SOCIEDAD CHILENA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
REVISTA CHILENA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
ISSN 2452-5448

ARTÍCULOS DE INVESTIGACIÓN

https://doi.org/10.46219/rechiem.v14i1.107

SOBRE LA NUEVA REFORMA DE LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA: INVITACIÓN A UN DEBATE, 1

ON THE NEW REFORM OF MATHEMATICS EDUCATION: INVITATION TO DEBATE, 1

Arturo Mena Lorca
arturo.mena@pucv.cl
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Valparaíso, Chile

RESUMEN

Hacia 1960, comenzó un proceso de reforma de las matemáticas escolares en gran parte del globo. Chile, como otros países, no estaba preparado para ella. Hoy, las primeras olas de una nueva, inexorable, más amplia y profunda reforma ya están llegando. No es obvio que ahora estemos mejor apercibidos: se ha avanzado en todas las áreas concernidas, pero algunas ideas substantivas, incuestionables, de la reforma anterior, no fueron incorporadas según se pretendía. Mientras en otros lugares, que están determinando el rumbo de los acontecimientos futuros, ya están mirando en una dirección diferente, nuestra nación no ha terminado de ponerse de acuerdo en temas fundamentales. Se necesita aquilatar la situación, para apercibirse, precaverse y enfrentar la nueva situación. En este escrito, intentaremos: reunir algunos aspectos del currículo escolar; situar en perspectiva nuestra tarea como responsables, cada uno en lo suyo, de los aprendizajes de matemáticas del país, y aquilatar los resultados que se están obteniendo; describir el escenario de la reforma educacional anterior, sus causas, su realidad en Chile; reseñar inferencias que se deben hacer y precauciones que hay que tomar; examinar nuestro presente en esta materia; explicitar la nueva reforma, y reunir todo ello en una mirada de largo aliento.

PALABRAS CLAVE:
Reforma de la matemática escolar, Ideas unificadoras en matemática, Mediciones educacionales internacionales, Educación matemática chilena.

ABSTRACT

Around 1960, a profound reform process of school mathematics began covering a great part of the globe. Our country, like many others, was not prepared for it. Today, it can be perceived that the first waves of a new great reform are already arriving. An inexorable reform, broader and deeper than the previous one, and it is not an obvious assumption that we are better prepared this time: the country has advanced in all areas of concern, but some substantive, unquestionable ideas of the previous reform were not incorporated as intended. While other places, which are determining the course of future events, are already looking in a different direction, Chile has not finished agreeing on fundamental issues. It is necessary, then, to assess the situation, to be aware, and take precautions. In this writing, we will try, successively to: bring together some aspects of the school curriculum; put into perspective our task as responsible agents, each one in their own role, for mathematics learning in the country, and appraise the results that are being obtained; describe the scenario of the previous educational reform, its causes and philosophy, its reality in Chile; outline inferences to be made and precautions to be taken; explain the new reform; and bring it all together in one long-winded look.

KEYWORDS:
Reform of school mathematics, Unifying ideas in mathematics, International educational measurements, Chilean mathematics education.

Recibido: 28 de febrero de 2022 , Aceptado: 10 de marzo de 2022

1. Introducción

1.1 Las lecciones de la historia

"Que los hombres no aprenden mucho de las lecciones de la historia es la más importante de todas las lecciones que enseña la historia", dijo Aldous Huxley en 1956 (p. 47)[1]. Probablemente nos llame primero la atención la estructura de esa frase; aquí nos proponemos sugerir, de más de una manera, la relevancia práctica de esa suerte de *dictum* para nuestro caso, el de la educación matemática en nuestro país.

1.1.1 Incompetencia del autor

Ahora bien, aquel propósito nos pone en la inconfortable posición de salirnos de nuestro supuesto campo de especialidad y, con ello, de no poder dar evidencia clara de cada afirmación e, incluso, de develar cierta candidez. Nos parece, sin embargo, que nuestra incompetencia para profundizar en determinadas materias no impide que las señalemos como relevantes para una consideración comunitaria, sobre todo si uno de los fenómenos sobre los cuales queremos llamar la atención es, justamente, el que no haya suficiente discusión sobre ellas. En ausencia de un debate en el que participen los diversos actores, nos vemos obligados a referirnos a algunas categorías y enunciados a manera de análisis provisional y *a priori*, con la esperanza de que, en un escenario más saludable y conocedor, ellas se discutan, se amplíen y precisen a la vez, y se jerarquicen. Procederemos, entonces de una manera dispar: sugiriendo, a veces, indicios de una circunstancia actual difícil de expresar desde una perspectiva disciplinaria; aportando, en otros momentos, evidencias claras y eventualmente contundentes; y acercándonos, como nos sea posible, a aquel nuevo escenario. El resultado es, naturalmente, un ensayo desparejo y eventualmente rústico[2].

1.1.2 La necesidad de un debate

Nuestra disculpa es que queremos invitar a considerar algunos elementos de variada índole que –dependiendo de la especialización del lector– están a la vista, y otros que no lo están tanto, y que, en conjunto, no parecen haber sido tomados suficientemente en cuenta, al menos, no para conjugar las diversas dimensiones de la situación que enfrentamos. Ellos constituyen un fenómeno cultural de una magnitud descomunal, la cual, a su vez, comporta una revisión más bien profunda de varias categorías que ocupamos en nuestra tarea común –incluida, eventualmente, la de *cognición*–. Todo esto debería alentarnos a participar de un debate, amplio y de cierta profundidad y permanencia, a partir del cual ubicar, en un rango específico, un posible vector hacia el cual dirigir los esfuerzos de la comunidad en educación matemática. La idea de un tal debate puede parecer excesivamente ingenua, pero procuraremos mostrar su necesidad. En todo caso, y según la información disponible, parte de la cual expondremos, no parece viable persistir, con la velocidad acostumbrada, tratando de llenar hasta cierto punto la brecha que hoy existe entre nuestro desempeño y el de algunos países más avanzados en el tema, los cuales, además, aceleran sus procesos.

1.1.3 Historia y significado

Seguramente, la historia comprende el presente. A lo largo del texto, hemos optado por ofrecer ejemplos pretéritos para llamar la atención sobre eventuales sucesos presentes. Recordando a Peirce y su máxima acerca de lo que entraña concebir un objeto[3], estaremos alerta a las consecuencias, a menudo prácticas (y, ocasionalmente, dolorosas) de aquellas ilustraciones.

1.2 La tarea de enseñar matemáticas

1.2.1 El currículo

La evolución del currículo escolar comprende, como sabemos, aspectos históricos, educacionales en sentido amplio, políticos –*lato sensu*–, y, en nuestro caso, matemáticos.

En el mejor de los escenarios, los diferentes actores examinan el asunto permanentemente, se reúnen a menudo, debaten los diversos aspectos involucrados, consultan a un universo amplio de personas e instituciones concernidas, toman acuerdos generales, y establecen una norma, eventualmente legal (Bases Curriculares, *e. g.*) que progresivamente se va convirtiendo en entes técnicos: programas de estudio, textos escolares, acuerdos en un establecimiento educacional, actividades en el aula, etc.

[1] "That men do not learn very much from the lessons of history is the most important of all the lessons of history".
[2] En particular, debemos agregar una disculpa por incluir en la discusión elementos muy conocidos por la SOCHIEM, y que se deben al carácter de la exposición. Añadimos una explicación por no usar lo que se suele llamar el lenguaje inclusivo, lo cual se debe a consideraciones gramaticales y no filosóficas.
[3] "Consider what effects, which might conceivably have practical bearings, we conceive the object of our conception to have. Then, our conception of these effects is the whole of our conception of the object" (Peirce, 1878, p. 293).

Tal racionalidad es algo muy deseable, e incluye estudio previo, un saludable respeto por opiniones ajenas informadas, y una, en términos generales, deseable "continuidad". Sin embargo, y a pesar de los esfuerzos de instituciones tales como la Unidad de Curriculum y Evaluación (UCE) del Ministerio de Educación (MINEDUC), ello no parece garantido; en su lugar, en el país, al menos en lo que respecta a la opinión pública, tenemos una curva que asemeja la conducción eléctrica de un corazón que presenta unos pocos latidos estacionales por año, con largos intervalos de relajación ventricular, y despertares un tanto abruptos que se desvanecen sin dejar rastros perdurables –la siguiente pulsación comenzará nuevamente *ab initio*–. Por otra parte, la historia se ha encargado de mostrar de manera contundente –y, a veces, estrepitosa– que, en esta materia, la sola razonabilidad no es suficiente para la toma de decisiones: es indispensable cierto criterio experimental –son necesarios la investigación y los proyectos de desarrollo–.

Afortunadamente para el país (y, a pesar de las consabidas discontinuidades cuadrienales), hay un camino de trabajo trazado, y personas concernidas competentes que resguardan un tanto de avatares inesperados.

1.2.2 La dificultad de entenderse

Ahora bien, seguramente el debate curricular tiene un carácter multidisciplinario; sin embargo, para que sea efectivo, debería, desde luego, haber puntos de vista, si no compartidos, al menos afines; algún respeto por una especialidad que no es la propia, voluntad de salir del propio condado. Se puede observar, sin embargo, que esto no está asegurado. Una razón para ello parece provenir de las epistemologías diversas de los actores involucrados[4]. En el caso que nos ocupa, está, por de pronto, la manera de entender el rigor que manifiestan educadores[5] y matemáticos, la cual se expresa, en particular, en un uso del lenguaje bastante dispar –ostensible, desde ya, en las longitudes diferentes de los diversos planteamientos– y que parece traducirse en que discursos que en alguna medida debieran converger, en la práctica se alejen de manera manifiesta. Por lo demás, es fácil percibir que el énfasis variable que se da a la evidencia empírica, y a la convicción que se tiene ya sea respecto de la opinión de pensadores de renombre o bien del conocimiento interno de la disciplina, puede llevar a impases insuperables.

1.2.3 Un posible dinoterio

Lo anterior es solo una polaridad entre otras que surgen debido a la multiplicidad de campos disciplinarios que pueden intervenir en el asunto. Viene al caso –justamente, por su carácter epistemológico– el viejo cuento, persa o indostano, de los ciegos y el elefante. A una pequeña aldea llega la noticia de que en un pueblo cercano hay un elefante. Los aldeanos no conocen ese animal, y envían una delegación al pueblo, casualmente compuesta solo de personas ciegas. Ya ante la bestia, los delegados se acercan como pueden y, de vuelta en la aldea, sus reportes difieren: quien tocó un colmillo dice que el elefante es una lanza; quien la oreja, que es un abanico; una pata se reporta como una columna, el cuerpo como una muralla, la cola como una soga. Cada cual está seguro de lo que dice, y de que los otros están equivocados. El cuento no dice cómo la aldea se puso de acuerdo –si lo hizo– pero sí podemos anticipar que, en general, en nuestro caso, se echa de menos una conexión de la mayor importancia entre las diversas dimensiones de la educación matemática (por lo demás, explícita en importantes estudios, que reseñaremos), y que ello impide resolver un error de proporciones que se traduce en pérdida de oportunidades para el desarrollo del país, y en obstáculos, a veces insuperables, para las personas, especialmente las más vulnerables.

1.2.4 Categorías en evolución

El caso de la educación, y el de la educación matemática en particular, es uno que enfrenta considerables dificultades, que se presta a confusiones, y que experimenta cambios a menudo.

Por de pronto, el interés en el tema comenzó con la preocupación por la enseñanza, luego se focalizó en los aprendizajes, más adelante, en la enseñanza-aprendizaje. En algún momento, el centro eran los contenidos, luego los objetivos, más adelante las competencias, ahora las habilidades... Como sabemos, tal variabilidad impacta en la evaluación de los aprendizajes, pero, más profundamente, en aquello que se supone que debe hacer, por ejemplo, un profesor en el aula. Todo esto muestra, seguramente, una evolución positiva del discurso; sin embargo, manifiesta también la irrupción no solo de filosofías diversas sobre el tema, sino también, ocasionalmente, de categorías de otras disciplinas o actividades que gravitan, para bien o para mal.

[4] (Siguiendo la atinada sugerencia de Jerome K. Jerome, 1997, *On being idle*, párr. 16). Digamos que son dos áreas de especialidad, A y B. Incide, también, lo que los especialistas de A consideran que los de B piensan sobre las convicciones de A, y viceversa.

[5] Entendidos aquí como quienes se dedican a la educación en general.

Por otra parte, no podemos decir que toda la comunidad transite a una única velocidad por esas concepciones, ni que entienda lo mismo por aquellos términos (competencias, e. g.), ni, aun, que vea ese tránsito de unas a otras como necesario. Incluso, en presencia de acuerdos explícitos en el delineado del escenario, su traducción a la evaluación de los aprendizajes puede variar considerablemente –¿importa más alcanzar un objetivo o que los estudiantes desarrollen su pensamiento?–.

De suyo, el tema es, en una perspectiva académica, delicado. Pero no podemos olvidar que pequeñas variaciones en las decisiones pueden afectar de manera diversa, por una parte, a las instituciones educacionales y, por otra, a los profesores y, en fin, a la población estudiantil. Ello puede llevar, según reseñaremos posteriormente, a apartarse tal vez en forma grave de los fines que se supone que se persiguen.

1.2.5 El aula

1.2.5.1 Repercusión en el aula

Como sabemos, lo anterior tiene una repercusión –dispar– en el aula: hay quienes priorizan el dominio de las destrezas operatorias, o de la retención de contenidos, o bien de la actividad matemática. Como también se sabe, usuarios y apoderados insistirán tal vez en que haya clases ostensiblemente ordenadas y entretenidas, cuadernos bien organizados, un cierto histrionismo del profesor, etcétera. La clara insistencia de la asignatura escolar de Matemática en las habilidades de Representar, Comunicar y argumentar, Resolver problemas y Modelar, por ejemplo, debería aclarar el panorama, pero no siempre parece evidente que se trata de habilidades que se desarrollan con contenidos matemáticos.

Tal situación es delicada para los estudiantes, dolorosa para los profesores[6], y se la debe enfrentar en medio de largas, demandantes y un tanto inciertas jornadas. Hoy, el deseo de hacer un trabajo apoyador, profesional, fructífero, de cierta compleción, se estrella con realidades antes inusuales (falta de equipamiento tecnológico y/o de conectividad de calidad, aislamiento de los niños, directrices que varían a menudo…). Los establecimientos, a su vez, han debido resolver, sobre la marcha, otros dilemas: atender a sus alumnos es su misión, pero también deben responder, por lo general, a determinados indicadores, y un largo etcétera –en medio del cual ha irrumpido con mayor fuerza la tecnología digital–. Obviamente, no estamos hablando de algo desconocido; solo traemos a colación elementos relevantes para la discusión.

1.2.5.2 El "modo aula"

Sería deseable que, ante esta situación, el país se moviera, si no como un todo, con alguna homogeneidad. Sin embargo, es fácil percibir que el conjunto de las acciones de los estudiantes, las prácticas de aula, y las medidas de los establecimientos, manifiestan también algunos escollos no superados.

El contraste perceptible que hay entre algunos usos habituales y lo que sustenta la investigación en la materia parece ahora más notorio. Expresiones mnemotécnicas[7] no solo son cuestionables, sino que obstaculizan mirar el tema del que tratan, desaprovechan oportunidades de aprendizaje, es decir, son perfectamente inútiles –salvo para resolver un ejercicio de prueba, pongamos por caso–.

Hay en esto algo que se podría llamar el "modo aula", o "modo sala de clase": una expresión, diríamos, del *contrato didáctico* de Guy Brousseau (Brousseau y Warfield, 2014). Supongamos que un profesor dice, en un curso de niños pequeños: "Un pastor cuida 14 ovejas y 11 cabras. ¿Qué edad tiene?"[8]. Un gran porcentaje de los estudiantes, según se puede comprobar, responderá que la edad del pastor es 25 años: 14-11 no puede ser, tampoco 14×11, y aún menos 14:11. En todo caso, se dicen aquellos, el profesor seguramente quiere que hagamos algo con esos números que nos dio. No sorprendentemente, niños de similar edad, casualmente reunidos en la calle, enfrentados a la misma pregunta, manifiestan que la pregunta es tonta, y tienden a reírse de quien la hace (D'Amore, 1993).

Lo anterior puede parecer simpático, pero es tal vez más triste de lo que se puede percibir en una primera mirada. Un ejemplo de ello es una experiencia que probablemente el lector haya experimentado fuera de horas de trabajo: viene una personita (hija, sobrino, etc.) y le pide ayuda sobre una tarea de matemáticas. La pregunta provoca en usted una agradable expectativa (¡qué buena oportunidad!) que decae exponencialmente (como se suele decir) ante

[6] (Según el testimonio espontáneo de más de medio centenar de ellos).
[7] *"El enemigo de…", "todas sin tacos…", "un día vi…"*etc., que ponen una venda en los ojos de un estudiante que pudo, en ese momento, haber aprendido algo (una aplicación del teorema fundamental del cálculo, e. g.).
[8] Al ejemplo original, de Baruk (1985), comprobado en muchas partes del mundo, se le suele llamar "la edad del capitán".

la primera reacción de la personita aquella ante el comienzo de la explicación de usted: "¡No! ¡El profesor me dijo a-sí!". Un tanto lejano –y, de hecho, contrario–, debemos reconocer, a los propósitos de desarrollo del pensamiento crítico, independiente, que enuncia el currículo; ¿podría afirmarse que se está favoreciendo el desenvolvimiento de la creatividad de aquella personita?

1.2.5.3 La pandemia

A todos nos consta que la pandemia, si bien ha mostrado, como veremos, elementos de innovación encomiables, ha agudizado notoriamente las discrepancias que hemos venido señalando y otras a ese tenor.

Por ejemplo, un estudio de Ávalos y Matus (2010) mostraba que una de las visiones principales de los profesores respecto de las matemáticas es que "suponen el recuerdo y la aplicación de definiciones, fórmulas, hechos y procedimientos matemáticos", y que "para resolver una tarea en Matemáticas hay que conocer el procedimiento correcto, de otra manera uno se pierde" (p. 113). Si es eso lo que se ha estado enseñando en pandemia, seguramente no se está, realmente, favoreciendo el desarrollo de habilidades, independientemente de la focalización que la emergencia de salud ha obligado a hacer en el currículo. Por cierto, la presencia cada vez mayor de tecnología digital aumenta la incongruencia de tal visión.

1.2.6 Pedagogía y matemáticas

1.2.6.1 El dolor de enseñar

Son muchos los profesores que se levantan cada mañana a acompañar a sus estudiantes en su desarrollo. Acerca de cuál es su tarea, sin embargo, parece haber opiniones antitéticas, que supuestamente debe armonizar. En su informe sobre nuestro sistema educacional de 2004, la Organización para la Cooperación y Desarrollo Económicos (OECD) llamó expresamente la atención sobre la necesidad de que las instituciones formadoras provean de elementos para que sus estudiantes puedan hacer las síntesis correspondientes. Agregó que la formación inicial no hacía converger los elementos pedagógicos generales y los de enseñanza de las disciplinas, y graficó la situación citando a una alumna entrevistada, quien declaró: "Aquí he aprendido a enseñar, y he aprendido mucho sobre el Castellano; pero no he aprendido a enseñar Castellano" (2004, p. 142).

1.2.6.2 Conocer el contenido

Parece prudente agregar aquí otra consideración. Supongamos que un papá o una mamá trata de ayudar a la tarea de matemáticas de un hijo. Mejor motivación para que un niño aprenda es difícil encontrar. Sin embargo, si él/ella no "sabe" matemáticas, no lo logrará. Afirmaciones tales como "ve a tu cuaderno, busca los conocimientos que necesitas, y aplícalos a este caso" no serán de mucha ayuda, y, a quien no puede resolver la tarea, estímulos al estilo de "tú puedes" tal vez solo logren que se sienta un poco peor. La "motivación" de que "algún día te servirá para algo", además de aludir a un futuro demasiado remoto, es una promesa engañosa: cuando llegue aquel día, la materia archivada habrá desaparecido de la memoria, o estará borrosa, o ya no se sabrá para qué servía –en caso de que alguna vez se supiera–.

1.2.6.3 La dificultad de enseñar

Todo esto nos pone de cara al problema central, y no puramente teórico, de qué es enseñar. "Transmitir conocimiento", "enseñanza-aprendizaje" y otras expresiones de uso común parecen insuficientes si se acepta la evidencia ostensible de que el conocimiento de una generación no alcanza para la siguiente. "Facilitar el conocimiento" llama de inmediato la atención acerca de cuál es ese conocimiento; además, podría esconder la imprudente sugerencia de evadir cuestiones dificultosas pero indispensables.

Ciertamente, esto pone en duda, para el profesor, tanto el profesionalismo de su desempeño como las iniciativas que lleva a cabo para aclarar la cuestión; peor aún, podría ocurrir que sus empeños avanzaran en una dirección inversa a la que se necesita (según acabamos de sugerir). Como si ello no bastara, las demandas sobre el profesor –profesionales y sociales– van siempre en aumento y provienen de diversas direcciones (es difícil encontrar otra profesión sobre la cual, al parecer, todos los usuarios manifiesten tal cantidad de consejos y exigencias tan determinadas como inflexibles). No contribuyen, realmente, a su solaz la sensación de aislamiento, de parvedad de sus empeños, ni la inestabilidad laboral de fin de año[9].

1.2.7 En resguardo de la matemática y la empleabilidad

Es incuestionable que la educación debe ocuparse de que la personas participen mejor de los bienes

[9] Según nuestra experiencia, tampoco ayudan declaraciones estrepitosas al estilo de "el currículo embrutece".

y de la marcha de la nación; ello es, de suyo, bueno para el país y su desarrollo. Aun si el propósito de la educación fuera solamente que las personas se cultiven, como individuos y como ciudadanos –informados, responsables, propositivos–, sería impensable que ello fuera ajeno a obtener un mínimo de cultura matemática.

Por supuesto, la educación debe ocuparse, simultáneamente, de que las personas puedan desarrollar actividades económicas, en particular, obtener un empleo, y es inquietante comprobar que no todos los actores concernidos advierten esta necesidad. Como es obvio, la matemática tiene también una alta relevancia en este punto.

Debemos, entonces, preguntarnos por qué parece que, cuando se discuten temas educacionales, la matemática no esté representada, o, peor aún, por qué una y otra vez se pretende decidir sobre su currículo sin recurrir a las personas que se especializan en ella[10]. Además, es necesario estar atentos ante perspectivas que no tomen suficientemente en cuenta que un gran porcentaje de los estudiantes, inmediatamente tras egresar de la enseñanza media, asumirán responsabilidades laborales.

2. El derecho a aprender matemática

2.1 Un derecho inalienable

Aprender Matemáticas es un derecho, y se lo puede considerar parte de lo consignado en la Declaración Universal de Derechos Humanos: "Toda persona tiene derecho a la educación" (Organización de las Naciones Unidas [ONU], 1948, Art. 26.1).

Ese derecho está reconocido en nuestro país, e incorporado reiteradamente a la normativa legal –la más reciente, en su Ley General de Educación, N°. 20370 de 2009–. Adicionalmente, en 1999, tras la Conferencia Mundial "Ciencia para el siglo XXI", la Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura (UNESCO), en declaración conjunta con el International Science Council (ICSU), que agrupa a las sociedades científicas del mundo, declaran:

> El acceso al saber científico con fines pacíficos desde una edad muy temprana forma parte del derecho a la educación que tienen todos los hombres y mujeres… la enseñanza de la ciencia es fundamental para la plena realización del ser humano, para crear una capacidad científica endógena y para contar con ciudadanos activos e informados. (p. 10)

Y agregan que aprender ciencias es importante para reducir las disparidades y para la paz, y que "es un requisito previo fundamental de la democracia y el desarrollo sostenible" (p. 34).

No parece fácil diferir de esas declaraciones acerca del derecho a recibir una educación adecuada, en particular, en matemáticas.

2.2 Defender ese derecho

En lo que sigue, asumiremos que hay un derecho a aprender ciencia, en particular, matemáticas. Parece inevitable, entonces, concluir que no ofrecer una buena enseñanza en ciencia es, entonces, privar de un derecho, carencia que afectaría al país en su conjunto y a sus personas individualmente, y que debemos esforzarnos con tesón en resguardar ese derecho. A nuestro entender, ello comporta no contemporizar cuando de algún modo se obstruya su satisfacción, en resguardo de niños y adultos que, consecuentemente, perderían oportunidades[11]. Prevalencia inapropiada de intereses sectoriales, declaraciones presuntamente iluminadas y eventualmente irresponsables, importación irreflexiva de lo que se hace en otras latitudes –sobre todo si las coordenadas, espaciales o temporales, no están bien elegidas– pueden perjudicar seriamente a la satisfacción del derecho a educarse.

2.3 Un derecho que evoluciona

Por cierto, el derecho a recibir una buena educación en matemática no existe solo a partir de las declaraciones a las que hemos aludido; sin embargo, su forma ha ido cambiando.

Hace un siglo, se consideraba que la necesidad de formación para desempeñarse como ciudadano se cubría básicamente con aprender lectura, escritura, y las cuatro operaciones. El logro de tales habilidades para la gran mayoría de las personas no es en absoluto desdeñable. Por ejemplo, en 1100 d. C., en Europa (cuando estaban llegando, esta vez para quedarse, los números indo-arábigos), sabía leer y escribir solo uno de cada 50 hombres, y casi ninguna mujer (Roser y Ortiz-Ospina, 2016); entonces esas habilidades probablemente se consideraban muy difíciles de

[11] En nuestro caso, comporta también sentirnos ocasionalmente obligados a hablar sin circunloquios.
[10] Por cierto, no nos estamos refiriendo a las autoridades educacionales del país.

adquirir, y reservadas solo para algunos, pero hoy todos las desarrollamos. El dato es interesante, porque tal vez estemos enfrentados a una situación análoga.

Comenzando el siglo XXI, la cobertura en educación se ha vuelto imposible. Saber, se nos dice, ya no es recordar y repetir información, sino ser capaz de encontrarla y utilizarla con provecho. Podemos agregar que una educación concebida como recuerdo y repetición es un error ya antiguo, de graves consecuencias para el desarrollo y la libertad de los individuos. Además, y como bien sabemos, en matemáticas, aun encontrada la información, su lectura puede presentar dificultades considerables –no es homologable a leer un periódico, pongamos por caso–.

Como sea, la educación debe proponerse formar aprendices autosuficientes y para toda la vida. Quienes estudian el tema, quienes toman decisiones sobre él en el país, y muchas otras personas concernidas, debemos, además, recordar que no avanzar en esto, o hacerlo en forma muy lenta, comporta retroceder comparativamente.

Lo anterior no debe ser solo tema de reflexión. En octubre de 2020, el World Economic Forum señaló que, según sus estimaciones, y como consecuencia del avance tecnológico, al cabo de un lustro, 85 millones de trabajos se automatizarán, y que, simultáneamente, se creará un centenar de millones de nuevos trabajos. ¿Podemos proponernos educar a personas ignorando de hecho que pueden volverse laboralmente irrelevantes?

2.4 Sobre la satisfacción de aquel derecho

2.4.1 La prueba PISA

La prueba PISA (Programme for International Student Assessment), que administra la OECD, mide la "competencia matemática" (*mathematical literacy*), entendida como:

> La capacidad de un individuo para razonar matemáticamente y formular, emplear e interpretar la matemática para resolver problemas en una variedad de contextos del mundo real. Incluye conceptos, procedimientos, hechos y herramientas para describir, explicar y predecir fenómenos. Ayuda a las personas a conocer el papel que desempeñan las matemáticas en el mundo y a tomar las decisiones y juicios bien fundamentados que necesitan los ciudadanos del siglo XXI. (OECD, 2019a, p. 75)

Los resultados, por tanto, no se circunscriben a que los alumnos sepan o no sacar algunas cuentas, ni aun a capacidades de mayor relevancia matemática, sino que nos hablan también de la presencia o ausencia de varios elementos centrales del currículo en su integridad y, en particular, de las habilidades que deberían desarrollarse en los cursos de la asignatura.

La prueba ubica a los estudiantes en seis niveles, que se pueden ver en su página web (OECD, 2019a). En el Nivel 6 están los estudiantes de alto rendimiento: pueden formular y comunicar con precisión, conceptualizar, generalizar investigar, modelar, resolver problemas complejos, relacionar fuentes de información, aplicar su saber en situaciones novedosas; tienen pensamiento y razonamiento matemático avanzados. En el Nivel 1 se ubican los estudiantes con un mínimo de competencia matemática: pueden responder a preguntas explícitas, en contextos familiares, con toda la información a la vista, desarrollar rutinas ante instrucciones directas, realizar acciones obvias y seguirlas inmediatamente tras un estímulo. Bajo el Nivel 1 quedan los estudiantes que no son capaces de realizar las tareas de matemáticas más elementales que pide PISA.

Es inevitable pensar que, si a un estudiante "le va mal" en la prueba de Matemática en PISA, no solo le faltan competencias en matemáticas, sino que experimenta dificultades en otras asignaturas y, en general, en su estudio.

2.4.2 Resultados de la prueba

Desde 2003, año en que participó en PISA por primera vez, Chile ha tenido un desempeño estable, con un leve crecimiento inicial, pero insatisfactorio.

En la prueba, poco más de la mitad (51,9%) de los estudiantes chilenos está por debajo del Nivel 2 (OECD, 2019b). La razón aproximada de niños chilenos que alcanzan los dos niveles más altos (reunidos) en la prueba es similar a la proporción de niños bajo la escala en los países con mejores resultados (del orden de 15:1000). Si buscamos la razón aproximada de estudiantes por debajo del Nivel 2 en la prueba en diferentes grupos de países que participan en la muestra, encontramos que: en América Latina, es 2:3; en los países de la OECD, es 1:4; en países con un PIB similar al de Chile, 1:3. Existe una brecha de dos años en la escolaridad matemática de Chile con el promedio de la OECD, y de tres años con los países de más alto desempeño (OECD, 2017).

A lo anterior hay que sumar, en Chile, los resultados significativamente inferiores de los estudiantes con menos recursos económicos (OECD, 2017), de las mujeres en comparación con los hombres (MINEDUC, 2019) y de los estudiantes de educación técnico-profesional en comparación con los de educación científico-humanista (Agencia de Calidad de la Educación, 2019), y también que el país es uno de los menos inclusivos de la OECD (OECD, 2017).

2.5 Una tarea gigantesca

La prueba no está libre de eventuales críticas, y, ciertamente, no es un oráculo. Sin embargo, dispone de equipos de especialistas connotados, de procedencia diversa, e instrumentos estadísticos confiables. Por lo demás, sus resultados, en el caso chileno, son consistentes con los obtenidos en el Laboratorio Latinoamericano de Evaluación de la Calidad de la Educación de la UNESCO (LLECE), y también con Trends in International Mathematics and Science Study (TIMSS) (OECD, 2017).

Por otra parte, es obvio que la política educacional del país no debe ordenarse a mejorar los logros en una determinada prueba –incluso, externa–. Sin embargo, la idea de que no se pueda tapar el sol con un dedo es un error de geometría. Decir que la prueba PISA no puede medir todo, o que puede tener algún sesgo[12], son, principalmente, tautologías. Por lo demás, en ningún caso se puede aceptar este tipo de críticas como excusa para no enmendar lo que haya que remediar.

Esa prueba muestra que aquel derecho a aprender matemáticas no está siendo satisfecho en nuestro país, y que se tiene ante sí una tarea gigantesca –*nuestra tarea*–, la cual seguramente requiere de un esfuerzo concertado, que se obstaculiza si acaso se niega lo que salta a la cara. Por lo demás, sería un afrentoso desatino pensar que esta es una tarea que no está relacionada con el crecimiento integral de los habitantes del país.

3. Ideas unificadoras en matemáticas

3.1 Matemática hacia 1870

3.1.1 Organización de la Matemática

Hace un siglo y medio, la Matemática estaba constituida por 12 grandes áreas, entre las cuales se contaban Aritmética (Teoría de números, Análisis combinatorio, Cálculo de probabilidades, Interpolación, etc.), Álgebra (Cálculo algebraico, Matrices y determinantes, Teoría de las ecuaciones, Álgebra de los polinomios, Álgebra superior, etc.), Geometría (Geometría euclidiana, Geometría analítica, Geometría descriptiva, Geometría proyectiva, Geometría no-euclidiana, Análisis vectorial, Geometría diferencial, etc.), Análisis (Cálculo, Análisis numérico, Teoría de funciones, Ecuaciones diferenciales, Cálculo de variaciones, Análisis harmónico, Análisis tensorial, etc.). En total, había 38 subcategorías, que parcelaban la disciplina (Davis y Hersh, 1998).

Libros como los de Henry Sinclair Hall y Samuel Ratcliffe Knight ("Hall and Knight"), el primero de los cuales, *Algebra*, apareció en 1881, seguían la estructura que hemos reseñado, y serían el modelo de otros textos en matemáticas de uso en el s. XX, tanto para enseñanza media como superior.

3.1.2 Las grandes ideas unificadoras

Sin embargo, entre 1872 y 1873 aparecen dos grandes ideas unificadoras de la Matemática: en la Universidad de Halle, Georg Cantor (1873) comienza sus escritos sobre la estructura elemental subyacente a todos los estudios de la disciplina y, por su parte, Felix Klein (1872) presenta, en la Universidad de Erlangen, su justamente famoso "Programa", que reúne en una visión común las geometrías absoluta (al estilo de Euclides) y cartesiana, divorciadas desde la aparición de esta última en 1637 (Dorier, 2000), y de paso incorpora las geometrías no-euclidianas. Los trabajos de ambos tendrían una trascendencia permanente en la manera de pensar la matemática. Adicionalmente, compartieron la necesidad de formar un organismo internacional para difundir la matemática y desarrollar cooperación internacional tanto en la disciplina como en su enseñanza –lo que posteriormente se convertiría en el International Congress of Mathematicians (ICM).

En 1890, los ya mencionados, con David Hilbert, quien ya comenzaba su programa de formalización (Hilbert, 1899, 1900, 1905), y otros matemáticos notables, fundaron la Sociedad Matemática de Alemania. Más adelante, Klein trajo a Göttingen a Hilbert (Rowe, 1989). Cantor, Klein y Hilbert están seguramente entre los impulsores más distinguidos de una tendencia a la unificación de la disciplina en ese momento, y sus trabajos cambiaron en forma substantiva la arquitectura y las concepciones sobre las cuales se venía trabajando en matemáticas.

En 1893, en Chicago, en el International Mathematical Congress, Klein dio la conferencia inaugural, "The

[12] Hay permanentes, serios, explícitos y bien mensurados esfuerzos para evitarlo.

Present State of Mathematics" y otras varias, durante seis días (International Mathematical Union [IMU], 1896). En aquella expresa que la especialización en la Matemática ha producido muchos avances, pero que con ello la disciplina se ha ido apartando de su forma y ámbito originales, lo cual "amenaza con sacrificar su unidad anterior y escindirla en diversas ramas". Añade: que plantear la educación de la matemática de la manera tradicional, sin usar las perspectivas recientes, sería de lamentar; que, con concepciones generales tales como las de grupo y función, se puede reunir resultados diversos; y que, incluso, la geometría y la teoría de números son aspectos diferentes de una misma teoría. Tal tendencia, anuncia, se extenderá inevitablemente a las aplicaciones de la matemática, las cuales, a su vez, la reforzarán.

Klein jugó un papel decisivo en la formulación de los planes de estudios escolares en Alemania, en 1905; allí recomendó la introducción de rudimentos del cálculo diferencial e integral (que Chile acaba de incluir en el plan diferenciado de 3° y 4° medio), y hacer del concepto de función una noción central al estudio. Además, publicó un par de libros para la formación de profesores, en 1904 (Klein, 2006). En ellos adelanta propuestas que hoy parecen muy recientes, y que siguen siendo iluminadoras: que no es necesario que un profesor de colegio sepa matemáticas avanzadas, sino lo que denomina, ya desde el título de su libro, "matemática elemental desde un punto de vista superior" –una noción todavía en uso, y con provecho–; que la idea de función es capital; que "siempre debería presentarse la Matemática enlazada con todo aquello que al hombre pueda interesar y con lo que ha de ejercitar en su vida" (p. 5); que no debía egresar nadie de las instituciones de formación inicial docente que no hubiera usado una calculadora.

3.2 El caso de Chile

En 1865 se realizó el primer censo de la nación (Gobierno de Chile, 1866). Se registró una población total de casi un décimo de la actual. El 83,3% de ella estaba constituida por analfabetos (hombres, 79,2%; mujeres, 86,2%). Dos años más tarde, se promulgó la ley que hace obligatoria la educación científica en la escuela primaria.

3.2.1 La influencia alemana

Desde tiempos de la colonia, en Chile se consideraba la matemática solo como una colección de hechos y reglas de utilidad para el comercio, la industria, etc. En 1842, cuando se fundó la Universidad de Chile, se pensó en modificar esa situación, pero, según cuenta el educador e historiador Diego Barros Arana en 1893, se estimó que no había profesores con preparación adecuada –en ese tiempo, eran, en total, tres profesores, y una docena de estudiantes de tercero en adelante (Barros Arana, 1993)–.

Andando el tiempo, el presidente chileno José Manuel Balmaceda (1900), convencido como estaba del importante rol de la educación en el desarrollo cultural y material del país ya desde su época de parlamentario[13], impulsó una reforma educacional. Fundó el Instituto Pedagógico en 1889[14], y trató de conseguir el apoyo de profesores de trayectoria en el exterior. Ese año llegaron los doctores Reinhold von Lilienthal, discípulo de Karl Weierstrass, y Ricardo Poenisch, profesor de Matemáticas, Física y Cosmografía, quien siguió cursos que dictaba Felix Klein. Von Lilienthal volvería pronto a su país y sería reemplazado por Augusto Tafelmacher, doctorado en Göttingen (Gutiérrez y Gutiérrez, 2014).

La reforma de Balmaceda procuraba que los estudiantes siguieran estudios superiores y pudieran contribuir de mejor manera al país, para lo cual los expertos propusieron una enseñanza de la matemática como disciplina autónoma y cultural, un sistema de conocimientos ligados entre sí, válidos y útiles en todas las condiciones de la vida. El programa de secundaria había sido aprobado en enero de 1889: aritmética, álgebra (incluidos logaritmos, progresiones y anualidades), geometría plana y del espacio, trigonometría plana, cosmografía y contabilidad.

La revolución de 1891 aplazó la reforma hasta el año siguiente. Poenisch reformuló los planes; él y Tafelmacher querían promover una rigurosa disciplina intelectual y conocimientos elementales, pero útiles para la vida, y consideraban además que, como preparación para los estudios superiores, se requería de una cultura amplia; los planes definitivos apuntaron a la formación integral del alumno, desarrollando en él sus facultades intelectuales, artísticas, físicas, etc. (Gutiérrez y Gutiérrez, 2014).

[13] Probablemente es el único miembro de los poderes del Estado que dedicó una intervención suya en el foro a una demostración de carácter matemático (Barros Arana, 1993, pp. 263-264: el sistema no garantiza el triunfo de las mayorías).
[14] Véase Letelier (1940).

En 1892, Poenisch, desde el Instituto Nacional, puso en marcha la reforma. Por su parte, Tafelmacher (1893a, siguiendo a Reidt, 1895), en el Instituto Pedagógico, comenzó a enseñar los métodos "docente y heurístico" (p. 36), "sintético y analítico" (p. 40), y "euclidiano (dogmático) y jenético [sic]" (p. 46); con ello, procuraba articular las exposiciones más tradicionales con la activa participación de los estudiantes, de manera que pudieran acercarse en forma natural a los temas, cooperar en las demostraciones y aprendieran a hacerlas; incluso, que, una vez terminada una discusión, pudieran concluir cuál era el teorema que habían demostrado. En conjunto, Poenisch y Tafelmacher escribieron la serie de 6 volúmenes *Los Elementos de Matemáticas*, que aparecieron entre 1896 y 1904, se reeditaron varias veces –uno de ellos hasta 1931–, y fueron usados en el país hasta la década de los 40 (el de geometría, hasta los años 60).

3.2.2 Errores garrafales

3.2.2.1 Investigación

Por supuesto, a aquellos académicos les interesaba la investigación. Tafelmacher, por ejemplo, publicó tres monografías con aproximaciones suyas a la conjetura de Fermat en los casos n primo, distinto de 2 (1892a, 1892b), n=4 (1893b) y n=6 (1897). Gutiérrez y Gutiérrez (2014) recogen de Meruane (1989), la información de que celos profesionales de los colegas lograron que los contratos de trabajo de los profesores alemanes –de 2 a 5 años de duración, prorrogables– tuvieran una cláusula de "prescindencia taxativa de la investigación y de la creación de escuelas científicas" (p. 187).

Esta muy lamentable situación mejoró con la llegada, en 1929, de Carlos Grandjot, formado también en Göttingen, discípulo, colaborador y coautor de Edmund Landau, políglota, hombre de múltiples talentos, decidido impulsor de la investigación, fundador de la primera Sociedad Matemática de Chile, en 1953, y pionero de la informática en el país (Gutiérrez y Gutiérrez, 2014). Publicó una monografía de álgebra abstracta (conjuntos, anillos, cuerpos) hacia 1940 (el tema no aparecería en las universidades chilenas sino hasta bien entrada la década de los 60)[15].

3.2.2.2 El currículo

Otra situación, igualmente afrentosa, fue protagonizada por el abogado, agricultor e historiador Francisco Encina, quien se empeñó en reducir los estudios de matemáticas, dejando algunas materias para quienes quisieran proseguir ingenierías, y él y algunos asociados lo consiguieron en 1912. Se encargó a Poenisch redactar los nuevos planes, y, además, nuevos textos, ahora en colaboración con Francisco Pröschle –de tercera generación en el país (Pilleux, 2018)– entre 1915 y 1917. Estos textos, según Rojas y Oteiza (2014) definieron operacionalmente el currículo de entonces (el *Álgebra* de Pröschle aún está a la venta).

3.2.2.3 Comentario

Se debe consignar que los libros que hemos mencionado no reflejan las preocupaciones matemáticas que ya empezaban a surgir en Alemania a fines del siglo XIX, y siguieron el esquema tradicional de materias; por ejemplo, en álgebra no se considera debidamente las funciones. Adicionalmente, como ha mostrado Soto-Andrade (2015), tampoco resonaron con otras aproximaciones didácticas en la Alemania de ese tiempo.

De cualquier manera, es difícil no deplorar que una persona, desde fuera y desde lejos, se haya inmiscuido hasta tal punto en el currículo de Matemáticas; tampoco es fácil no fantasear con lo que podría haberse avanzado de no mediar tal circunstancia. Sin embargo, traemos a colación el hecho pensando, como siempre, en el derecho a la educación y la responsabilidad que ello conlleva, y también en la eventualidad de que algo similar vuelva a ocurrir (lo cual ilustraremos más adelante).

3.3 La primera mitad del s. XX

3.3.1 El Congreso internacional de matemáticos

En el primer International Congress of Mathematicians (ICM), en Zurich, en 1897, una de las cuatro sesiones plenarias fue hecha por Klein, con el título "Sobre la cuestión de la instrucción matemática superior" (IMU, 1898).
En 1900, el ICM se reunió en París. Hubo un par de secciones dedicadas a bibliografía, historia, y enseñanza y metodología (IMU, 1902).

El tema de la enseñanza de la matemática se desarrolló en mayor medida en 1908, en el ICM en Roma, en el cual hubo una sección dedicada a temas filosóficos, históricos y educacionales (IMU, 1909). En ella se habló sobre los esfuerzos de reforma en el campo

[15] La Facultad de Ciencias de la Universidad de Chile se fundó en 1965. En ese año, el Consejo Superior de otra universidad chilena había opinado que el país no necesitaba científicos, y que una tal facultad sería, además de onerosa, "una tabla de salvación para alumnos mediocres" (Sáez, 1994, p. 1213, citado por Gutiérrez y Gutiérrez, 2004, p. 24).

de las matemáticas, y se revisó la enseñanza de la disciplina en escuelas inglesas austríacas, italianas, suizas, españolas, húngaras, norteamericanas; hubo dos trabajos sobre reforma de la enseñanza. En esa sección, Klein expuso "Sobre una modernización de la educación matemática en las escuelas superiores". A él y a otros dos matemáticos se encomendó establecer una comisión internacional para estudiar el asunto y reportar en el congreso próximo; se constituyó así la International Commission on Mathematical Instruction (ICMI), presidida por Klein desde ese año.

3.3.2 Álgebra en Göttingen a comienzos del s. XX

En 1915, Hilbert y Klein invitaron a Emmy Noether a Göttingen, para una estadía que resultó muy fructífera, tanto en álgebra como en física[16]. Emil Artin estuvo también en Göttingen, en 1921; Noether y él contribuyeron a modificar el significado del término "álgebra", que venía cambiando desde los trabajos de Évariste Galois en la primera mitad del s. XIX, y los de Richard Dedekind en la segunda. El trabajo de Emmy Noether comportaba una gran generalización a partir de objetos conocidos, y el establecimiento de relaciones conceptuales entre ellos (topología y álgebra, *e. g.*; Van der Waerden, 1980). Bartel Leendert Van der Waerden siguió en Göttingen seminarios con Noether y Artin, y luego escribió sus muy influyentes volúmenes de *Moderne Algebra* (1930-1931); en ellos aparece el álgebra con la estructura en que hoy en día se la conoce –grupos, anillos, módulos…–. Así se la seguiría enseñando en adelante (Schlotte, 2005).

3.3.3 Bourbaki

Gran parte de los matemáticos franceses de una generación falleció en la Primera Guerra Mundial. En la generación siguiente, sobre todo de la École Normal Supérieure, algunos matemáticos no estaban conformes con los textos que usaban, y se quejaban de que sus profesores no estuvieran realmente al día en las materias, ni pudieran continuar las investigaciones comenzadas por los desaparecidos (Aczel, 2009). En 1934, André Weil y Henri Cartan acordaron desarrollar de manera rigurosa el curso de cálculo infinitesimal que dictaban en sus respectivas universidades, de modo que fuera lo que consideraron adecuado a los tiempos, y que sirviera para los próximos 25 años (Corry, 2004). Ello los llevó, junto con un grupo de matemáticos reunidos bajo el pseudónimo de Nicolas Bourbaki, a un plan de mucho más largo aliento, que se materializó en una obra monumental, los *Éléments de Mathématique*, cuyo primer libro apareció en 1939, y el undécimo en 2016 –al grupo se fueron sumando matemáticos de sucesivas generaciones–. Bourbaki avanzó en el rediseño de la matemática, estructurada ahora según las estructuras topológicas, algebraicas y de orden (Corry, 2004). Artin (1953) consideró que [la parte que conoció de] esa obra expone el estado de la matemática de ese tiempo, exhibe la conexión entre sus ramas en un esquema perdurable, y permite incorporar con facilidad ideas nuevas. Los *Élements* es un hito en la manera estructurada de concebir la matemática[17].

3.3.4 Oportunidad y relevancia

La obra de unificación de la matemática que reseñamos fue también oportuna: hacia 1960 la matemática contaba ya con unos 60 capítulos mayores y más de 400 áreas secundarias (Davis y Hersh, 1998). Tal obra, hecha con propósitos científicos, redundó, en parte, hacia el currículo escolar de Matemáticas, con suerte variable[18].

4. Comentario

Según datos actuales del Banco Mundial (2022), Chile gasta en educación un 5,4% de su PIB. Ese porcentaje es mayor que, por ejemplo, el de América del Norte (5,3), el de la Unión Europea (4,6), el promedio de los países de la OCDE (4,9), el de Asia Central y el Pacífico (3,4). Los resultados, sin embargo, son magros, y sugieren que no se está satisfaciendo el derecho a una educación de calidad en matemáticas.

Por su parte, la reseña histórica que hicimos sugiere algunas formas en que se pueden perder oportunidades para el país y para las personas que en él habitan.

En la segunda parte de este ensayo (Mena Lorca, 2022), examinaremos la reforma de la educación matemática que las ideas unificadoras que venimos describiendo causaron en la matemática escolar, su implementación, en particular, en Chile, y algunos obstáculos que se deberían sortear para enfrentar la nueva reforma, ya comenzada, incluyendo algunos que se originan en la falta de un debate amplio y apropiado sobre el tema.

[16] Klein y Hilbert comparten, además, su amplitud de miras con respecto a mujeres en matemáticas. Al no conseguir un contrato para Noether, Hilbert logró que ella hiciera clases a nombre de él. Por su parte, Klein guio a la primera doctora en Matemáticas de Göttingen, Grace Chisholm Young, quien le agradeció expresamente su apertura (Wußing y Arnold, 1989).
[17] Como suele ocurrir, se ha vuelto sobre este tema, más recientemente (Cf. Mathias, 1992).
[18] Pretender que la reforma escolar tuvo únicamente motivaciones geopolíticas relacionadas con la Guerra Fría es, entonces, claramente un desatino.

Referencias

Aczel, A. D. (2009). *Nicolas Bourbaki: Histoire d'un génie des mathématiques qui n'a jamais existé.* JC Lattès.

Agencia de Calidad de la Educación. (2019). *SIMCE 2018. Todos los grados.* https://informacionestadistica.agenciaeducacion.cl//bases

Artin, M. (1953). Review of Bourbaki's Algebra. *Bull. Amer. Math. Soc., 59,* 474-479. https://doi.org/10.1090/S0002-9904-1953-09725-7

Ávalos, B., y Matus, C. (2010). *La formación inicial docente en Chile desde una óptica internacional. Informe nacional del estudio internacional IEA TEDS-M.* Ministerio de Educación de Chile.

Balmaceda, J. M. (1900). *Discursos & escritos políticos, 1864-1891, Tomos I, II.* Imprenta Moderna.

Banco Mundial. (2022). *Gasto público en educación, total (% del PIB).* Instituto de Estadística de la UNESCO. https://datos.bancomundial.org/indicator/SE.XPD.TOTL.GD.ZS

Barros Arana, D. (1993). Discurso en el Quincuagésimo aniversario de la Universidad de Chile. (1893). En Universidad de Chile (Ed)., *La Universidad de Chile 1842-1992: Cuatro textos de su historia* (pp. 31-47). Editorial Universitaria.

Baruk, S. (1985). *L'âge du capitain*. Seuil.

Bourbaki, N. (1939-2016). *Éléments de Mathématique* (11 vol.). Hermann.

Brousseau, G., y Warfield, V. (2014). *Didactical Contract and the Teaching and Learning of Science.* En R. Gunstone (Ed.), Encyclopedia of Science Education. Springer, Dordrecht. https://doi.org/10.1007/978-94-007-6165-0_93-2

Cantor, G. (1873). Uber eine Eigenschaft des Inbegriffs aller reellen algebraischen Zahlen. *J. Reine Angew. Math. 77,* 258-263. https://doi.org/10.1515/9783112368824-009

Corry, L. (2004). *Modern Algebra and the Rise of Mathematical Structures.* Birkhäuser Verlag. https://doi.org/10.1007/978-3-0348-7917-0

Davis, J. D., y Hersh, R. (1998). *The Mathematical Experience.* Birkhäuser.

Dorier, J.- L. (2000). Recherche en Histoire et en Didactique des Mathématiques sur l'Algèbre Linéaire – Perspectives théoriques sus leurs interactions. *Les Cahiers du Laboratoire Leibniz, 12.*

D'Amore, B. (1993). Il problema del pastore. *La Vita Scolastica, 2,* 14-16.

Gobierno de Chile. (1866). *Censo jeneral de la República de Chile: levantado el 19 de abril de 1865.* Imprenta Nacional.

Gutiérrez, C., y Gutiérrez, F. (2014). Ricardo Poenisch: La profesionalización de la enseñanza de las matemáticas en Chile (1889-1930). *Atenea 509*(I semestre), 187-209. https://doi.org/10.4067/S0718-04622014000100011

Hilbert, D. (1899). Grundlagen der Geometrie. En *Festschrift zur Feier der Enthüllung des Gauss-Weber-Denkmals in Göttingen* (pp. 1-92). Teubner.

Hilbert, D. (1900). Mathematische Probleme. En *Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Math.-Phys. Klasse,* 253-297.

Hilbert, D. (1905). Über die Grundlagen der Logik und der Arithmetik. En *Verhandlungen des dritten Internationalen Mathematiker-Kongresses in Heidelberg vom 8*, bis 13, 174-85. Teubner.

Huxley, A. (1956). A Case of Voluntary Ignorance. *Esquire*, October, 47.

International Mathematical Union. (1896). *Mathematical papers read at the International Mathematical Congress.* University Press. https://www.mathunion.org/icm/proceedings

International Mathematical Union. (1898). *Des Ersten Internationalen Mathematiker-Kongresses.* Druk und Verlag Von B. G. Teubner. https://www.mathunion.org/icm/proceedings (Volume 1897).

International Mathematical Union. (1902). *Deuxième Congrès International des Mathématiciens.* Gauthier-Villars. https://www.mathunion.org/icm/proceedings (Volume 1900).

International Mathematical Union. (1909). *Atti del IV Congresso Internazionale dei Matematici.* Tipografia della R. Accademia Dei Lincei. https://www.mathunion.org/icm/proceedings. (Volume 1908).

Jerome, J. K. (1997). *Idle thoughts from an idle fellow.* Project Gutenberg ebook. https://www.gutenberg.org/files/849/849-h/849-h.htm#link2H_4_0002

Klein, F. (1872). Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen. *Mathematische Annalen, 5,* 257-277. https://doi.org/10.1007/BF01444841

Klein, F. (2006). *Matemática elemental desde un punto de vista superior. Aritmética. Álgebra. Análisis.* Nivola.

Letelier, V. (1940). *El Instituto Pedagógico: Misceláneas de estudios pedagógicos.* Nascimento.

Mathias, A. R. (1992). The Ignorance of Bourbaki. *The Mathematical Intelligencer, 14*, 4-13. https://doi.org/10.1007/BF03025863

Meruane, T. (1989). *Centenario del Instituto Pedagógico de la Universidad de Chile.* Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación.

Mena Lorca, A. (2022). Sobre la nueva reforma de la educación matemática: invitación a un debate, 2. *Revista Chilena de Educación Matemática, 14*(1), 17-30. https://doi.org/10.46219/rechiem.v14i1.108.

Ministerio de Educación. (2019). *Fundamentos Bases Curriculares 3° y 4° Medio.* Unidad de Curriculum y Evaluación.
https://www.curriculumnacional.cl
portal/Documentos-Curriculares/
Basescurriculares/91414:Bases-Curriculares-3-y-4-Medio

Organización de las Naciones Unidas. (1948). *La Declaración Universal de Derechos Humanos.* https://www.un.org/es/universal-declaration-human-rights/

Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura, y International Science Council. (1999). *Declaración sobre la ciencia y el uso del saber científico.* UNESCO-ICSU. http://www.unesco.org/science/wcs/esp/declaracion_s.htm

Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos. (2004). *Revisión de Políticas Nacionales de Educación. Chile.* Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos.

Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos. (2017). *Education in Chile, Review of national policies for education.* PISA, OECD Publishing.

Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos. (2019a). *PISA 2018 Assessment and Analytical Framework.* PISA, OECD Publishing. https://doi.org/10.1787/b25efab8-en.

Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos. (2019b), *PISA 2018 Results (Volume I): What students know and can do.* PISA, OECD Publishing. https://doi.org/10.1787/5f07c754-en

Peirce, C. S. (1878). How to Make Our Ideas Clear. *Popular Science Monthly, 12*, 286-302.

Pilleux, C. (2018). *Recopilación de genealogías*. En *Genealog.cl* https://www.genealog.cl/Alemanes/P/Proschle/

Reidt, F. (1895). *Anleitung zum mathematischen Unterrich an höheren Schulen.* Grote.

Rojas, E., y Oteiza, F. (2014). Chile: The context and pedagogy of Mathematics teaching and learning. En H. Rosario, P. Scott, y B. R. Vogeli (Eds.), *Mathematics and its teaching in the Southern Americas.* World Scientific. https://doi.org/10.1142/9789814590570_0005

Roser, M., y Ortiz-Ospina, E. (2016). *Literacy*. Published online at OurWorldInData.org. https://ourworldindata.org/literacy.

Rowe, D. E. (1989). Klein, Hilbert, and the Gottingen Mathematical Tradition. *Osiris, 5*, 186-213. https://doi.org/10.1086/368687

Schlotte, K. H. (2005). B. L. van der Waerden, Moderne Algebra. En I. Grattan-Guinness, (Ed)., *Landmark Writings in Western Mathematics 1640-1940* (pp. 901-916). Elsevier. https://doi.org/10.1016/B978-044450871-3/50151-0

Soto-Andrade, J. (2015). La Didáctica de la Matemática vista desde la Facultad de Ciencias de la Universidad de Chile. *Revista Anales, Séptima Serie* (8), 97-117. https://doi.org/10.5354/0717-8883.2015.37311

Tafelmacher, A. (1892a). Sobre el teorema de Fermat: de que la ecuación $x^n + y^n = z^n$ no tiene solución en números enteros x, y, z i siendo $n>2$. *Anales de la Universidad de Chile,* 271-300.

Tafelmacher, A. (1892b). Sobre el teorema de Fermat: de que la ecuación $x^n + y^n = z^n$ no tiene solución en números enteros x, y, z i siendo $n>2$. (Conclusión). *Anales de la Universidad de Chile,* 417-437.

Tafelmacher, A. (1893a). Sobre los métodos para la enseñanza de las matemáticas en los liceos (I). *Anales de la Universidad de Chile*, 35-59.

Tafelmacher, A. (1893b). Sobre la ecuación $x^4+y^4=z^4$. *Anales de la Universidad de Chile,* 307-320.

Tafelmacher, A. (1897). La ecuación $x^3+y^3=z^2$ y una demostración nueva del teorema de Fermat para el caso de las sestas potencias. *Anales de la Universidad de Chile*, 63-80.

Van der Waerden, B. L. (1930-1931). *Moderne Algebra* (2 vols). Springer-Verlag. https://doi.org/10.1007/978-3-662-42016-4

Van der Waerden, B. L. (1980). *A History of Algebra from al-Khwärizml to Emmy Noether.* Springer Verlag.

World Economic Forum. (2020). *The Future of Jobs Report 2020.* http://www3.weforum.org/docs/WEF_Future_of_Jobs_2020.pdf

Wußing, H., y Arnold, W. (Eds). (1989). *Biographien bedeutender Mathematiker: eine Sammlung von Biographien.* Volk und Wissen Volkseigener.