Pertinencia de la demostración matemática para el estudio del análisis real en la Universidad Estatal a Distancia de Costa Rica.

Luis Fernando Ramírez Oviedo[1]

[1]Universidad Estatal a Distancia, San José, Costa Rica
lramirez@uned.ac.cr

Abstract. En los procesos de enseñanza y aprendizaje de un curso introductorio de análisis real, como parte de la carrera de Enseñanza de la Matemática de la Universidad Estatal a Distancia (UNED), en ocasiones, surgen cuestionamientos entre el estudiantado acerca de la necesidad y pertinencia del uso de las diferentes técnicas de demostración matemática, como estrategia de mediación y evaluación. En el presente ensayo se establecen elementos que resaltan la importancia de la demostración y sus métodos en la formación inicial de docentes de matemática para la enseñanza costarricense.

Diferentes investigadores en Didáctica de la Matemática (Crespo, 2005a; Esteven et al., 2018; Azcárate y Camacho, 2003) han señalado la importancia de la demostración como estrategia para la enseñanza de la matemática, sin embargo, este trabajo se enfoca en los principales aspectos que destacan la pertinencia de la demostración en el aprendizaje o apropiación de los conceptos de análisis real en la formación inicial de docentes de matemática en la UNED.

Keywords: Demostración matemática, enseñanza de la matemática, formación de profesores.

1 Introducción

La carrera de Enseñanza de la Matemática de la Universidad Estatal a Distancia (UNED) de Costa Rica forma profesores de matemática para la enseñanza media y superior costarricense. Como parte del plan de estudios, se encuentra una serie de asignaturas relacionadas con el análisis matemático: lógica y teoría de conjuntos, álgebra y funciones, cálculo diferencial, cálculo integral, cálculo superior y análisis real. Este último, sin duda, alguna formaliza una gran cantidad de conceptos elementales en la formación de los futuros docentes y la formalidad con que se abordan los conceptos es la propia de un curso clásico de análisis matemático.

Para muchos matemáticos, es evidente la pertinencia del abordaje de demostraciones matemáticas para la formación profesional de futuros docentes de matemática Leikin et al. (2018), ya que en su formación resulta natural y necesario validar el conocimiento matemático. Sin embargo, para los estudiantes, en su etapa de formación inicial en la carrera de Enseñanza de la Matemática, podría no ser clara la importancia de la demostración e incluso podrían considerar que el desarrollo de estas habilidades no se requiere para su práctica profesional, aun cuando el Ministerio de Educación Pública (2012) en sus programas de estudio recomienda utilizar demostraciones matemáticas simples para desarrollar la habilidad de razonamiento y argumentación. En el presente trabajo, se trata de aclarar brevemente la pertinencia de la demostración matemática, expresando para ello algunas reflexiones concretas acerca de la importancia de un enfoque lógico que garantice la comprensión adecuada de los objetos matemáticos para su correcta enseñanza.

2 Sobre el análisis real y el cálculo

El análisis matemático moderno es una rama de la matemática que estudia las propiedades algebraicas y topológicas de los conjuntos, a través de dos conceptos clave: convergencia y continuidad. Un curso universitario introductorio de análisis real en una variable estudia las propiedades del conjunto de los números reales, su axiomatización o posible construcción, así como los conceptos más elementales que permiten avanzar en el estudio de espacios más generales, como lo son los conceptos de derivada, integral, sucesión, series numéricas y series de funciones, entre otros.

Muchos de los conceptos matemáticos tratados en un curso de análisis real son usualmente abordados en un curso de cálculo para ingenierías u otras áreas como en ciencias de la salud o ciencias económicas, por ejemplo, conceptos como límite de una función, derivadas, integrales, series numéricas, entre otros. Sin embargo, el tratamiento que reciben estos conceptos desde el análisis es mucho más riguroso, ya que las propiedades y proposiciones establecidas sobre los conceptos matemáticos que se demuestran en el curso de análisis se abordan usualmente con un enfoque constructivo, recreando las conexiones entre los conceptos que dan origen a las fórmulas que se estudian directamente en un curso clásico de cálculo.

La argumentación explícita, que sigue una coherencia lógica en cada una de las demostraciones del análisis real, permite validar generalizaciones sobre los objetos matemáticos, así como establecer las propiedades de estos, que en algunos casos pueden parecer evidentes, pero cuya confirmación no puede obtenerse mediante simples cálculos, debido a la exactitud que solo la lógica formal puede brindar en la matemática. Para Crespo y Farfán (2005), en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática el objetivo de la demostración es ayudar a validar objetivamente el conocimiento científico, en este caso, los objetos matemáticos a través del razonamiento.

Como se menciona en Azcárate y Camacho (2003), a un nivel elemental, las descripciones se construyen sobre la experiencia, mientras que en un nivel avanzado se requiere de un conocimiento formal, ya que las propiedades de los objetos matemáticos se construyen a partir de definiciones y proposiciones, de modo que las características del análisis real como parte del análisis moderno, se clasifica dentro de un nivel avanzado de la matemática universitaria y su tratamiento debe ser formal y riguroso.

Claramente, la complejidad y abstracción que representa el desarrollo de la demostración de algunas propiedades de los conceptos en estudio en el análisis versus lo concreto de aplicar estas propiedades en el cálculo podría considerarse un obstáculo para el aprendizaje de la matemática de los futuros docentes y esto podría generar que los docentes en formación se declinen por aplicar las fórmulas y no por escudriñar los conceptos formalmente. Desde esta perspectiva, Blázquez et al. (2006) contrastan, mediante una investigación, la conceptualización formal de límite que se utiliza tradicionalmente en el estudio del análisis real, con una conceptualización más intuitiva, denominada aproximación óptima que utiliza cálculos "simples", y una representación gráfica del concepto de límite. Indican que los estudiantes tienen mayor facilidad con el método intuitivo que con el método formal; sin embargo, esta representación que puede favorecer un primer acercamiento carece de los elementos para continuar con el estudio de las propiedades de los límites, las cuales requieren del uso de la definición formal.

3 La demostración en la construcción de ciertos objetos matemáticos.

Para Socas y Camacho (2003), conocer plenamente algunos objetos matemáticos es estrictamente necesario para desarrollar procesos de enseñanza y aprendizaje adecuados, de modo que el conocimiento matemático constituye el punto de partida para su propia enseñanza. Es por esta razón que, en la formación inicial de docentes, que se encargarán de mediar procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática tanto en currículos a nivel de secundaria como universitario, debe garantizarse una sólida comprensión de los conceptos y la forma en que se originaron. Crespo (2008) destaca que las diferentes concepciones de demostración dependen del contexto social y temporal en que tuvieron origen y cómo estos han evolucionado, pasando de lo intuitivo a la formalización que les permite integrarse desde las diferentes ramas de la matemática.

Dos ejemplos clásicos de como la formalidad y rigurosidad de la argumentación lógico-deductiva han favorecido la generación de conceptos son la teoría de Galois, que surge ante la rigurosidad con que se enfrentó el problema de determinar una fórmula general para encontrar los ceros de un polinomio de quinto grado en términos de sus coeficientes, y luego las geometrías no euclídeas, que surgieron ante la imposibilidad de argumentar deductivamente el quinto postulado de la obra base de la geometría euclídea "*Elementos*" y la posterior negación de este.

Ahora, considere a modo de ejemplo el conjunto de los números reales y plantee las siguientes interrogantes:

- ¿Cómo surge el conjunto de los números reales?
- ¿En qué formas puede construirse este conjunto?
- ¿Qué diferencias existen entre la construcción que plantea Richard Dedekind versus la construcción de Georg Cantor?

Para responder a estas preguntas, se requiere un estudio detallado de los conceptos, axiomas y propiedades del campo de los números racionales, así como de las demostraciones que permiten establecer un "nuevo conjunto", ya sea formado por las clases de equivalencia de sucesiones (de números racionales) de Cauchy o por las "cortaduras" definidas por Dedekind. Sin embargo, resulta difícil, explorar "el origen" de los números reales, a través de algoritmos o cálculos numéricos. En definitiva, se requiere de un manejo adecuado de las técnicas y funciones de la demostración para la comprensión lógica que sigue la construcción de este conjunto, ya que, como menciona Crespo (2005b), una de las funciones de la demostración es de descubrimiento. Esta va más allá de la intuición y surge de las propiedades que cumple cierto objeto y que se describen con argumentación deductiva.

Referente al ejemplo anterior, la construcción de los números reales forma parte del currículo de los futuros profesores que, a su vez, deben enfrentarse a la eventual tarea de introducir a sus alumnos de secundaria en el estudio del conjunto de los números reales y sus subconjuntos más conocidos. Por esta razón deberán tener un vasto conocimiento sobre este conjunto. Como punto de partida, el docente debe ser capaz de responderse a sí mismo algunas preguntas que pueden surgir en una clase de matemática de enseñanza media por parte de los estudiantes como:

- ¿De dónde salen los números reales?
- ¿Quién los inventó?
- ¿Para qué sirven?

Ahora, ¿está el profesor en capacidad de responder estas preguntas de forma espontánea? De lo contario, cómo podría un docente desarrollar procesos de enseñanza y aprendizaje sobre un objeto que no conoce adecuadamente. Se requiere conocer este conjunto con profundidad y las formas en que se ha construido, a través de la formalización lógica, para poder brindar una respuesta acertada a estas tres preguntas que parecen muy simples, pero que conllevan a una abstracción muy grande.

Por su parte, Jaramillo y Sánchez (2014) presentan una propuesta novedosa para construir los números reales, desarrollada por Fred Richman, en contraposición a la presentación axiomática que realizan los docentes en la enseñanza media. Sin embargo, se requiere una comprensión inicial de los métodos de Cantor y Dedekind para poder contrastar las ventajas de esta última en la formación de estudiantes en análisis real como futuros profesores. Estas construcciones presentan un alto grado de formalidad, el cual, solamente, a través de un manejo consolidado de las diferentes técnicas de demostración matemática, alcanzará el estudiante de análisis real la comprensión de los conceptos y las proposiciones involucradas, donde la intuición puede constituirse en un obstáculo.

4 La argumentación más allá de la intuición

Pérez (2003) presenta una frase del matemático Gilbert Strang: “nuestro trabajo no es enteramente fácil: …tenemos que explicar las ideas de Newton, con la notación de Leibniz con alumnos que no son tan aptos como Cauchy” (p. 8). Los objetos matemáticos que estudia el análisis real en el siglo XXI han evolucionado y han experimentado procesos de formalización, abandonando los cálculos basados en la intuición geométrica de Newton o Leibniz, gracias al aporte de matemáticos como Cauchy, Weierstrass, Dedekind y Cantor, entre otros.

La formalidad que presenta cada definición, cada teorema, cada proposición que se ha demostrado, partiendo de una base lógica de argumentos ha generado que la enseñanza y aprendizaje de la matemática en la actualidad requiera de un manejo adecuado de las diferentes técnicas de demostración matemática, basadas en principios lógicos, dejando la intuición solamente como un complemento, que favorece en algunos casos una mejor representación cognitiva de cada objeto en estudio o un punto de partida para la resolución de problemas.

Un ejemplo de cómo la rigurosidad del estudio de los conceptos de análisis real favorece su aprendizaje es el poder explicar a los estudiantes que en el intervalo real $I =]0,1[$ existen tantos números reales como en todo $\mathbb{R}$. La intuición puede indicar que este resultado es falso, sin embargo, la rigurosidad de una demostración y el uso de un concepto como la biyectividad de una función puede permitir a un docente desarrollar esta idea con sus estudiantes de enseñanza media o universitaria.

Otros ejemplos que podrían mencionarse de objetos de estudio en el curso de análisis real y con implementación directa en la enseñanza de la matemática son la densidad de los números racionales sobre los reales o el principio de arquimedianidad, entre otros, conceptos que pueden ser muy abstractos para abordarlos mediante ejemplos concretos y que su verificación solamente puede lograse, a través de deducciones lógicas, es decir mediante de las técnicas de demostración.

Los procesos de demostración matemática permiten justificar y validar, como lo señalan Zakaryan y Sosa (2001). Estos rescatan la importancia del conocimiento del docente sobre las diferentes técnicas de demostración como método para validar la matemática, tanto en un nivel elemental, como lo es la secundaria, hasta un nivel superior en las universidades. La demostración matemática es integral, pues permite establecer vínculos que dan continuidad a la evolución de los objetos matemáticos con múltiples intersecciones en las diferentes ramas de esta disciplina científica que, a su vez, sirven de base para el desarrollo de otras ciencias como la física, la química y la biología, entre otras, que carecen en muchas ocasiones de los mecanismos adecuados para comprobar por medio de ensayos de campo de la veracidad de sus postulados.

5 Las técnicas de demostración y su relación con algunos conceptos.

Según Alfaro et al. (2019), la demostración matemática debe formar parte del conocimiento especializado del profesor, es decir que, en sus procesos de formación inicial, debe consolidar su conocimiento en las diferentes técnicas de demostración y aplicarlas en los diferentes cursos de matemática incluidos en su currículo universitario.

Algunas de las técnicas de demostración matemática más empleadas en los diferentes cursos de matemática, especialmente en análisis real son la demostración directa, la demostración por reducción al absurdo, la demostración por contraposición, por inducción matemática, entre otras.

El estudiante de análisis real debe tener claridad sobre en qué momento debe emplear uno u otro método de demostración, ya que el abordaje por un método de demostración u otro puede aumentar el nivel de dificultad exponencialmente, lo cual puede conducir a errores graves o una especie de "estancamiento", por parte del estudiante en la obtención de la prueba. Un ejemplo clásico es demostrar la unicidad del cero como elemento neutro de la suma en el campo de los números reales. Este tipo de proposición se aborda usualmente por reducción al absurdo, suponiendo que existe un segundo elemento neutro con respecto de la suma y llegando a una contradicción.

Como señalan Arnal y Oller (2017), las diversas funciones de la demostración deben presentarse en el aula, como parte de las estrategias de mediación, para alcanzar una mejor comprensión de los conceptos matemáticos, sin embargo, para ello los docentes deben tener un amplio conocimiento de estas técnicas.

6 El complemento Inductivo-Deductivo

Según Ascencio (2021), existe una preocupación sobre la forma en que estudiantes y docentes universitarios abordan la demostración como procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática, ya que predominan los esquemas de demostración empírica y en muchos casos se carece de una estructura deductiva. El problema no radica en que se utilice la intuición en los procesos de demostración, ya que la intuición, así como los procesos inductivos, no se encuentran opuesto a las ideas formales y los métodos deductivos. Por el contrario, como lo señalan Angulo et al. (2021) deben complementarse: "el rigor y la intuición, estas dos componentes se complementan, forman parte de un mismo elemento" (p. 13).

Conocer las técnicas de demostración y aplicarlas correctamente es un reto para los estudiantes de un curso de análisis real; pero, además, lograr plantear y resolver problemas de demostración partiendo de un método inductivo es una habilidad que también debe fomentarse. No solamente son válidos los procesos de demostración deductivos, existe una gran importancia en los métodos inductivos, como también lo señala Esteven et al. (2018), para que el mismo estudiante sea capaz de generar sus propias conjeturas. Además, según Godino y Recio (2001), en la enseñanza y aprendizaje de la matemática conviven las distintas formas de razonamiento: el empírico-inductivo y el lógico-deductivo (en sus distintas modalidades, transformacionales y axiomáticas) y en la formulación de conjeturas, ejemplos, contraejemplos y generalizaciones.

7 Conclusiones

La naturaleza de un curso introductorio o avanzado de análisis real requiere un manejo adecuado de las principales técnicas de demostración matemática y comprender adecuadamente sus funciones, para garantizar la comprensión de los objetos matemáticos propios del análisis matemático moderno.

La demostración, a través de un razonamiento deductivo, permite argumentar la validez de proposiciones referentes a los conceptos matemáticos propios del curso, con el fin de establecer propiedades de los objetos.

La formalización de los conceptos matemáticos permite establecer generalizaciones y reconstruir fórmulas propias del cálculo, establecer conjeturas y resolver problemas, lo cual debe tenerse en cuenta como insumo para fortalecer la formación profesional de futuros docentes de cursos universitarios iniciales, así como de cursos más elementales en la enseñanza media.

El conocimiento profundo de los conceptos matemáticos, la forma en que se generaron, cómo han evolucionado y las diferentes conexiones con otros conceptos de la misma rama de la matemática u otra rama permiten al docente una mayor concepción de este, generándose un mayor rango para justificar adecuadamente a sus estudiantes sobre la importancia en el estudio de estos conceptos, durante sus procesos de enseñanza y aprendizaje y su utilidad en el contexto de su formación.

Referencias

1. Alfaro, C., Flores, P. y Valverde, G. (2019). La demostración matemática: significado, tipos, funciones atribuidas y relevancia en el conocimiento profesional de los profesores de matemáticas. *Uniciencia*, *33*(2), 55-75.

2. Angulo, C., Arbañil, R., Huamán, Z. y Rubio, M. (2021). Reflexiones sobre la aplicación de la Matemática Humana de Hersh en la enseñanza superior latinoamericana. *Dilemas contemporáneos: educación, política y valores*, *8*(SPE2).

3. Arnal, A. y Oller, A. (2017). Formación del profesorado y demostración matemática. Estudio exploratorio e implicaciones. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, *31*(57), 135-157.

4. Ascencio, E. B. Conjetura y demostración en el aula en la formación de docentes. *Rev. Interamericana de Investigación, Educación...*, *14*(1), 177-205. (2021).

5. Azcárate, C. y Camacho, M. (2003). Sobre la investigación en didáctica del análisis matemático. *Edición Especial: Educación Matemática*, *135*.

6. Blázquez, S., Ortega, T., Gatica, S., y Benegas, J. Una conceptualización de límite para el aprendizaje inicial de análisis matemático en la universidad. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, *9*(2), 189-209. (2006).

7. Crespo, C. (2005a). *El papel de las argumentaciones matemáticas en el discurso escolar. La estrategia de deducción por reducción al absurdo.* (Tesis de Maestría, Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada).

8. Crespo, C. (2005b). La importancia de la argumentación matemática en el aula. *Premisa*, 24, 23-29.

9. Crespo, C. y Farfán, R. (2005). Una visión socioepistemológica de las argumentaciones en el aula. El caso de las demostraciones por reducción al absurdo. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, RELIME*, *8*(3), 287-317.

10. Crespo, C. (2008). Intuición y razón en la construcción del conocimiento matemático. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (Vol. 21, pp. 717-727). Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

11. Esteven, J., Berenguer, I. y Sánchez, A. (2018). Método didáctico para reforzar el razonamiento inductivo-deductivo en la resolución de problemas matemáticos de demostración. *REFCalE: Revista Electrónica Formación y Calidad Educativa. ISSN 1390-9010*, *6*(2), 17-32.

12. Godino, J. y Recio, Á. (2001). Significados institucionales de la demostración: implicaciones para la educación matemática. *Enseñanza de las Ciencias*, *19*(3), 405-414.

13. Gutiérrez, Á. (2005). Aprendizaje de la demostración matemática en enseñanza secundaria. En C. J. Luque (Ed.), *Memorias XV Encuentro de Geometría y III encuentro de Aritmética* (pp. 573-593). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

14. Jaramillo, I. y Sánchez, F. (2014). *La construcción de los números reales por Fred Richman y sus aportes para la compresión de los números reales en el contexto de formación de profesores.* [Tesis de licenciatura no publicada, Universidad del valle]. Repositorio Digital Univalle.

15. Leikin, R., Zazkis, R. & Meller, M. (2018). Research mathematicians as teacher educators: focusing on mathematics for secondary mathematics teachers. *J Math Teacher Educ* 21**,** 451–473.

16. Ministerio de Educación Pública. (2012). Programas de Estudio en Matemáticas para la Educación General Básica y el Ciclo Diversificado. San José, Costa Rica: autor.

17. Pérez, P. (2003). *Estudio de los conceptos básicos del análisis matemático encuadrado en un modelo educativo.* Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 16(3), pp. 1-16.

18. Recio, A. (2002). La demostración en matemática: Una aproximación epistemológica y didáctica. In *Investigación en educación matemática: Quinto Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, Almería, 18-21 septiembre 2001.* (pp. 27-44). Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM.

19. Socas, M. y Camacho, M. (2003). Conocimiento matemático y enseñanza de las matemáticas en la educación secundaria. Algunas reflexiones. *Edición Especial: Educación Matemática*, 151.

20. Zakaryan, D. y Sosa, L. (2001). Conocimiento del profesor de secundaria de la práctica matemática en clases de geometría. *Educación Matemática*, *33*(1).