caçamba para determinar a quantidade de rejeito resultante, o que levaria muito tempo. Dessa forma, a professora direcionou as discussões para que os alunos pensassem sobre a possibilidade de se trabalhar com uma amostra do material. A estimativa é pertinente nessa situação uma vez que os materiais que chegam à Associação não são sempre os mesmos.

O aluno A25 propôs a seguinte estratégia: “*eu tava pensando... tipo, daquele lá que é rejeitado (apontando para o bag com os rejeitos), que já tá cheio, se a gente pesasse? Porque daí a gente via o peso dele e, tipo, via o tanto de saco daqueles que enche por dia ou por semana... daí a gente baseava*”. A estratégia defendida pelo aluno A25 foi acolhida pelos demais, no entanto, a professora indagou: “*Certo, mas quanto de material precisou ser colocado na esteira para encher um bag daquele ali? Essa é a informação que nós precisamos ter, porque daí nós podemos dizer que de tantos quilos de materiais recicláveis, tantos quilos viram rejeito*”. Essa intervenção foi necessária para que os alunos compreendessem que o rejeito é resultante da triagem dos materiais que chegam até à



Associação.

Após essa intervenção o colaborador foi explicar como funcionava a prensa, e apontou para uma balança, informando que ela suportava até 1000 quilos, mas que também pesava coisas bem leves, porque era muito sensível. Após essa informação o aluno A25 fez uma sugestão que possibilitou estimar a quantidade de rejeito resultante do processo de triagem, conforme mostra o diálogo a seguir.

A25: Tinha que ter alguma coisa, uma caixa... sei lá, pra colocar e poder pesar.

A4: Ali ó... tem uma ali no canto (apontando para uma caixa de papelão).

P: Certo, mas como vocês estão pensando em fazer?

A6: A gente pede pra ele (se referindo ao colaborador) encher a caixa pra gente.

A25: A gente tem que saber primeiro o peso...

A21: Do material que ele (se referindo ao colaborador) pegou.

P: Hum... E depois?

A21: Depois a gente leva lá na esteira e separa o que é e o que não é reciclável.

A25: Daí depois quando for separado pega e põe aqui de novo.

A6: E pesa!

P: Gostei! E quando nós conhecermos esses valores, o que isso vai significar?

A21: Vamos dizer que aquela caixa lá tem a capacidade de 10 kg... E, por exemplo, 6 foi rejeitado, então a cada 10 kg de material que vem pra cá...

A25: 6 kg serão rejeitados.

A sugestão dada por A25, sinaliza “a percepção de aspectos invariantes em contraste de outros que variam”, outro elemento caracterizador do pensamento algébrico de acordo com Fiorentini, Miorim e Miguel (1993, p. 87), pois indica que ele percebeu a possibilidade de utilizar uma amostra do material para realizar a estimativa da quantidade de rejeito, supondo a existência de uma razão entre as quantidades de materiais recicláveis coletados e de rejeitos. Essa sugestão despertou a argumentação dos demais alunos quanto aos procedimentos envolvidos na estratégia mencionada, direcionando para as formas de desenvolvimento do pensamento algébrico (i) álgebra como generalização e formalização de padrões e restrições (KAPUT, 1999), pois as falas dos alunos sugerem que eles se encaminharam para a generalização da estimativa que seria realizada; (ii) álgebra como manipulação sintática de formalismos (não explícitos) (KAPUT, 1999), pois os alunos conseguiram exemplificar a relação que vislumbravam por meio da razão “*a cada 10 kg de material que vem pra cá...*” (A21) “*6 kg serão rejeitados*” (A21); e (iii) álgebra como estudo de estruturas abstratas a partir de cálculos e relações (KAPUT, 1999), pois a relação que os alunos estabeleceram pode ser interpretada como uma estrutura capaz de fornecer uma base para níveis mais elevados de abstração e formalização, como por exemplo, a interpretação percentual da relação investigada.

Dessa forma, a professora pediu que o colaborador acionasse a esteira e transferisse uma quantidade de materiais para a caixa de papelão, possibilitando, assim, executar a estratégia defendida pelos alunos. A Figura 2 apresenta os materiais que foram colocados na caixa, ainda na esteira.

**Figura 2:** Materiais recicláveis na esteira de triagem



Fonte: Dos autores.

As ações que seguiram, medir a massa da amostra de materiais, realizar a triagem, medir a massa do rejeito resultante e medir a massa da caixa de papelão, foram acompanhadas de muitos palpites a respeito dos “pesos” e, também, espanto ao verem as medidas exibidas no visor da balança. A Figura 3 apresenta as massas da amostra e dos rejeitos resultantes na caixa.

**Figura 3:** Massa da caixa com a amostra de materiais recicláveis coletados e massa da caixa com os materiais considerados rejeitos



Fonte: Dos autores.

Ao ver o espanto dos alunos com as medidas, o colaborador explicou: “*é por causa do peso da caixa, né?!?*”. Os alunos mostraram-se aliviados ao constatar que só a massa da caixa era de 1 kg. Com os dados devidamente registrados, por meio de fotos, a professora e os alunos se despediram dos colaboradores, agradecendo a atenção e o tempo despendido durante a visita, bem como os conhecimentos compartilhados.

Ao reencontrar os alunos, já em sala de aula, a professora foi surpreendida com o pedido de A21 para apresentar embalagens que havia trazido de casa contendo diferentes símbolos de identificação da composição dos materiais. A professora, feliz com o pedido, permitiu, uma vez que essa atitude denota o envolvimento do aluno com a atividade e sua autonomia em busca de estratégias para a compreensão da situação e para a resolução do problema, características desejadas em atividades de Modelagem Matemática (TORTOLA; ALMEIDA, 2016). Durante a apresentação os alunos recorreram ao quadro de símbolos de identificação dos materiais recicláveis, exibido pela professora na abordagem da situação-problema, para relacionar com as embalagens com os materiais que constituíam sua composição. Após a apresentação, a professora fez uma síntese da visita à Associação, com imagens de momentos que ilustravam as discussões realizadas, compartilhando os dados coletados com todos os alunos. A professora aproveitou esse momento para discutir a diferença entre peso e massa utilizando a tirinha apresentada na Figura 4, já que na visita essas grandezas foram utilizadas como sinônimos.

**Figura 4:** Tirinha sobre a diferença entre peso e massa



Fonte: [http://www.cepa.if.usp.br/e-fisica/mecanica/universitario/cap09/cap09\\_31.htm](http://www.cepa.if.usp.br/e-fisica/mecanica/universitario/cap09/cap09_31.htm)

A ideia de aceleração da gravidade e a fórmula que permite calcular a força peso foram apresentadas aos alunos, ainda que em linhas gerais, já que se trata de uma turma de 6º ano. Os alunos que conheciam sua massa fizeram o cálculo do seu peso aqui na Terra e, também, na Lua, ação que pode ser associada à forma do pensamento algébrico (ii) álgebra como manipulação sintática de formalismos (não explícitos), a qual requer a construção de relações, descritas por meio de símbolos e regras sintáticas que permitem construir significados (KAPUT, 1999) – diferença entre as grandezas peso e massa –, pois os alunos

revelaram a compreensão de que o peso está diretamente ligado à aceleração da gravidade presente no local, diferentemente da massa. Isso denota também uma “percepção de aspectos invariantes em contraste de outros que variam”, conforme Fiorentini, Miorim e Miguel (1993, p. 87).

Na sequência a professora retomou as discussões da atividade e orientou os alunos a pensar em como registrar as relações observadas, de modo a estimar a quantidade de material reciclável que vira rejeito durante o processo de triagem. Apesar da professora ter sinalizado que as discussões deveriam ocorrer nos grupos, os alunos se engajaram na socialização de seus raciocínios, o que de certa forma contribuiu para elucidar algumas incompreensões que se revelaram durante esse momento. As considerações dos alunos podem ser relacionadas à forma do pensamento algébrico (iv) álgebra como estudo de funções, relações e variações conjuntas, indicada por Kaput (1999), pois considera experiências matemáticas envolvendo contagem, medição e estimativa, ideias exploradas durante a atividade. O diálogo seguinte revela que experiências matemáticas anteriores foram determinantes para expressar a relação entre a quantidade de rejeito e de material reciclável em termos de uma linguagem matemática.

*P:* E como que nós podemos escrever essa comparação entre a quantidade de rejeito que sai toda vez que eles fazem a triagem do material que chega na Associação? Como que a gente pode escrever matematicamente essa relação?

*A21:* Usando razão.

*P:* Razão? O que é razão, A21? Por que eu posso escrever esses dados que nós temos, como uma razão?

*A21:* Vixi professora (risos)... Porque razão é quando a gente compara uma coisa com outra.

*A6:* Igual àquela dos carrinhos... os carros com as miniaturas<sup>5</sup> (fazendo gestos com as mãos).

*P:* Ótimo! E como a gente que pode escrever essa razão, então?

*A25:* Em fração. Professora, a gente também pode escrever na forma de porcentagem?

*P:* E aí? O que vocês acham? É possível escrever essa razão na forma de porcentagem?

*A25:* Eu acho que sim, porque a porcentagem também é uma fração né pro?

*P:* Isso mesmo, A25! Nós podemos escrever essa razão na forma de fração, porque as frações podem ser utilizadas para representar partes de um todo. E nós também podemos representar essa fração na forma de porcentagem. O que essas formas de escrever têm de diferente?

*A23:* Eu sei! É que na porcentagem vai ser cem.

*P:* Na porcentagem a gente olha para um grupo de 100, partes de 100. O nosso todo é representado pelo 100, que fica no denominador da fração e ainda pode ser representado por esse símbolo (escreve no quadro o símbolo “%”).

A sugestão dada por A21 sobre utilizar a razão para escrever matematicamente a relação observada e as justificativas que seguiram dos demais alunos indicam a forma do

---

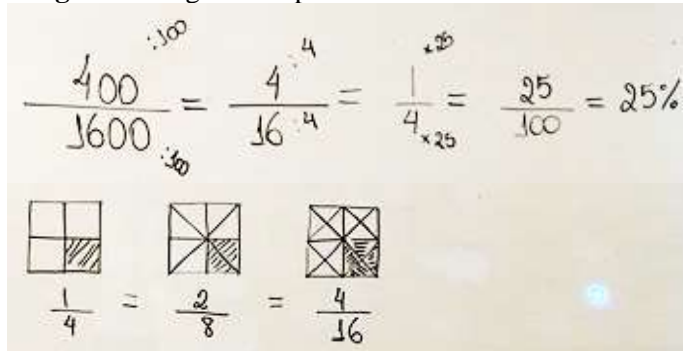
<sup>5</sup> Em momentos anteriores, os alunos se envolveram outras atividades de modelagem matemática, propostas pela professora, uma delas tratava a relação entre as dimensões de uma miniatura e do carro que lhe deu origem. Um relato do desenvolvimento dessa atividade pode ser encontrado em Fadin, Rezende e Tortola (2019).



pensamento algébrico (ii) álgebra como manipulação sintática de formalismos (não explícitos), proposta por Kaput (1999), uma vez que mostram que os alunos compreenderam o conceito de razão como uma comparação relativa entre duas grandezas, bem como reconheceram que a razão pode ser expressa na forma de fração e, além disso, na forma de porcentagem.

A professora registrou no quadro os dados conforme sugestões dos alunos, na forma de fração, cujo numerador 400 indica a massa de rejeito e o denominador 1600 indica a massa de material da amostra. Quando questionados a respeito da escrita na forma de porcentagem, vários alunos se manifestaram: “*divide o de cima pelo de baixo*” (A22); “*divide o 400 por 100*” (A23); “*professora, a gente pode simplificar essa fração... porque daí dá um quarto*” (A1); “*faz a fração equivalente!*” (A21). A Figura 5 apresenta os registros realizados durante a discussão, envolvendo a escrita da razão na forma de fração, equivalência de frações, interpretação geométrica (representação figural), fração decimal e porcentagem.

**Figura 5:** Registro da professora durante as discussões



$$\frac{400}{1600} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4} = \frac{25}{100} = 25\%$$

$$\frac{1}{4} = \frac{2}{8} = \frac{4}{16}$$

Fonte: Dos autores.

As discussões dos alunos que pautaram os registros feitos pela professora no quadro apresentaram novos indícios sobre “a percepção de aspectos invariantes em contraste de outros que variam” (FIORENTINI; MIORIM; MIGUEL, 1993, p. 87), particularmente no que se refere às frações equivalentes. Com as falas dos alunos ficou clara a compreensão de que a razão entre a massa de rejeitos e a massa de material da amostra, ou o percentual, se mantém constante ainda que se alterem as quantidades, ou seja, essa razão descreve uma relação entre tais grandezas.

Essa percepção conduziu os alunos a encaminhamentos que podem ser associados a algumas das formas de desenvolvimento do pensamento algébrico, descritas por Kaput (1999). Primeiramente à forma (ii) álgebra como manipulação sintática de formalismos (não explícitos), uma vez que os alunos sinalizaram conhecer como escrever uma razão, na forma



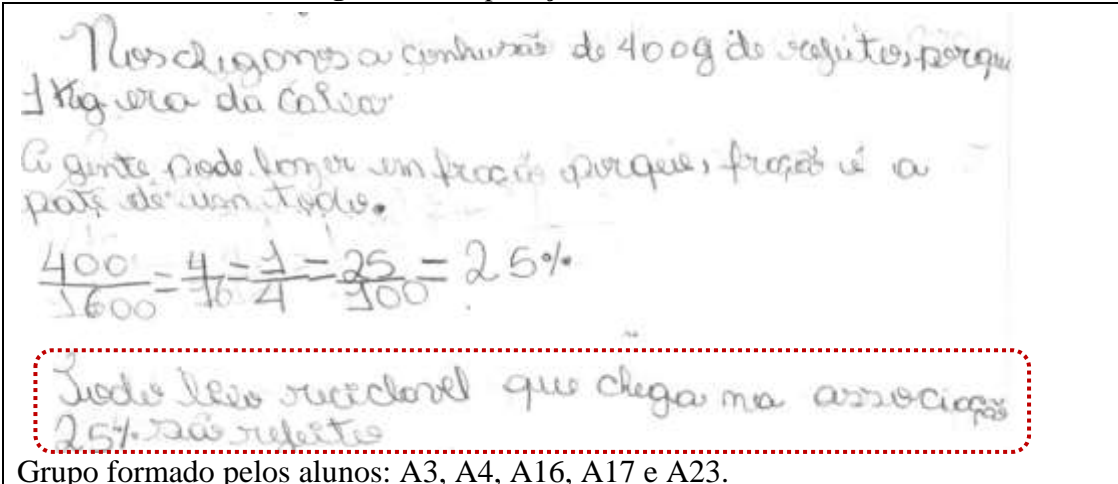
de fração e como transformar frações em porcentagem, principalmente utilizando frações equivalentes (A1, A21, A23), sejam elas na forma irredutível (A1), ou na forma de fração decimal (A23), mas também por meio da divisão (A22).

A interpretação geométrica, proposta pela professora, auxiliou os alunos nas transformações. “*Isso daí vai ser vinte e cinco por cento, porque essa daqui (se referindo à fração quatro dezesseis avos) é a mesma que essa (se referindo a fração um quarto) e um quarto é vinte e cinco por cento*” (A21). A25 concordou com o colega, acrescentando que 25% correspondem à “*metade da metade*”. Essas considerações encaminharam os alunos para as formas (i) álgebra como generalização e formalização de padrões e restrições e (iv) álgebra como estudo de funções, relações e variações conjuntas, pois os alunos reconheceram que os 25% determinados podem ser calculados a partir de uma quantidade qualquer de material coletado, revelando, inclusive, conhecimento de como as grandezas se relacionam e covariam.

É nesse sentido que Schliemann, Carraher e Brizuela (2007, p. 12) afirmam que “a generalização está no coração do pensamento algébrico” ou que Canavarro (2007, p. 87) argumenta que o pensamento algébrico “está na atividade de generalizar”, uma vez que a generalização emergiu quando os alunos passaram “a falar do que é comum a um conjunto de casos particulares” (LINS; GIMENEZ, 1997, p. 114), a saber a razão ou porcentagem que descreve a relação entre materiais coletados e rejeitos.

Diante disso, a professora solicitou que cada grupo registrasse a relação determinada, de modo a direcionar para a “documentação do modelo”. A Figura 6 apresenta anotações de alguns grupos.

**Figura 6:** Interpretação do resultado obtido



Nos deixamos a combinação de 400g de saquitos, porque  
 1kg era da coleção  
 A gente pode fazer um fração porque, fração é a  
 parte de um todo.  

$$\frac{400}{1600} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4} = \frac{25}{100} = 25\%$$
 Tudo isso reciclável que chega na associação  
 25% são rejeitos

Grupo formado pelos alunos: A3, A4, A16, A17 e A23.



e obtivemos 1,4 kg.

*Para chegar a uma conclusão precisa-se fazer conta para as frações e porcentagens. Para saber o resultado precisa das seguintes contas.*

*Primeiro simplificamos o número, que deu  $\frac{1}{4}$ , depois fizemos  $\times 25$  para o número ficar no denominador 100. E assim, a porcentagem de tanto lixo rejeitado foi 25%.*

*Conclusão: base num chipon neste resultado, vai poder ter um desmho representando a sua local, de logo a proporção  $\frac{1}{4}$  que é a simplificação do denominador de  $\frac{400}{1600}$  depois multiplica com o 4 pelo 100 que o número pro valor 100 se multiplicado por 25, com  $25 \times 1 = 25$  e o 100 como denominador, o valor de 25% e o 25 foi a metade da metade.*

material coletado =  $\frac{9.600}{1.600} \text{ kg}$

material rejeitado =  $\frac{1.400}{1.000} \text{ kg}$

Grupo formado pelos alunos: A6, A21, A25 e A27.

e obtivemos 1,4 kg.

Material coletado = 1600 g

Material rejeitado = 400 g

*Para chegar a uma conclusão precisa-se fazer conta para as frações e porcentagens. Para saber o resultado precisa das seguintes contas.*

$\frac{400}{1600} = \frac{1}{4} \cdot \frac{25}{25} = 25\%$


*Primeiro simplificamos o número, que deu  $\frac{1}{4}$ , depois fizemos  $\times 25$  para o número ficar no denominador 100. E assim, a porcentagem de tanto lixo rejeitado foi 25%.*

Material coletado = 1600 g

Material rejeitado = 400 g

Grupo formado pelos alunos: A1, A8, A10, A12, A15.

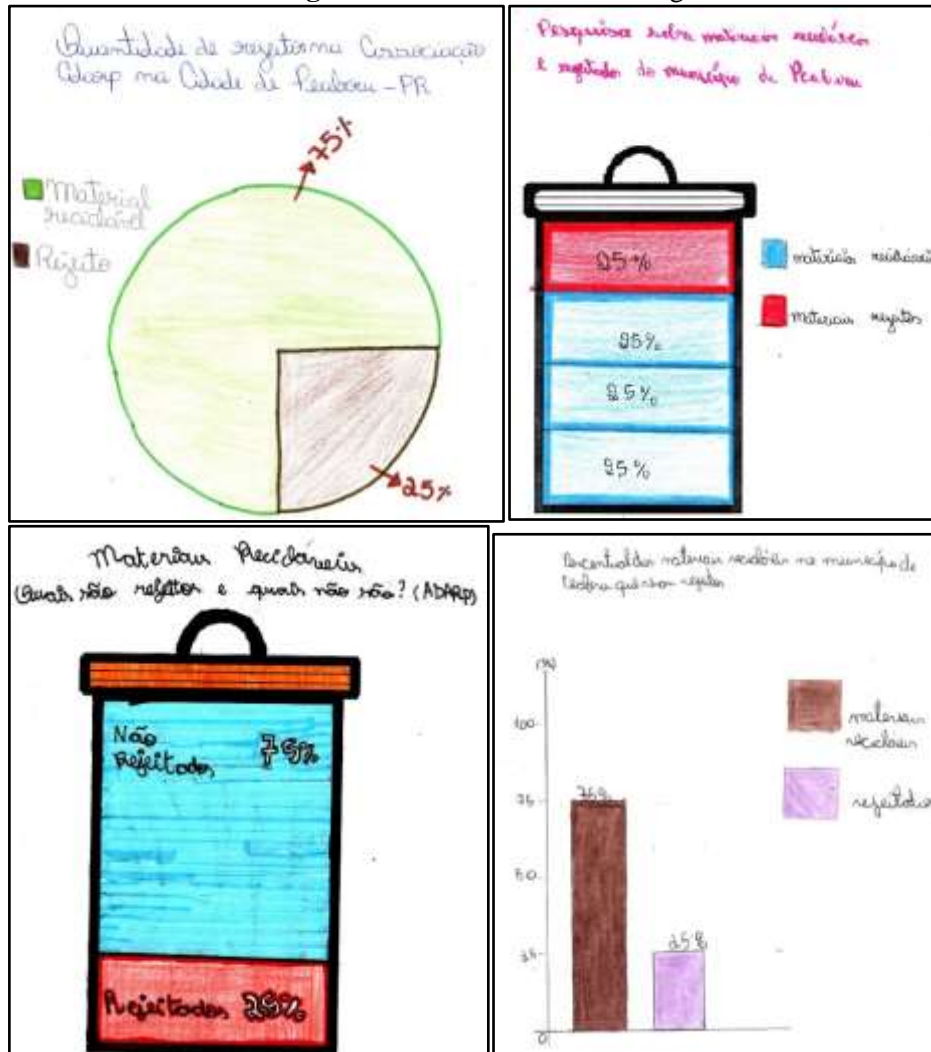
Fonte: Dos autores.



Após os registros das conclusões pelos grupos, a professora questionou a turma sobre possíveis maneiras de apresentar o resultado da estimativa realizada, fazendo relação com os resultados de pesquisas que são divulgados, por exemplo, em telejornais. A27 disse que esses resultados são divulgados por meio de “*um negócio que tem umas linhas assim ó (fazendo com as mãos gestos que se referiam a barras)*”. A25 imediatamente interveio afirmando: “*o nome disso aí é gráfico, moleque!*”. A turma toda deu risada da forma como a colega se expressou e concordou. A intenção foi promover o uso de uma variedade de representações – linguagem natural, cálculos aritméticos, figuras e gráficos, por exemplo – para expressar a

generalização estabelecida, como sugere Canavarro (2007), bem como a percepção da conexão entre elas, relacionando-as, também, ao contexto que as deu origem. A Figura 7 apresenta os modelos matemáticos gráficos elaborados por alguns grupos.

**Figura 7:** Modelos matemáticos gráficos



Fonte: Dos autores.

Na sequência, a professora projetou no quadro a interpretação do resultado expresso na forma de porcentagem, opção escolhida pelos alunos durante o encaminhamento da atividade, bem como uma situação relacionada ao contexto da atividade, conforme mostra a Figura 8.

**Figura 8:** Interpretação do resultado e situação relacionada ao contexto da atividade

Se formos expressar essa quantidade em porcentagem, é possível dizer que:

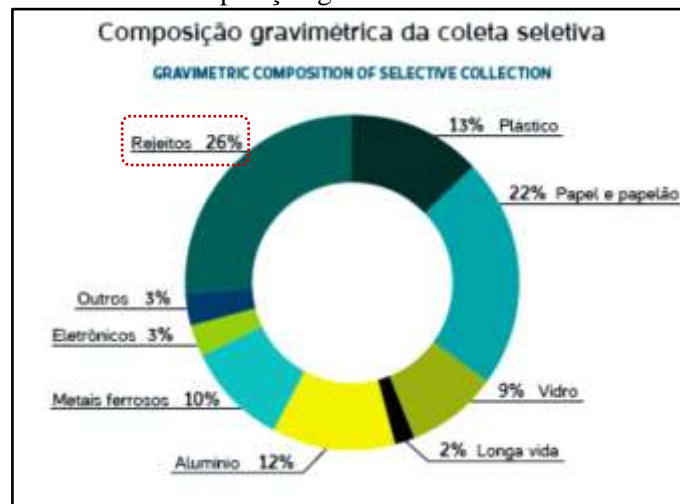
A cada 100 kg de materiais recicláveis que chegam à Associação, 25 kg estão indo parar no Aterro Sanitário, ou seja, **25%** dos materiais recicláveis coletados, em nosso município, viram rejeitos, durante o processo de triagem.

Esse percentual é altíssimo, visto que o município produz, em média, 7 toneladas diárias de resíduos, dos quais, segundo estudos, 30% correspondem à resíduos recicláveis.

Fonte: Dos autores.

A apresentação da situação relacionada suscitou novas discussões voltadas ao desenvolvimento da forma do pensamento algébrico (iv) álgebra como estudo de funções, relações e variações conjuntas (KAPUT, 1999), pois essa apresentação possibilitou a discussão de outros valores percentuais, explorando a ideia de correspondência e de variação. A última informação compartilhada com os alunos sinalizava que o alto índice de rejeitos não era uma particularidade do município. O gráfico da composição gravimétrica da coleta seletiva, no Brasil, no ano de 2019, permitiu constatar que esse índice era de 26%, conforme Figura 9.

**Figura 9:** Índices da composição gravimétrica da coleta seletiva no Brasil



Fonte: CEMPRE, 2019.

O índice apresentado, muito próximo à estimativa realizada pelos alunos, permitiu validar as estratégias e os encaminhamentos realizados durante a atividade. O desenvolvimento da atividade “Reciclagem”, por fim, permitiu realizar uma abordagem, por meio da Matemática, de um problema não essencialmente matemático, indicando assim que a forma do pensamento algébrico (v) álgebra como modelagem e linguagem que descreve

fenômenos, indicada por Kaput (1999) esteve também presente na atividade.

Observamos, portanto, indícios de desenvolvimento das cinco formas do pensamento algébrico, indicadas por Kaput (1999), ainda que algumas formas tenham ocorrido com mais frequência que outras. A atividade de Modelagem Matemática desenvolvida se configurou como uma possibilidade de compreender e atuar sobre situações-problema provenientes do mundo real, na qual a professora teve o desafio de auxiliar os alunos no estabelecimento de relações matemáticas significativas (BASSANEZI, 2002), viabilizando generalizações que contribuíram para o desenvolvimento do pensamento algébrico.

### **Considerações Finais**

A análise da atividade de Modelagem Matemática “Reciclagem”, desenvolvida sob a perspectiva das MEAs, revelou indícios do desenvolvimento das cinco formas do pensamento algébrico indicadas por Kaput (1999), algumas com mais frequência que outras.

A forma (i) álgebra como generalização e formalização de padrões e restrições se mostrou presente nos pensamentos dos alunos nos vários momentos em que eles sinalizaram uma tentativa de definir uma relação entre as grandezas investigadas, materiais recicláveis e rejeitos. Essa forma, conforme Kaput (1999) é a base para as demais formas, corroborando com outras pesquisas que afirmam que a generalização tem um papel central no desenvolvimento do pensamento algébrico (LINS; GIMENEZ, 1997; BLANTON; KAPUT, 2005; SCHLIEMANN; CARRAHER; BRIZUELA, 2007; CANAVARRO, 2007).

A forma (ii) álgebra como manipulação sintática de formalismos (não explícitos) foi evidenciada em momentos nos quais os alunos realizaram, seja por meio de exemplos, seja por meio de registros, manipulações numéricas, no caso operações aritméticas, como quando formularam hipóteses sobre como estabelecer a relação entre as grandezas ou quando escreveram a razão na forma de fração e na forma de porcentagem.

As formas (iii) álgebra como estudo de estruturas abstratas a partir de cálculos e relações e (iv) álgebra como estudo de funções, relações e variações conjuntas foram observadas em momentos que os alunos tentaram descrever as relações observadas, por exemplo quando explicaram por que uma fração poderia ser escrita na forma de porcentagem e quando utilizaram a razão ou a porcentagem para definir a relação entre as grandezas e como uma varia em função da outra, respectivamente.

Por fim, a forma (v) álgebra como modelagem e linguagem que descreve fenômenos, se mostrou presente constantemente na atividade, como pano de fundo que subsidiou as



demais (KAPUT, 1999), já que os alunos, durante a atividade de modelagem desenvolvida na perspectiva das MEAs, foram constantemente orientados para a obtenção de modelos matemáticos que descrevessem o comportamento da situação-problema investigada, ficando explícita, sobretudo, no momento de interpretação do modelo e aplicação a outras situações.

As estratégias utilizadas pelos alunos na atividade de modelagem, portanto, viabilizaram o desenvolvimento do pensamento algébrico, por meio de ações como as discussões sobre a situação-problema, a elaboração de hipóteses, a argumentação em favor dessas hipóteses, as justificativas para seus encaminhamentos, o uso de gestos e de registros – aritméticos, gráficos, em linguagem natural – para a produção dos modelos matemáticos, bem como as reflexões que eles geraram. Consideramos, assim, que os encaminhamentos dados pelos alunos à atividade, em busca de um modelo matemático, podem conduzi-los à produção de estruturas matemáticas progressivamente mais formais e adequadas às suas idades (TORTOLA; ALMEIDA, 2016), promovendo o desenvolvimento do pensamento algébrico (BLANTON; KAPUT, 2005).

Essa consideração se fortalece à medida que observamos o engajamento dos alunos na atividade, na busca por soluções, tomando decisões de forma autônoma, participando de discussões matemáticas e sobre a situação-problema, refletindo sobre os argumentos e justificativas das escolhas e ações por eles empreendidas e, principalmente, utilizando estratégias próprias e intuitivas, recorrendo às suas experiências de vida, à criatividade e a conhecimentos matemáticos, formalizados com o auxílio da professora, para descrever regularidades e estabelecer generalizações que deram subsídios a seus modelos matemáticos.

A atividade de modelagem matemática, desenvolvida na perspectiva das MEAs, portanto, ofereceu aos alunos do 6º ano do Ensino Fundamental a oportunidade de se envolverem no uso de uma linguagem simbólica, acessível a eles, que possibilitou o trabalho com formas de representação convencionais, como sugere o NCTM (2000), permitindo que os alunos aperfeiçoassem suas representações, utilizando-as como ferramentas para a aprendizagem da Matemática. Para finalizar, concluímos que a atividade de modelagem matemática se mostrou como uma alternativa pedagógica para o desenvolvimento do pensamento algébrico, mesmo antes da introdução formal da Álgebra, conforme sugerem algumas orientações curriculares.

## Referências

BASSANEZI, R.C. **Ensino–aprendizagem com modelagem matemática**. São Paulo:

Contexto, 2002.

BLANTON, M. L.; KAPUT, J. J. Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. **Journal for Research in Mathematics Education**, v.36, n.5, p.412-446, 2005.

BORBA, M; ARAÚJO, J. L. (Org.). **Pesquisa qualitativa em educação matemática**. 2. ed. – Belo Horizonte: Autêntica, 2012.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular – BNCC**. Brasília, DF: MEC, 2018.

CANAVARRO, A. P. O pensamento algébrico na aprendizagem da Matemática nos primeiros anos. **Quadrante**, Lisboa, v. 16, n. 2, p. 81-118, 2007.

CUNHA, E. V. R. Cultura, contexto e a impossibilidade de uma unidade essencial para o currículo. **Currículo sem Fronteiras**, v. 15, n.3, p. 575-587, set./ dez. 2015.

CUNHA, K. S.; DA SILVA, J. P. Sobre base e bases curriculares, nacionais, comuns: de que currículo estamos falando? **Revista e-Curriculum**, São Paulo, v. 14, n. 4, p. 1236- 1257, out./ dez. 2016.

D'AMBROSIO, U. Prefácio. In: BORBA, M; ARAÚJO, J. L. (Org.). **Pesquisa qualitativa em Educação Matemática**. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2012, p. 9 –21.

DARK, M.; MANIGAULT, C. **Information Assurance Model-Eliciting Activities for Diverse Learners**. Center for Education and Research Information Assurance and Security - CERIAS Tech Report 2007-92, Purdue University, West Lafayette, IN 47907-2086, 2007.

DOERR, H. M.; ENGLISH, L. D. A modeling perspective on students' mathematical reasoning about data. **Journal for Research in Mathematics Education**, Reston, v. 34, n. 2, p. 110-136. 2003.

FADIN, C.; REZENDE, M. F.; TORTOLA, E. Esses carros existem? Uma atividade de modelagem matemática com miniaturas. In: ENCONTRO PARANAENSE DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 15., 2019, Londrina. **Anais...** Londrina: SBEM-PR, 2019.

FIORENTINI, D.; MIORIM, A.; MIGUEL, A. Contribuição para um Repensar a Educação. Algébrica Elementar. **Pró-posições**, v.4, n.1, p.78-91, 1993.

GLAS, E. F. Klein's model of mathematical creativity. **Science and Education**, v.11, p. 95–104, 2002.

KAPUT, J. J. Teaching and learning a new algebra with understanding. In: FENNEMA, E.; ROMBERG, T. A. (Orgs.) **Mathematics classrooms that promote understanding**. Mahwah, NJ: Erlbaum, p. 133-155, 1999.

LESH, R.; DOERR, H. M. Foundations of a models and modelling perspective on mathematics teaching, learning, and problem solving. In: LESH, R.; DOERR, H. M. (Eds.). **Beyond constructivism: Models and Modelling Perspectives on mathematics problem solving, learning and teaching**. New York: Routledge, 2003. p. 3-33.

LESH, R.; HOOVER, M.; HOLE, B.; KELLY, A.; POST, T. Principles for Developing Thought-Revealing Activities for Students and Teachers. In: KELLY, A. E.; LESH, R. A. (Eds.). **Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education**. Mahwah: Routledge, 2000. p.591-646.

LINS, R. C.; GIMENEZ, J. **Perspectivas em Aritmética e Álgebra para o século XXI**. Campinas, SP, Papirus, 1997.

MOREIRA, M. A. **Metodologias de Pesquisa em Ensino**. 1. ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2011.

NCTM. **Principles and Standards for School Mathematics**. Reston, VA: NCTM, 2000.

PARANÁ, Secretaria de Estado da Educação. **Diretrizes Curriculares de Matemática para a Educação Básica Matemática**. Curitiba, 2008.

RIBEIRO, W. G.; CRAVEIRO, C. B. Precisamos de uma Base Nacional Comum Curricular? **Linhas Críticas**, Brasília, DF, v. 23, n.50, p. 51-69, fev. 2017 a mai. 2017.

SCHLIEMANN, A. D.; CARRAHER, D. W.; BRIZUELA, B. M. **Bringing out the algebraic character of arithmetic**. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum, 2007.

STILLMAN, G. Problem Finding and Problem Posing for Mathematical Modelling. In: HOE, L. N.; DAWN, N. K. E. (Edts.). **Mathematical Modelling: from theory to practice**. Singapore: World Scientific Publishing, 2015. p. 41-56.

STOHLMANN, M.; ALBARRACÍN, L. What is known about elementary grades mathematical modelling. **Education Research International**, London, v. 1, n. 9, 2016. <http://dx.doi.org/10.1155/2016/5240683>

TORTOLA, E. **Configurações de modelagem matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental**. 2016. 306 f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2016.

TORTOLA, E.; ALMEIDA, L. M. W. Um olhar sobre os usos da linguagem por alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental em atividades de Modelagem Matemática. **Revista Paranaense de Educação Matemática**, Campo Mourão, v. 5, n. 8, p. 83-105, jan.-jun. 2016.

TREVISAN, A. L.; VIEIRA, A. F. M.; DALTO, J. O.; BALDINI, L. A. F. Manifestações da linguagem algébrica evidenciadas na produção escrita de estudantes do 5º ano do Ensino Fundamental. **Revista Paranaense de Educação Matemática**, Campo Mourão, v. 7, n. 14, p. 71-87, jul.-dez. 2018.

VAN DE WALLE, J. **Matemática no ensino fundamental: formação de professores e aplicação em sala de aula**. 6ª ed. Porto Alegre: Artmed, 2009.

**Recebido em: 01 de setembro de 2021**  
**Aprovado em: 23 de setembro de 2021**