


Movimiento: Elemento Consustancial al Desarrollo del Pensamiento de Estudiantes de Educación Escolar Media en un Curso de Cálculo

Movimento: Elemento Consustancial ao Desenvolvimento do Pensamento de Estudantes do Ensino Médio num Curso de Cálculo

Claudia Quintero*

 ORCID iD 0000-0002-9411-7933

Diana Jaramillo**

 ORCID iD 0000-0003-1192-5642

Rodolfo Vergel***

 ORCID iD 0000-0002-0925-3982

Resumen

El propósito de este artículo es analizar una manera en la que tres estudiantes de educación escolar media pueden alcanzar otro *nivel* en el desarrollo de su *pensamiento*, al abordar el concepto de *movimiento* en un curso de *cálculo*. Presentamos, inicialmente, aspectos generales de la metodología de la investigación. Una investigación concebida bajo un paradigma cualitativo, desde un enfoque crítico-dialéctico, realizada en una institución educativa de carácter oficial de la ciudad de Medellín (Colombia). Planeamos *Actividades Orientadoras de Enseñanza (AOE)* como estrategia teórico-metodológica del trabajo en el aula, en el marco de la *Teoría de la Actividad*. Las protagonistas de la investigación fueron tres estudiantes que cursaban el grado undécimo. Luego, planteamos el *movimiento* a partir del materialismo dialéctico, como elemento consustancial al desarrollo del *pensamiento* de las estudiantes protagonistas de la investigación. A manera de conclusión, comprendemos que el *nivel* de desarrollo del *pensamiento* alcanzado por las estudiantes se produjo acorde con el proceso histórico-cultural del desarrollo del *pensamiento* del ser humano, en general a través de la *actividad*. Un *nivel* en el que las estudiantes profundizaron en el estudio de los objetos abordados. En esa línea, comprendemos que la *actividad* en la que las estudiantes se sumergieron, a través de las *AOE* realizadas, permitió el *movimiento* particular del *pensamiento* de cada una de ellas, en el proceso de su aproximación *consciente* a algunos objetos del *cálculo* escolar cuya esencia es el *movimiento* mismo.

Palabras-clave: Actividades Orientadoras de Enseñanza. Teoría de la Actividad. Materialismo Dialéctico. Consciencia. Nivel de Desarrollo.

*Doctora en Educación, Área de Educación Matemática, Universidad de Antioquia (UdeA). Integrante del grupo de investigación Matemática, Educación y Sociedad (MES). Urbanización Orinoco de la Cuenca, Envigado, Colombia. E-mail: claudia.quintero@udea.edu.co.

**Doctora en Educación, Área de Educación Matemática, Universidad Estadual de Campinas (UNICAMP) Profesora de la Facultad de Educación de la Universidad de Antioquia (UdeA). Medellín, Antioquia, Colombia. E-mail: diana.jaramillo@udea.edu.co.

***Doctor en Educación, énfasis en Educación Matemática, del programa académico de Doctorado Interinstitucional en Educación, Universidad Distrital Francisco José de Caldas (UDFJC), Universidad Pedagógica Nacional (UPN) y Universidad del Valle (UV). Profesor del programa de Doctorado Interinstitucional en Educación de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas (UDFJC), Bogotá, Colombia. E-mail: rvergelc@udistrital.edu.co.

Resumo

O propósito deste artigo é analisar a maneira pela qual três estudantes do ensino médio podem alcançar outro *nível* no desenvolvimento do seu *pensamento*, ao abordar o conceito de *movimento* num curso de *cálculo*. Apresentamos, inicialmente, aspectos gerais da metodologia da pesquisa. Uma pesquisa concebida sob um paradigma qualitativo, desde um enfoque crítico-dialético, realizada numa instituição educativa pública, da cidade de Medellín (Colômbia). Planejamos *Atividades Orientadoras de Ensino (AOE)* como estratégia teórico-metodológica do trabalho na sala de aula, no marco da *Teoria da Atividade*. As protagonistas da pesquisa foram três estudantes que cursavam o segundo grau do ensino médio. Depois, expusemos o *movimento* a partir do materialismo dialético, como elemento consubstancial ao desenvolvimento do pensamento das estudantes protagonistas da pesquisa. À maneira de conclusão, compreendemos, que o *nível* de desenvolvimento do pensamento conseguido pelas estudantes produziu-se de acordo com o processo histórico-cultural do desenvolvimento do pensamento do ser humano, em geral, através da *atividade*. Um *nível* no qual as estudantes se aprofundaram no estudo dos objetos abordados. Apontamos que a *atividade* sobre a qual as estudantes se debruçaram, através das *AOE* realizadas, possibilitou o *movimento* particular do pensamento de cada uma delas, no processo de sua aproximação *consciente* a alguns objetos do *cálculo* escolar cuja essência é o *movimento* mesmo.

Palavras-chave: Atividades Orientadoras de Ensino. Teoria da Atividade. Materialismo Dialético. Consciência. Nível de Desenvolvimento.

1 Introducción

Desde el materialismo dialéctico, el *movimiento*¹ es “una modalidad o atributo de la materia” (ENGELS, 1961, p. 47); es condición *sine qua non* de la existencia y funcionamiento mismo de las cosas. Bajo esa perspectiva, el *movimiento* es un aspecto esencial de la materia – realidad objetiva existente – cuyo elemento consustancial es el *cambio*. Es este uno de los elementos fundamentales de nuestra apuesta epistemológica, gnoseológica y ontológica – enmarcada en una perspectiva histórico-cultural de la educación matemática – y que ampliamos a lo largo del presente artículo. En esa línea abordamos, principalmente, dos formas del *movimiento*: el *movimiento* mecánico y el *movimiento* del *pensamiento*. Este último como esencia del desarrollo del *pensamiento* mismo.

Comprendemos el desarrollo del *pensamiento* del ser humano como un proceso histórico-cultural derivado de su *actividad*. Nos referimos a la *actividad* en el sentido de la *Teoría de la Actividad* (LEONTIEV, 1984). Esto es, la *actividad* entendida como un proceso de humanización, a través del cual el sujeto identifica las necesidades que surgen de su relación con su entorno. De esta manera, para satisfacer sus necesidades, el ser humano transforma el entorno y, en un acto de superación de la inmediatez de su interacción, se transforma a sí mismo por medio de la *actividad*, la cual es realizada en colectivo con aquellos con quienes se constituye como un ser social.

¹ Presentamos algunos términos en letra cursiva para resaltar la importancia que ellos cobran, para nosotros, conceptualmente a lo largo del artículo.

La *actividad* considerada en la escuela por autores como Moura (2001, 2016) es una resignificación de la *Teoría de la Actividad* en prácticas sociales como la educación y, específicamente, en la educación matemática. Como resultado de esta resignificación, este autor propone las *Actividades Orientadoras de Enseñanza (AOE)* para la constitución de la *actividad* de enseñanza en dialéctica con la *actividad* de aprendizaje en la clase de matemáticas.

En la literatura se reporta que la enseñanza de conceptos del *cálculo* en la educación escolar media², desde el formalismo propio del *análisis matemático*, dificulta su aprendizaje por parte de los estudiantes (CANTORAL, 1995; BLÁZQUEZ *et al.*, 2006; MOLFINO; BUENDÍA, 2010; QUINTERO; JARAMILLO, 2013; QUINTERO; JARAMILLO, 2015; QUINTERO, 2018; QUINTERO; JARAMILLO, 2020, entre otros). Así, identificamos que enseñar el *cálculo* escolar de esa manera dificulta, de un lado, la apropiación de la esencia de los objetos que le son propios, y, de otro, el desarrollo del pensamiento de los estudiantes. Por ello, consideramos que la enseñanza de conceptos del *cálculo* debe discutirse desde otras apuestas dirigidas hacia una enseñanza entendida como *actividad*, de manera tal que genere en los estudiantes la necesidad del aprendizaje y que fomente el desarrollo de su *pensamiento*.

De acuerdo con lo anteriormente expuesto, el propósito de este artículo es analizar una manera en la que tres estudiantes de educación escolar media pueden alcanzar otro *nivel* en el desarrollo de su *pensamiento*, al abordar el concepto de *movimiento* en un curso de *cálculo*.

Además de la introducción, el presente artículo está organizado en tres secciones. En la primera sección, presentamos aspectos generales de la metodología de investigación de donde surgió este artículo. Una investigación concebida en un paradigma cualitativo (DENZIN; LINCOLN, 2012), bajo un enfoque crítico-dialéctico (SÁNCHEZ, 1998), realizada en una institución educativa de carácter oficial de la ciudad de Medellín (Colombia). Presentamos también, en esta sección, las *Actividades Orientadoras de Enseñanza (AOE)* como estrategia teórico-metodológica del trabajo en el aula, en el marco de la *Teoría de la Actividad*.

En la segunda sección, presentamos el análisis de algunos resultados de la investigación en diálogo con algunos elementos teóricos. Así, presentamos el concepto de *movimiento* desde el materialismo dialéctico (ENGELS, 1961; KOPNIN, 1978); y, a partir de los datos, mostramos que el *movimiento* se tornó elemento consustancial al desarrollo del *pensamiento* de las estudiantes protagonistas de la investigación. En la tercera sección concluimos que el *nivel* de desarrollo del *pensamiento* alcanzado por las estudiantes protagonistas de la investigación se

² El sistema educativo colombiano está conformado por: la educación inicial, la educación preescolar, la educación básica (primaria cinco grados y secundaria cuatro grados), la educación media (dos grados y culmina con el título de bachiller), y la educación superior (MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL, 2019).

produjo acorde con el proceso histórico-cultural del desarrollo del *pensamiento* del ser humano, en general: a través de la *actividad* – práctica y mental. Un *nivel* en el que las estudiantes profundizaron en el estudio de los objetos abordados. En esa línea, comprendimos que la *actividad* en la que las estudiantes se sumergieron – a través de las *AOE* realizadas – permitió el *movimiento* particular del *pensamiento* de cada una de ellas, en el proceso de su aproximación consciente a algunos objetos del *cálculo* escolar cuya esencia es el *movimiento* mismo.

2 Sobre la Metodología

El presente artículo es derivado de una investigación doctoral intitulada *Desarrollo del pensamiento teórico de estudiantes del grado undécimo en un proceso de objetivación del concepto de límite de una función* (QUINTERO, 2018³). La investigación fue concebida en un paradigma cualitativo (DENZIN; LINCOLN, 2012), bajo un enfoque crítico-dialéctico (SÁNCHEZ, 1998). A la luz de este enfoque, nos basamos en el concepto de dialéctica asumido por Kopnin (1978); esto es, la dialéctica como un método de conocimiento de la esencia de los fenómenos de la realidad – naturales y sociales – que están en permanente interrelación, *movimiento y cambio*.

Para la producción conjunta de registros y datos de la investigación planeamos ocho *AOE* (MOURA, 2001, 2016). Estas *AOE* fueron desarrolladas por un grupo de estudiantes de grado undécimo (45 estudiantes mujeres), de un curso de *cálculo*, de una institución de carácter oficial de la ciudad de Medellín (Colombia). Para el análisis de la investigación consideramos las *actividades* realizadas por tres estudiantes, Dana, Ana y Eliza⁴. Hicimos un análisis a partir de una triangulación entre los datos, nuestra mirada como investigadores y algunos referentes teóricos propios de la perspectiva histórico-cultural de la educación matemática.

Las *AOE* propuestas por Moura (2001, 2016) se fundamentan en la *Teoría de la Actividad* (LEONTIEV, 1984). La *actividad* es entendida, aquí, como un proceso de humanización a través del cual el sujeto identifica las necesidades que surgen de su relación con el entorno. La *actividad* contiene aspectos como: una necesidad, un motivo, unas acciones y unas operaciones. La necesidad surge desde y en la cultura y, a su vez, genera un motivo. Las operaciones concretizan las acciones y posibilitan alcanzar el objetivo. En las *AOE* tanto el maestro como el estudiante son sujetos de la *actividad* misma, pero con necesidades y, por ende,

³ Esta investigación tuvo el apoyo financiero de la *Agencia de Educación Superior de Medellín-Sapiencia* (Medellín, Colombia).

⁴ Empleamos seudónimos para nombrar a las estudiantes.

motivos y objetivos diferentes. Así, mientras el maestro se sumerge en *actividad* de enseñanza, el estudiante se sumerge en *actividad* de aprendizaje.

En el artículo presente nos referimos, específicamente, a dos *AOE* realizadas. Como parte de la organización de cada una de las *AOE*, sugerimos a las estudiantes del curso que conformaran equipos de trabajo, en línea con nuestra apuesta epistemológica, gnoseológica y ontológica sobre el aprendizaje. Es decir, el aprendizaje entendido como un proceso social en el que se da un “encuentro consciente” (RADFORD, 2013, p. 39) entre el individuo y el objeto cultural a partir de su interacción con el *otro*. Un *otro* concebido como aquel que *no soy yo* (BAJTÍN, 2004, 2009); un *yo* que, en términos bajtinianos, no puede concebirse sino con la presencia activa del *otro*, pues su esencia es completamente social. Es decir, un *yo* que se constituye a partir de las diferentes voces de los *otros*; *otros* que, de alguna manera, le posibilitan a ese *yo* aprender.

Cada una de las *AOE* constó de dos momentos. El primer momento fue de carácter experimental; en él tuvimos la intencionalidad que las estudiantes reflexionaran sobre un objeto en forma concreto-sensorial, como una fuente de conocimiento, para posibilitar el *movimiento* de su *pensamiento*. Nos referimos a lo concreto-sensorial (o sensorial-concreto) en el sentido del planteamiento de Kopnin (1978); esto es, como uno de los momentos del desarrollo del *pensamiento* en el cual el sujeto tiene un encuentro directo con el objeto. Un encuentro sensorial cuyo resultado inmediato es no racional, pero, se transforma en el fundamento para el proceso del conocimiento. Lo sensorial y lo racional son solo dos momentos que están concatenados durante todo el proceso de desarrollo del *pensamiento*. El segundo momento constó de las respuestas que las estudiantes dieron a las preguntas planteadas, por escrito, en sus respectivos grupos de trabajo para socializarlas, después, en el aula, ante toda la clase.

3 El *Movimiento* como Elemento Consustancial al Desarrollo del *Pensamiento*

Como lo expresamos en la introducción, comprendemos el *movimiento* – desde la perspectiva histórico-cultural y, particularmente, desde el materialismo dialéctico – como un aspecto esencial de la materia cuyo elemento consustancial es el *cambio*; es impensable el *movimiento* sin el *cambio* (y viceversa). En ese mismo sentido, comprendemos el *movimiento* como el *cambio* de estado de la materia – realidad objetiva existente.

Respecto al *movimiento*, Engels (1961, p. 47) afirma que:

El movimiento, en el sentido más general de la palabra, concebido como una modalidad o un atributo de la materia, abarca todos y cada uno de los cambios y

procesos que se operan en el universo, desde el simple desplazamiento de lugar hasta el *pensamiento*.

Así, todo en nuestro mundo y fuera de él se encuentra en permanente *movimiento* y *cambio*. Todo proceso o fenómeno, bien sea de tamaño macroscópico o microscópico, bien sea de carácter natural o social, se encuentra en permanente *cambio*, en permanente *movimiento*. De esta manera, el *movimiento* y el *cambio* existen en el universo determinando el desarrollo de todas las cosas y, por lo tanto, de nuestro *pensamiento*.

Una de las formas de *movimiento* de la materia es el *movimiento* mecánico; el *cambio* de lugar de los cuerpos; comprendiendo por cuerpos “todas las existencias materiales” (ENGELS, 1961, p. 48). En este artículo, abordamos el *movimiento* mecánico contenido, en las dos AOE aquí presentadas, en dialéctica con el *movimiento* del *pensamiento* de las protagonistas de la investigación.

Así, en el presente artículo tomamos como eje central el *movimiento*, en general – y el *movimiento* mecánico en particular – a partir de la dialéctica materialista, toda vez que ésta, como Teoría de Conocimiento⁵, nos posibilita comprender la concatenación entre el *movimiento* y factores asociados a la naturaleza cambiante del desarrollo del *pensamiento* de las estudiantes sumergidas en *actividad* de aprendizaje.

Bajo esas consideraciones de movimiento, analizamos un segmento de la AOE que denominamos “Determinación de un móvil en un instante dado” (QUINTERO, 2018, p. 51). Esta *actividad* fue propiciada por una situación desencadenadora de aprendizaje cuyo motivo fue determinar la posición exacta de un móvil en un instante dado⁶. Una situación desencadenadora de aprendizaje es una situación planteada por el maestro – en el marco de la AOE – con el propósito de motivar acciones en el estudiante que le posibiliten solucionar el problema involucrado en dicha situación. Además, con el propósito de que – en ese proceso de búsqueda de la solución al problema – el estudiante se aproxime al concepto contenido en la situación desencadenadora de aprendizaje, y a un modo general, de aproximarse a tal concepto (MOURA, 2001, 2016).

En la AOE en mención, tuvimos como objetivo posibilitar a las estudiantes la concatenación entre el *movimiento* – mecánico – y el *cambio*. Durante el desarrollo de la parte experimental de dicha AOE (ver Figura 1), le preguntamos a cada uno de los subgrupos

⁵ Nos apoyamos en Kopylov (1978), cuando él plantea que la dialéctica como Teoría del Conocimiento es un método del *pensamiento* científico que posibilita conocer la esencia del fenómeno mediante el análisis de las leyes objetivas de la realidad y su reproducción en forma de concepto.

⁶ Este fue un problema con el que se enfrentaron los científicos del siglo XVII ante una tradición científica que consideraba el *movimiento* mecánico como una “sucesión de estados particulares de un móvil” (CARAÇA, 1951, p. 215).

conformados sobre el fenómeno físico principal que identificaban en el sistema burbuja-manguera construido por ellas.



Figura 1 - Determinación de la posición de un móvil en un instante dado. Las estudiantes hallando la posición de la burbuja en su recorrido por la manguera (11 de julio de 2017)
Fuente: archivo de los autores (2018)

En las siguientes líneas presentamos un fragmento del diálogo con los dos subgrupos de los que hicieron parte las estudiantes Dana, Ana y Eliza, veamos.

Maestra: ¿Cuál, piensas tú, que es el fenómeno físico principal que podemos observar?

Dana: La distancia.

Ana: La velocidad de la burbuja.

Maestra: ¿Por qué? — Dirigiéndose a ambas estudiantes.

Dana: Porque es la distancia que está recorriendo la burbuja. Eh...el tiempo también, pues el tiempo siempre nos acompaña, el tiempo no se detiene.

Ana: Sí, también el tiempo, entonces es la velocidad. Tiene tiempo y distancia.

Dana: Sí, la velocidad.

Maestra: Y, ¿cómo la están analizando?, ¿qué están teniendo en cuenta para saber con qué velocidad va la burbuja?

Ana: Uhm...no sé. Ah, no, eso no es. Es el movimiento.

Maestra: ¿Por qué?

Ana: Porque es lo que estamos viendo. La burbujita se desplaza por la manguera.

Dana: Ah, sí, sí. Pero también tiene velocidad, ¿cierto? —dirigiéndose a la maestra.

Maestra: ¿Qué dices Ana?

Ana: Obvio. Pero lo principal, lo que vemos, es que la burbuja se está moviendo.

Maestra: Listo. Continúen, por favor. En un momento vuelvo (Diálogo entre la maestra, Dana y Ana, 2017)

El diálogo en el subgrupo del que Eliza hizo parte fue:

Maestra: ¿Cuál, piensas tú, que es el fenómeno físico principal que podemos observar?

Eliza: El movimiento de la burbuja.

Maestra: ¿Por qué?

Eliza: Porque es el cambio que la burbuja hace en su recorrido. En ningún momento, la burbuja para.

Maestra: Cuando dices cambio de la burbuja, ¿a qué te refieres?

Eliza: Pues a que la burbuja no está siempre en la misma parte, se mueve hasta que llega a la parte final de la manguera (Diálogo entre la maestra, y Eliza, 2017)

Mediante la pregunta formulada por la maestra – ¿Cuál, piensas tú, que es el fenómeno físico principal que podemos observar? – las estudiantes se enfrentaron al objeto de saber de una manera activa, de tal forma que reflexionaron sobre un fenómeno – el *movimiento* rectilíneo – que no habían descubierto. En ese momento, la voz de la maestra adquirió un carácter mediador entre las estudiantes – sujetos de la *actividad* – y el fenómeno – objeto de la *actividad*. Ante la necesidad de responder la pregunta, el objeto se transformó en un objeto de conocimiento que, en consecuencia, introdujo a las estudiantes en una *actividad mental*. Es decir, en las estudiantes hubo una movilización de una de las funciones psíquicas superiores: el *pensamiento*.

Luria (1984, p. 305) afirma que el *pensamiento* es “una forma compleja de actividad cognitiva” que es orientada a un fin y que se adapta a las diversas situaciones cambiantes del entorno social del sujeto. De tal manera, el *pensamiento* es un proceso intelectual selectivo que surge cuando el sujeto tiene un motivo generado por la necesidad de hallar solución a determinada situación resultante de la interacción activa con la realidad objetiva. En palabras de Kopnin (1978, p. 121), el *pensamiento* es “el reflejo de la realidad [...] es un modo de conocimiento de la realidad objetiva, por el hombre”. Dicho reflejo, de acuerdo con el mismo autor, es uno de los resultados de la *actividad* del ser humano que posibilita comprender las propiedades de cierto objeto o fenómeno en *movimiento*.

El *pensamiento* es, además, una *actividad* mental que resulta de la *actividad* práctica – en la experiencia sensorial inmediata – del ser humano. Es por esta razón que el producto principal del *pensamiento* es la formación de ideas, las cuales se producen acordes a la particularidad del desarrollo del *pensamiento*. Esto es, como lo expresa Kopnin (1978, p. 129), “el movimiento del *pensamiento* consiste en el desarrollo de la imagen cognitiva, en el movimiento de lo desconocido a lo conocido”.

En los diálogos anteriores se evidencia que Dana y Ana crearon una idea individual del objeto de estudio a partir de la *actividad* práctica grupal; ellas formaron “ideas matemáticas” (VERGEL, 2014, p.10) motivadas por la necesidad de responder la pregunta formulada por la maestra. Así, en su interacción con el objeto y permeada por las voces de su maestra y de sus compañeras de grupo, cada estudiante formó una imagen cognitiva del objeto material. Ante la pregunta sobre el fenómeno principal observado, la respuesta de Dana – *la distancia* – posiblemente se debió a un resultado surgido de la contemplación directa, derivada de una de las operaciones que las estudiantes debían realizar según la guía escrita.

Sin embargo, ante las respuestas dadas por Ana y una nueva solicitud de su maestra de una argumentación, Dana hizo un *movimiento* mental entre el objeto contemplado y su

percepción sobre él, generando una nueva reflexión que la llevó a expresar: *Ah, sí, sí*. Es decir, Dana creó una nueva imagen cognitiva a partir de las voces de su maestra y de su compañera de grupo. Así mismo, cuando Dana expresó, *pero también tiene velocidad, ¿cierto?*, ella relacionó la nueva imagen creada con un concepto perteneciente al campo de la física – la velocidad de un cuerpo en trayectoria rectilínea – construido en un momento histórico anterior a su reflexión.

En el segundo momento de la AOE, en las respuestas que las estudiantes dieron por escrito a las preguntas planteadas en sus respectivos grupos de trabajo, Ana evidenció el movimiento de su pensamiento entre un antes y un después de abordar el objeto de estudio en un momento colectivo. Nuestra afirmación se corrobora a través de la Figura 2, que exponemos a continuación.

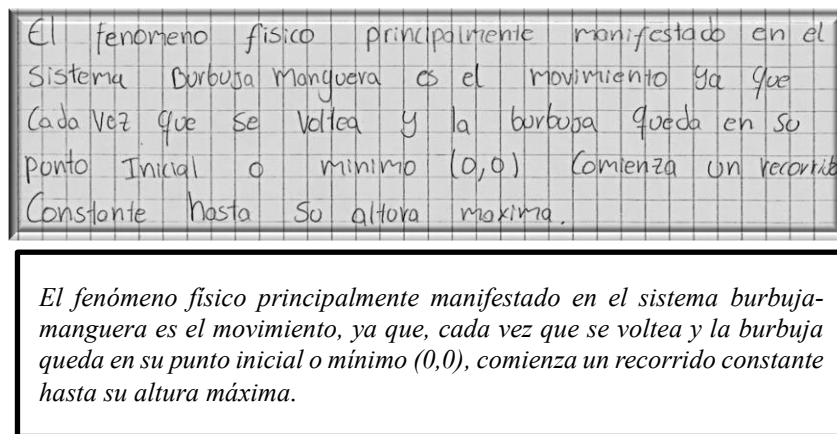


Figura 2 - Respuesta de Ana (18 de julio de 2017)

Fuente: Quintero (2018, p. 76)

La actividad en la que Ana se sumergió le propició el movimiento de su pensamiento de un momento perceptivo a otro momento, producto de la reflexión sobre ciertos nexos entre algunos aspectos del objeto. Así, por ejemplo, en el primer momento de la AOE, Ana expresó: *es el movimiento [...] Porque es lo que estamos viendo; la burbujita se desplaza por la manguera*; ella enunció el producto de su percepción por medio de la cual identificó un solo aspecto del fenómeno: el desplazamiento. Sin embargo, en el segundo momento de la AOE en el que no existía contacto directo con el objeto, la respuesta de Ana fue: *es el movimiento ya que cada vez que se voltea y la burbuja queda en su punto inicial o mínimo (0,0), comienza un recorrido constante hasta su altura máxima*.

En esta respuesta Ana confirmó lo percibido inicialmente, pero, por medio de una observación más profunda, motivada ya no por su interacción directa con el fenómeno, sino como producto de su reflexión. En su argumentación, Ana comenzó a hacer algunas conexiones de ciertos aspectos del fenómeno al asociar el movimiento con el cambio de posición, su punto

inicial o mínimo (0,0) [...] hasta su altura máxima, y al expresar ese *cambio* mediante el uso de un lenguaje que, nuevamente, denotó su formación de ideas matemáticas.

De forma similar, Eliza identificó el *movimiento* como fenómeno principal manifiesto en la *actividad*, al parecer, con mayor claridad que Dana y Ana, pues respondió, *el movimiento de la burbuja*, justo después de la formulación de la pregunta. Al igual que Ana, Eliza relacionó el *cambio* como condición de la existencia del *movimiento*; reflexión que se evidenció cuando explicó el sentido que cobró para ella el *cambio* en el desplazamiento de la burbuja.

En sus palabras: *la burbuja no está siempre en la misma parte, se mueve hasta que llega a la parte final de la manguera*. Así, Dana, Ana y Eliza manifestaron sus formas individuales de *actividad* mental, a partir del desarrollo de una *actividad* práctica grupal en torno a un concepto que ha sido elaborado en el devenir histórico – el *movimiento* rectilíneo –; un concepto que se transformó en objeto de estudio. De esta manera, el *movimiento*, aquí, cobró un doble significado: como objeto de estudio (*movimiento* mecánico) y como dinamizador del desarrollo del *pensamiento*.

La segunda AOE que presentamos en este artículo es la nombrada *¿Cómo ha sido el desarrollo de tu estatura?* (QUINTERO, 2018, p. 55). En ella el *movimiento* está presente, tanto en uno de los aspectos del desarrollo físico de las estudiantes, como en su *actividad* mental durante la realización de la AOE propuesta. *Variable* y *función de variable entera*⁷ fueron los objetos matemáticos a los que pretendimos aproximar a las estudiantes mediante esta AOE – de una manera más profunda –, buscando posibilitar el desarrollo de su *pensamiento* y, a su vez, brindarles herramientas teóricas para el posterior estudio de objetos matemáticos de mayor complejidad.

Así, para la AOE en mención trazamos como objetivo posibilitar a las estudiantes una forma de aproximarse a un fenómeno natural particular – el desarrollo de sus estaturas – desde un saber matemático depositado en la cultura – *variable* y *función de variable entera*. Por lo tanto, dispusimos las condiciones materiales que generaran, en las estudiantes, un *movimiento* entre el significado social e históricamente construido de dicho saber, y un sentido hallado por cada una de ellas desde su experiencia vital y personal.

En esta línea, tuvimos la intencionalidad de generar en las estudiantes la necesidad de problematizar, a la luz de conceptos del *cálculo* – como *variable* y *función de variable entera* – un aspecto de sus vidas y dotarlo de significado y sentido. Planteamos las acciones

⁷ Consideramos importante aclarar que en el grado décimo y antes de iniciar la investigación en el grado undécimo, las estudiantes abordaron los objetos *variable* y *función*. Este hecho facilitó el proceso de apropiación de los objetos matemáticos aquí tratados y, a su vez, el desarrollo del *pensamiento* de cada una de ellas.

correspondientes, en el sentido de D'Ambrosio (2005) y Jaramillo (2011), para comprender las matemáticas como un objeto que, en realidad, no está aislado de las prácticas sociales, prácticas en las que nos constituimos como sujetos.

Dentro de las acciones que planteamos, con miras a alcanzar el objetivo de la AOE, estuvo la de realizar las curvas del crecimiento físico de cada estudiante y, a partir de estas, explicar el desarrollo de sus estaturas a lo largo de sus vidas. Tales acciones hicieron parte de una situación desencadenadora, mediante la cual cada estudiante se encontró ante una *actividad* perteneciente al contexto de sus vidas y preexistente a su nacimiento, el control del crecimiento y desarrollo de niños y niñas como programa de las entidades de salud de la ciudad que ellas habitan. Dicha *actividad*, adaptada a la vida escolar como *actividad* de enseñanza debía, de alguna manera, plasmar un aspecto de la vida de cada estudiante en la que se entretrejía su rol como estudiante, como hija y como ser humano en crecimiento y, por lo tanto, en *movimiento*.

Previo al encuentro en el aula, en el que trazaron e interpretaron las respectivas curvas de crecimiento, cada estudiante realizó una tabla, en compañía de sus familiares, en la que registró la medida de sus estaturas desde el momento de nacimiento hasta el momento de la realización de la AOE. A continuación, y a modo de ejemplo, presentamos, en la Figura 3, la tabla realizada por Ana.

| Desarrollo de mi Estatura | | Desarrollo de mi Estatura | |
|---------------------------|-----------------|----------------------------------|-----------------|
| Edad (Años) | Estatura (m) | Edad (Años) | Estatura (m) |
| 0 | 0,47 | 0 | 0,47 |
| 1 | 0,73 | 1 | 0,73 |
| 2 | 0,79 | 2 | 0,79 |
| 3 | 0,84 | 3 | 0,84 |
| 4 | 0,90 | 4 | 0,90 |
| 5 | 0,98 | 5 | 0,98 |
| 6 | 1,04 | 6 | 1,04 |
| 7 | 1,14 | 7 | 1,14 |
| 8 | 1,21 | 8 | 1,21 |
| 9 | 1,27 | 9 | 1,27 |
| 10 | 1,39 | 10 | 1,39 |
| 11 | 1,42 | 11 | 1,42 |
| 12 | 1,50 | 12 | 1,50 |
| 13 | 1,57 | 13 | 1,57 |
| 14 | 1,68 | 14 | 1,68 |
| 15 | 1,72 | 15 | 1,72 |
| 16 | 1,74 | 16 | 1,74 |
| 17 | 1,76 | 17 | 1,76 |
| Estatura madre: 1,62 m | | Estatura madre: 1,62m | |
| Estatura padre: 1,80 m | | Estatura padre: 1,80m | |

Figura 3 - Tabla con los registros de la estatura de Ana desde su nacimiento hasta su edad actual (11 de agosto de 2017)

Fuente: Quintero (2018, p. 96)

La *AOE* generó motivaciones desde sus experiencias vitales y comenzó a cobrar sentido para las estudiantes al reconocerse, de forma inconsciente, como seres históricos; cada una con una historia determinada por condiciones biológicas, familiares, históricas y culturales.

Los sujetos se encuentran, ineluctablemente, inmersos en contextos histórico-culturales en permanente *cambio*. En dichos contextos, los sujetos o individuos son vistos como emergentes de una “experiencia historizada” (ALCOFF, 1988, p. 431). En esa línea, no concebimos al individuo como aquel que está movido por cierta autorregulación cuyos significados emanan de sí mismo (posición teórica de individuo proveniente de la filosofía de la Ilustración). Nuestra posición se apoya en la idea según la cual siempre hay en el individuo – en cada una de las estudiantes, en este caso – una historicidad en sus formas de pensar y de actuar.

En los siguientes extractos, y en las Figuras 4, 5 y 6 presentamos las operaciones que Dana, Ana y Eliza realizaron, considerando algunas de las acciones planteadas en la *AOE* en mención.

1. Realiza la curva de tu crecimiento.
2. Explica el desarrollo de tu estatura hasta el presente.

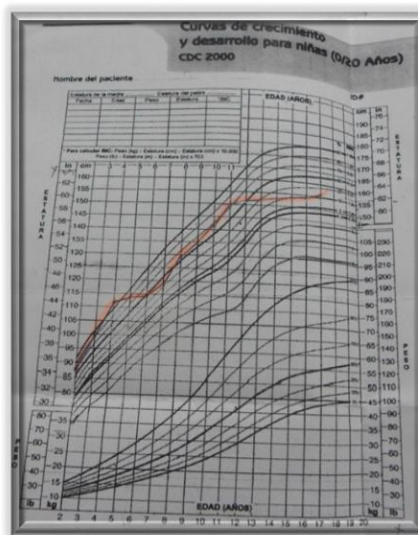


Figura 4 - Curva de crecimiento de Dana (11 de agosto de 2017)
Fuente: Quintero (2018, p. 98)

Extracto 1. En la gráfica podemos observar que siempre hay cambio. También que de los 0 a los 10 años tuve un crecimiento veloz, por decirlo de alguna manera, y de los 11 años a la edad actual (17 años) mi crecimiento fue casi nada. O sea, de 0 a 4 años crecí de manera veloz, de 4 a 6 años fue muy muy poco el crecimiento, de 6 a 8 tuve crecimiento rápido, de 8 a 11 seguí con un crecimiento casi constante y de 11 a los 17 años que tengo, no he crecido casi (Dana, 11 de agosto de 2017).

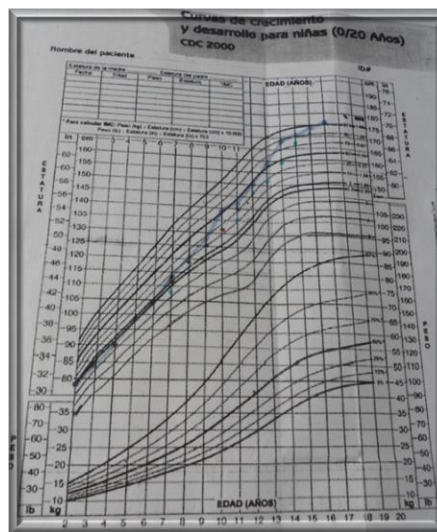


Figura 5 - Curva de crecimiento de Ana (11 de agosto de 2017)
Fuente: Quintero (2018, p. 99)

Extracto 2. Desarrollo de mi estatura: En el primer año de vida el crecimiento fue el más notable y de los 2 a los 10 años el crecimiento fue casi constante y poco [refiriéndose a la variación de la curva]. En el intervalo de 10 a 11 años fue poco comparado con los años anteriores. De 11 a 14 años se vuelve veloz y de 14 a 17 años el crecimiento fue disminuyendo (Ana, 11 de agosto de 2017).

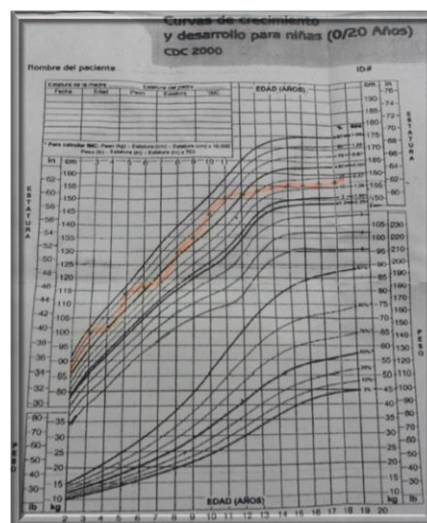


Figura 6 - Curva de crecimiento de Eliza (11 de agosto de 2017)
Fuente: Quintero (2018, p. 97)

Extracto 3. El desarrollo de mi estatura tiene un índice de crecimiento considerable de 0 a 13 años, el siguiente año siguió aumentando, pero muy poco (un centímetro aproximadamente). A los 15, 16 y 17 fue casi constante, es decir, mantuvo casi el mismo valor (Eliza, 11 de agosto de 2017).

A partir de un constructo teórico existente en la cultura – la curva de crecimiento⁸ –, Dana, Ana y Eliza se situaron en cada una de sus particularidades, como seres cambiantes, desde el momento mismo de llegar al mundo hasta el momento del desarrollo de la AOE. Cada una de ellas identificó el *cambio* en las curvas resultantes del desarrollo de sus estaturas. Sus observaciones, a partir de expresiones como *poco*, *muy poco*, *veloz*, *casi constante*, entre otras, denotaron la sola descripción del objeto y, por lo tanto, una aproximación cualitativa a la *variable* y al *cambio* presente en el fenómeno natural estudiado. Sin embargo, esa primera aproximación al objeto no impidió que las estudiantes se interesaran en su estudio ni que comenzaran a visibilizar un concepto teórico – la curva de crecimiento – y a hacerlo parte de una construcción mental en sus *consciencias*.

En esa línea, Davíдов (1988, p. 45) plantea que la *consciencia* es el *nivel* superior de la psiquis humana, siendo, por lo tanto,

[...] la reproducción por el individuo de la imagen de su actividad tendiente a una finalidad y de la representación ideal en ella de las posiciones de las otras personas. La actividad consciente del hombre está mediatizada por el colectivo; durante su realización el hombre toma en cuenta las posiciones de los otros miembros del colectivo.

Al respecto, Marx y Engels (1974, p. 31) plantean que cuando se supera la inmediatez ante el entorno físico y biológico, la *consciencia* – que es “de antemano un producto social” – alcanza un *nivel* de creación, superando, así, el plano de la *consciencia* práctica de la existencia humana. De esta forma, la *consciencia* – como *nivel* superior de la psiquis – le posibilita al sujeto formar imágenes del mundo material y comprender su entorno y su realidad a través de las comprensiones de los otros sujetos con quienes construye dicha realidad, con quienes se comunica de forma verbal. Es claro, entonces, que a través de la *consciencia* los individuos reflexionan sobre el mundo y se orientan en él. La *consciencia* se encuentra directamente relacionada con la *actividad* del individuo; al decir de Leontiev (1984, p. 96) “la actividad del individuo constituye la substancia de su *consciencia*”.

Dana, Ana y Eliza, por medio de la *actividad* en que las involucramos, elevaron su psiquis a otro *nivel*, de manera que lo que para ellas era un fenómeno característico de su niñez y adolescencia – el desarrollo de sus estaturas – se transformó en un objeto matemático a estudiar – representación gráfica de una *función* – como parte de la relación tejida con su maestra y como producto de una construcción histórico-cultural, como todo objeto matemático.

⁸ En las Figuras 4, 5 y 6 la curva de crecimiento de cada estudiante es la coloreada, respectivamente. Las otras curvas, las de color negro, tienen el significado de parámetro para trazar la curva de cada estudiante. Vale aclarar que estas curvas de crecimiento en color negro son preestablecidas por asociaciones nacionales de pediatría, considerando variables como edad, estatura y peso.

Así, las estudiantes se hicieron conscientes tanto de un significado presente en la cultura como del uso de herramientas matemáticas para el estudio de un fragmento de sus vidas, y lo expresaron a través de la palabra escrita como medio de conexión con los demás.

Como parte de la *AOE* a la que nos hemos referido, sugerimos otra acción que dotó a las estudiantes de un nuevo sentido al relacionar una *función* de *variable* entera con la curva de su crecimiento. A continuación, presentamos las respuestas de las protagonistas a la pregunta: ¿Cuáles variables identificas en la curva de tu crecimiento? ¿Piensas que existe una función entre las variables identificadas? Argumenta.

Identifico las variables edad y estatura, ya que obviamente no son las mismas desde que nací hasta ahora. (Dana, 11 de agosto de 2017).

Las variables identificadas en mi crecimiento son la edad y la estatura, pues han cambiado en mis 17 años. (Ana, 11 de agosto de 2017).

Las variables identificadas son (estatura) y (edad) porque estas dos agrupan el conjunto de valores que varían, es decir el fenómeno cambiante (Eliza, 11 de agosto de 2017).

Nuevamente, un concepto teórico cobró un sentido personal para las estudiantes a través de la *actividad*; *actividad* de aprendizaje en este caso. Dana, Ana y Eliza se reconocieron como seres en *movimiento*, a través de la identificación del *cambio* en el aspecto biológico de sus vidas, el cual relacionaron con el concepto de *variable*. Así, por ejemplo, cuando Dana expresó *Identifico las variables edad y estatura, ya que obviamente no son las mismas desde que nací hasta ahora*, el uso del adverbio *obviamente* denota claridad en la esencia del objeto matemático *variable* presente en su proceso de crecimiento. *Variable* es concebida, aquí, como la representación de cualquiera de los elementos del conjunto de valores de un fenómeno mutable. Igualmente, la respuesta dada por Ana, *Las variables identificadas en mi crecimiento son la edad y la estatura, pues han cambiado en mis 17 años*, denota claridad en la esencia cambiante de las *variables*; claridad manifiesta en la conjunción *pues* que emplea para argumentar su respuesta.

Así mismo, la respuesta de Eliza, *las variables identificadas son (estatura) y (edad) porque estas dos agrupan el conjunto de valores que varían, es decir el fenómeno cambiante*, dio cuenta del uso del concepto matemático *variable* en su proceso de argumentación. Pero, a diferencia de Dana y Ana, Eliza no solamente nombró las magnitudes que consideró de carácter variable, sino que, al parecer, destacó su importancia por medio del empleo de paréntesis. A su vez, ella identificó la imbricación existente entre una variable y el *fenómeno cambiante* que representa. Las tres estudiantes, por medio de la *actividad* y concretamente por medio de la acción sugerida, pasaron de la sola descripción inicial del fenómeno observado a la interpretación mediante la conexión entre aspectos de dicho fenómeno con elementos teóricos;

esto es, pasaron de la descripción de la curva de crecimiento de cada una al concepto de *variable*. En esa línea, consideramos que las estudiantes denotaron un *movimiento* mental que les permitió un *cambio de nivel de pensamiento*⁹.

Las respuestas de las tres estudiantes, y especialmente la de Eliza, están alineadas con el planteamiento de Caraça (1951, p. 127) sobre el concepto de *variable*; el cual lo enuncia así:

Sea E un conjunto cualquiera de números —finito o infinito— y como convención, representemos a cualquiera de sus elementos por un símbolo, por ejemplo x . A este símbolo, representativo de cualquiera de sus elementos del conjunto E , lo llamamos *variable* (...). Es el símbolo de la vida colectiva del conjunto, vida que se nutre de la vida individual de cada uno de sus miembros, mas no se reduce a ella.

Así, en la búsqueda de la respuesta a la pregunta orientadora de la *AOE*, las estudiantes realizaron un *movimiento* mental y se hicieron *conscientes* de su esencia cambiante, lejos del estatismo. Ellas tomaron *consciencia* de algunas de las transformaciones fisiológicas que han tenido desde su nacimiento hasta sus dieciséis o diecisiete años, transformaciones humanas en un espacio y en un tiempo que también son cambiantes. Las tres estudiantes alcanzaron un *nivel de pensamiento*, un *nivel* de creación como lo enuncian Marx y Engels (1974), y establecieron relaciones entre un fenómeno natural (sus *cambios* fisiológicos) y un objeto matemático (*variable* entera). Ellas transformaron, en sus *consciencias*, una imagen de su mundo material a una idea matemática.

Consideramos importante explicar, aquí, nuestra apuesta epistemológica sobre el concepto de *función*. Desde la perspectiva histórico-cultural, comprendemos el concepto de *función* en el sentido de Caraça (1951) y de Aleksandrov (1976). Esto es, la *función* como un instrumento matemático cuya esencia es la correspondencia entre variables que poseen una relación de dependencia. Un instrumento matemático construido – socialmente a través de un devenir histórico – a partir de la necesidad imperante de hallar regularidades observables en la manifestación del fenómeno de estudio; un instrumento que posibilita estudiar leyes cuantitativas (CADAVID; QUINTERO; JARAMILLO, 2010; CADAVID; QUINTERO, 2011).

En ese sentido, Caraça (1951, p. 129) define *función* de la siguiente manera:

Sean x y y dos variables representativas de conjuntos de números; se dice que y es función de x y se escribe: $y = f(x)$, si entre las dos variables existe una

⁹ Nos referimos al *nivel de pensamiento* en línea con los planteamientos del materialismo dialéctico y de Rubinstein (1974). Esto es, comprender que, en primer lugar, el desarrollo del pensamiento se da como el desarrollo de todo fenómeno natural o social: un proceso que admite gradaciones – *niveles* – mas no de una forma continua ni lineal. Un proceso donde pueden presentarse retrocesos y saltos, pues, dicho proceso está determinado por el permanente *movimiento* y concatenación de los diferentes aspectos que conforman el fenómeno. En segundo lugar, comprender, como lo enuncia Rubinstein (1974, p. 441), que según “el nivel de desarrollo” que ha alcanzado su entendimiento teórico, el niño y el adolescente van profundizando en la generalización del fenómeno, acorde a la relación recíproca que van identificando entre los diferentes aspectos al interior del objeto estudiado.

correspondencia unívoca en el sentido $x \rightarrow y$. A x se le llama variable independiente y a y , variable dependiente.

En el sentido del concepto de *función* expuesto, planificamos la segunda pregunta de la acción sugerida: ¿Pienzas que existe una *función* entre las variables identificadas? Esta pregunta contenía el concepto de *función* de manera explícita.

Las respuestas expresadas por Dana y Ana fueron:

Pienso que hay una función entre esas variables, ya que existe una correspondencia unívoca en el caso de mi edad, porque a un valor de mi estatura le corresponde un año determinado (Dana, 11 de agosto de 2017).

Yo digo que sí existe una función entre estas variables, puesto que hay correspondencia unívoca entre la variable independiente, que es la edad, y la variable dependiente que es la estatura, (según mi edad era la estatura) (Ana, 11 de agosto de 2017).

La respuesta de Eliza la presentamos en la Figura 7.

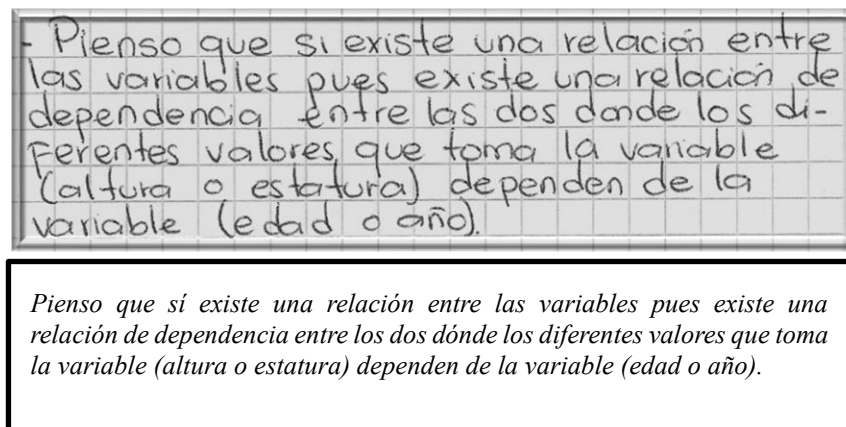


Figura 7 - Respuesta de Eliza sobre la existencia de *función* en su curva de crecimiento (11 de agosto de 2017)
Fuente: Quintero (2018, p. 111)

Las tres estudiantes no sólo relacionaron aspectos de su desarrollo físico con el concepto de *variable*, sino que, además, identificaron un tipo de relación entre las *variables*: una *función*. Mientras que Eliza estableció una relación de dependencia entre las *variables* edad y estatura, Dana argumentó la existencia de una *función* por medio de la correspondencia unívoca entre dichas *variables*. Eliza, al parecer, empleó el término *relación* en la primera parte de la oración en vez de escribir *función*. Nos atrevemos a hacer esta última interpretación porque, en sesiones anteriores a la de la AOE referida, Eliza identificó la *función* como un tipo de relación. Por su parte, Ana hizo un análisis más amplio al argumentar la existencia de la *función*, tanto desde la relación de dependencia entre las *variables* como desde la correspondencia unívoca.

De esta manera, Dana, Ana y Eliza identificaron una variación – cualitativa – de dos aspectos cambiantes en su desarrollo físico: la edad y la estatura. Y, en línea con esta variación, las estudiantes identificaron, especialmente Ana, la dependencia y la correspondencia unívoca entre estas *variables*; elementos esenciales del concepto de *función*.

4 A Modo de Conclusión

Tal como lo hemos planteado a lo largo del artículo, desde nuestra postura epistemológica, consideramos el *movimiento – en concatenación con el cambio –* como elemento consustancial a los procesos existentes en el universo, ya sean de naturaleza física, biológica, mental o social. Una de las formas del *movimiento* es el mecánico. Este tipo de *movimiento* fue identificado por las estudiantes en las dos AOE aquí presentadas y analizadas.

Un primer ejemplo de lo anteriormente expresado es en la AOE nombrada *Determinación de la posición de un cuerpo en un instante dado*. En ella, ante la pregunta sobre el fenómeno físico principal identificado por las estudiantes en el sistema burbuja-manguera, Eliza y Ana respondieron:

Es el movimiento...Porque es lo que estamos viendo. La burbujita se desplaza por la manguera (Ana, 18 de julio de 2017).

El movimiento de la burbuja...Porque es el cambio que la burbuja hace en su recorrido. En ningún momento, la burbuja para (Eliza, 18 de julio de 2017).

Ambas estudiantes identificaron el *movimiento* mecánico como fenómeno principal manifiesto en la AOE en mención, lo que dio cuenta del reflejo del objeto en sus *consciencias*, como producto de su *actividad* mental en dialéctica con la *actividad* práctica.

El segundo ejemplo en el que las estudiantes identificaron el *movimiento* fue en la AOE, *¿Cómo ha sido el desarrollo de tu estatura?* En ella, el *movimiento* estuvo presente, tanto en uno de los aspectos cambiantes del desarrollo físico de las estudiantes como en su *actividad* mental durante la realización de la AOE. Cada una de las estudiantes, desde su *consciencia*, identificó el *cambio* en las curvas resultantes del desarrollo de sus estaturas.

El hecho de analizar cómo se habían desarrollado sus estaturas, les permitió a las estudiantes dar un sentido personal a un significado construido socialmente: una representación gráfica de un fenómeno en un determinado contexto. Además, este hecho les permitió a las estudiantes, un *movimiento* en su *pensamiento* tal que trascendieron de la sola descripción del fenómeno observado en un *nivel* intuitivo a otro *nivel* por medio del cual establecieron conexiones entre lo inicialmente contemplado, con objetos culturales preexistentes, tales como *variable* y *función de variable* entera.

Desde el materialismo histórico-dialéctico, el desarrollo del *pensamiento* no puede abordarse en términos absolutistas; él admite gradaciones. Gradaciones (no lineales) que obedecen al mismo carácter dialéctico del desarrollo de todo fenómeno (natural o social). En ese sentido, y basándonos en los dos ejemplos expuestos en los párrafos anteriores, nos es posible afirmar que cada una de las estudiantes alcanzó un *nivel* de desarrollo de su *pensamiento*

que les permitió profundizar en el estudio de los objetos culturales abordados. Un *nivel* – inacabado – determinado por las condiciones individuales de cada estudiante (en una dialéctica yo/otro) y, por lo tanto, por sus formas particulares de aproximarse a los objetos estudiados.

Así, comprendemos que el *nivel* de desarrollo del *pensamiento* alcanzado por las estudiantes protagonistas de la investigación se produjo acorde con el proceso histórico-cultural del desarrollo del *pensamiento* del ser humano, en general: a través de la *actividad* – práctica y mental. Un *nivel* en el que las estudiantes profundizaron en el estudio de los objetos abordados. En esa línea, comprendemos que la *actividad* en la que las estudiantes se sumergieron – a través de las *AOE* realizadas – permitió el *movimiento* particular del *pensamiento* de cada una ellas, en el proceso de su aproximación consciente a algunos objetos del *cálculo* escolar cuya esencia es el *movimiento* mismo.

Referencias

ALCOFF, L. Cultural feminism versus post-structuralism: The identity crisis in feminist theory. **Signs**, Chicago, 13, n. 3, p. 405-436, 1988.

ALEKSANDROV, A. D. Visión General de la Matemática. *En*: ALEKSANDROV, A. D.; DELONE, B. N.; KOLMOGOROV, A. N.; LAURENTIEV, M. A.; NIKOLSKI, S. M.; PETROVSKI I. G. **La Matemática**: su contenido, métodos y significado. Madrid: Alianza Editorial, 1976. p. 17-79.

BLÁZQUEZ, S.; ORTEGA, T.; GATICA, S.; BENEGAS, J. Una conceptualización de límite para el aprendizaje inicial de análisis matemático en la universidad. **Relime**, Ciudad de México, v. 9, n. 2, p. 189-209, 2006. Disponible en: http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1665-24362006000200002. Acceso: 13 jul. 2013.

BAJTÍN, M. **Problemas de la poética de Dostoievski**. Madrid: Fondo de Cultura Económica, 2004.

BAJTÍN, M. **Estética de la creación verbal**. Ciudad de México: Plúmilux, 2009.

CADAVID, A., QUINTERO, C.; JARAMILLO, D. **Construction of the Concept of Function in Students from Ninth Degree: a Sociocultural Approach**. Proceedings of the 34th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol 4, p. 344, Brazil: PME, 2010.

CADAVID, A. y QUINTERO, C. **Función: Proceso de Objetivación y Subjetivación en Clases de Matemáticas**. 2011, 141 p. Trabajo de Investigación (Maestría en Educación). Facultad de Educación, Universidad de Antioquia, Medellín, 2011.

CANTORAL, R. Hacia una didáctica del Cálculo basada en la Cognición. *En*: FARFÁN, R. M. (ed.). **Antologías-I Publicaciones Centroamericanas**. Ciudad de México: AES-DME, Cinvestav, 1995. p. 1-24. Disponible en: https://www.researchgate.net/publication/263010052_Hacia_una_didactica_del_calculo_basada_en_la_cognicion. Acceso: 15 jul. 2013.

CARAÇA, B. J. **Conceitos Fundamentais da Matemática**. Lisboa: Livraria Sá Da Costa, 1951.

D'AMBROSIO, U. Sociedade, cultura, matemática e seu ensino. **Educação e Pesquisa**, São Paulo, v. 31, n. 1, p. 99-120, 2005.

DAVÍDOV, V. **La enseñanza escolar y el desarrollo psíquico**: Investigación psicológica teórica y experimental. Moscú: Progreso, 1988.

DENZIN, N.; LINCOLN, Y. **Manual de Investigación Cualitativa**. Barcelona: Gedisa, 2012.

ENGELS, F. **Dialéctica de la Naturaleza**. Ciudad de México: Grijalbo S. A Ediciones, 1961.

JARAMILLO, D. La educación matemática en una perspectiva sociocultural: tensiones, utopías, futuros posibles. **Educación y Pedagogía**, Medellín, v. 23, n 59, p. 13-36. 2011.

KOPNIN, P. V. **A Dialética como Lógica e Teoria do Conhecimento**. Rio de Janeiro: Civilização Brasileira, 1978.

LEONTIEV, A. N. **Actividad, Conciencia y Personalidad**. Ciudad de México: Editorial Cartago, 1984.

LURIA, A. R. **El Cerebro en Acción**. Barcelona: Ediciones Martínez Roca S.A., 1984.

MARX, K.; ENGELS, F. **La Ideología Alemana**. Barcelona: Grijalbo S. A Ediciones, 1974.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL (MEN). **Sistema educativo colombiano**. 2019. Disponible en: <https://www.mineducacion.gov.co/portal/Preescolar-basica-y-media/Sistema-de-educacion-basica-y-media/233839:Sistema-educativo-colombiano>. Acceso: 15 ago. 2019.

MOLFINO, V.; BUENDÍA, G. El límite de funciones en la escuela: un análisis de su institucionalización. **Revista electrón. Investigación, educación, ciencia**, Buenos Aires, v. 5, n. 1, p. 27-41, 2010. Disponible en: http://www.scielo.org.ar/scielo.php?pid=S1850-66662010000100003&script=sci_arttext. Acceso: 13 jul. 2013.

MOURA, M. O. A atividade de Ensino como Ação Formadora. *In*: CASTRO, A. D; CARVALHO, A. M. P. (org.). **Ensinar a ensinar**. São Paulo: Pioneira Thomson Learning Ltda., 2001. p. 143-162.

MOURA, M. O. **A atividade pedagógica na teoria histórico-cultural**. Campinas: Autores Associados, 2016.

QUINTERO, C. **Desarrollo del pensamiento teórico de estudiantes de grado undécimo en un proceso de objetivación del concepto de límite de una función**. 2018. 235 p. Tesis (Doctorado en Educación). Facultad de Educación, Universidad de Antioquia, Medellín, 2018.

QUINTERO, C.; JARAMILLO, D. Objetivación del límite de una función: ¿pensamiento empírico o pensamiento teórico? **Revista Científica**, Bogotá, edición especial, p.474-478, oct. 2013.

QUINTERO, C.; JARAMILLO, D. Desarrollo del pensamiento teórico: objetivación del límite de una función en grado once. En: SCOTT, P y RUIZ, A. (Eds) **Comité Interamericano de Educación Matemática**. Educación Matemática en las Américas 2015. República Dominicana, v. 5: Etnomatemática y Sociología, p. 66-77, 2015.

QUINTERO, C. y JARAMILLO, D. Desarrollo del pensamiento teórico de estudiantes de undécimo grado mediante un proceso de objetivación del concepto de límite de una función en un punto. *En*: MORALES, Y. y RUIZ, A. (Eds.) **Comité Interamericano de Educación Matemática**. Educación Matemática en las Américas 2019. República Dominicana. p. 1321-1328, 2020.

RADFORD, L. Three key Concepts of the theory of objectification: Knowledge, knowing, and learning. **Journal of Research in Mathematics Education**, Reston, v. 2, n. 1, p. 7-44, 2013.



Disponible en: <http://www.luisradford.ca/pub/2013%20REDIMAT%20-%203%20key%20concepts%20final%20version.pdf>. Acceso: 13 jul. 2018.

RUBINSTEIN, S. L. **Principios de Psicología General**. México, D.F: Grijalbo S.A., 1974.

SÁNCHEZ, S. **Fundamentos para la investigación educativa**: presupuestos epistemológicos que orientan al investigador. Bogotá: Cooperativa Editorial Magisterio, 1998.

VERGEL, R. **Formas de pensamiento algebraico temprano en estudiantes de cuarto y quinto grados de Educación Básica Primaria (9-10 años)**. 2014, 326 p. Tesis (Doctorado Interinstitucional en Educación). Facultad de Ciencias y Educación, Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, 2014.

**Submetido em 03 de Dezembro de 2020.
Aprovado em 22 de Novembro de 2021.**