

A PRODUÇÃO DE CONHECIMENTO SOBRE SÓLIDOS GEOMÉTRICOS À LUZ DO MODELO VAN HIELE

Gilberto Vieira

Universidade Cruzeiro do Sul / gilbertoeducador@yahoo.com.br

Norma Suely Gomes Allevato

Universidade Cruzeiro do Sul / normallev@gmail.com

Resumo

A Geometria Escolar tem se mostrado um tema de grande interesse da comunidade de pesquisadores e educadores matemáticos e um dos referenciais teóricos mais adotados é o modelo van Hiele de desenvolvimento do pensamento geométrico. Este trabalho, além de apresentar a descrição do modelo van Hiele, enfatizando as características de cada nível de classificação do pensamento geométrico, tem como objetivo discutir as contribuições e limitações do referido modelo. A pesquisa envolveu a realização de uma tarefa exploratório-investigativa sobre sólidos geométricos por estudantes de sexto ano do Ensino Fundamental de uma escola pública do interior do estado de São Paulo. A tarefa constituiu-se na construção e classificação de alguns sólidos geométricos e foi conduzida pelo pesquisador, que também era o professor de Matemática da turma. Trata-se de uma pesquisa de natureza qualitativa que buscou analisar, à luz do modelo van Hiele, a produção do conhecimento geométrico pelos alunos manifesta em seus diálogos e registros. Também foram consideradas como dados da pesquisa, as anotações do pesquisador realizadas em diário de campo contendo as descrições e as impressões sobre o desenvolvimento das tarefas. Os dados analisados revelaram que o modelo van Hiele consegue explicar de forma satisfatória o desenvolvimento do pensamento geométrico relacionado à classificação de sólidos geométricos apesar de algumas críticas concernentes à heterogeneidade das turmas e à autonomia dos alunos.

Palavras-chave: Educação Matemática, Ensino de Geometria, Modelo van Hiele, Pensamento Geométrico

Introdução

No que se refere à Educação Matemática, a Geometria Escolar consolidou-se como um tema de grande interesse por parte de pesquisadores e educadores matemáticos. No Brasil, o interesse pelo ensino e pela aprendizagem de Geometria em sala de aula foi fortemente impulsionado, na década de 1990, por pesquisas que tratavam do abandono do ensino de Geometria, suas causas, aspectos históricos, influências e reflexos nas práticas escolares e na aprendizagem dos estudantes, dentre as quais

destacamos os trabalhos de Pavanello (1989) e Lorenzato (1995). Esses autores assinalaram vários fatores determinantes para o descaso com a Geometria e seu conseqüente abandono em sala de aula como a influência curricular do Movimento da Matemática Moderna, o despreparo de muitos docentes em relação aos conteúdos geométricos e às estratégias que poderiam ser utilizadas para propiciar a produção de conhecimentos geométricos e o tratamento excessivamente técnico e compartimentado destinado à Geometria pelos livros didáticos e propostas curriculares vigentes.

A negligência com o ensino de Geometria teve como conseqüência uma aprendizagem fortemente apoiada na memorização de fórmulas e na repetição de procedimentos, deixando o desenvolvimento do pensamento geométrico dos estudantes em segundo plano. A partir desse contexto, surge uma tendência de dar nova forma ao ensino de Geometria, com pesquisas abordando o uso de materiais manipulativos, dobraduras, malhas quadriculadas, *softwares* de Geometria Dinâmica, resolução de problemas e tarefas exploratório-investigativas. O objetivo principal era descobrir outras formas de ensinar e aprender Geometria, diferentes das práticas até então dominantes.

Entretanto, essas pesquisas sentiam falta de orientações teóricas que discutissem a natureza do conhecimento geométrico, de que forma se dava a produção de conhecimentos geométricos e como era a relação do educando com esse tipo de conhecimento. Para tentar compreender como se dá a organização do pensamento geométrico da criança muitas pesquisas foram buscar fundamentação teórica no modelo van Hiele de pensamento geométrico.

Com o objetivo de discutir as contribuições do modelo van Hiele, apresentamos, nesse trabalho, a análise de uma tarefa sobre sólidos geométricos realizada por estudantes de sexto ano do Ensino Fundamental. Trata-se de um recorte da pesquisa de doutorado realizada pelo autor a respeito das potencialidades de tarefas exploratório-investigativas no ensino e aprendizagem de Geometria.

Nas próximas linhas descrevemos o que é o modelo van Hiele de desenvolvimento do pensamento geométrico, destacando, principalmente, as características de cada nível presente no modelo.

O modelo van Hiele de pensamento geométrico

Dina van Hiele-Geldof e seu marido, Pierre Marie van Hiele foram dois educadores e pesquisadores holandeses que realizaram seus estudos e pesquisas na direção de compreender como o comportamento dos estudantes refletem seu nível de maturidade geométrica. Baseados em seus trabalhos de doutoramento, criaram um modelo de desenvolvimento do pensamento geométrico, fortemente influenciado pelas ideias de Freudenthal (1973), que havia orientado seus estudos na Universidade de Utrecht (Holanda) e nas ideias de Piaget. “A teoria desenvolvida pelos educadores van Hiele possui uma forte base estruturalista e apoia-se nas contribuições de Piaget sobre o desenvolvimento cognitivo do ser humano, sem deixar de lado a didática da Matemática” (PEREIRA; SILVA; MOTTA JÚNIOR, 2005, p. 22).

De acordo com o modelo de Dina e Pierre Van Hiele a maturidade geométrica dos estudantes pode ser classificada em cinco níveis ou estágios com um progressivo grau de sofisticação. “O modelo sugere que os alunos progridem segundo uma sequência de níveis de compreensão de conceitos, enquanto eles aprendem Geometria” (NASSER; SANT’ANNA, 2010, p. 6).

Clements e Battista (1992) discorrem sobre algumas características da teoria van Hiele, a saber: os níveis são sequenciais e seguem uma hierarquia, ou seja, estar incluído em um nível mais avançado da hierarquia significa que já se apresenta domínio dos níveis precedentes; conceitos compreendidos implicitamente em um nível tornam-se explícitos no nível seguinte; a progressão para um nível mais avançado depende mais da instrução (ação do professor e tipos de tarefas propostas) do que da idade biológica do indivíduo; cada nível possui a sua própria linguagem (seus símbolos próprios e o conjunto de relações conectando esses símbolos) e uma relação considerada correta em um nível pode revelar-se incorreta em outro.

Apesar de, originalmente, a teoria indicar cinco níveis de pensamento geométrico (1- visualização; 2- análise; 3- dedução informal; 4- dedução formal; 5- rigor), algumas pesquisas (SENK, 1989; USISKIN, 1982) sugerem a existência de um nível mais básico que o primeiro nível (visualização). Há de se destacar que, na literatura, encontram-se diferentes maneiras de enumerar e denominar os níveis do modelo.

No primeiro nível, denominado visualização, os estudantes são capazes de identificar e trabalhar com formas geométricas de acordo com a aparência das formas. Eles reconhecem as figuras e são capazes de representá-las como imagens mentais e utilizam-se de modelos visuais e de imagens conhecidas para identificar figuras. Por exemplo, podem dizer que uma determinada figura é um retângulo porque se parece com uma porta. Segundo van Hiele (1999), no nível da visualização as figuras são compreendidas de acordo com sua aparência. Entretanto, nesse nível, as propriedades das formas não são abstraídas das formas manipuladas. Embora as figuras sejam determinadas por suas propriedades, os estudantes ainda não demonstram consciência delas. É um nível fortemente influenciado pela percepção, no qual são valorizadas atividades de observação, manipulação, construção, separação, composição e decomposição. É durante a transição para o estágio seguinte que os estudantes começam a associar figuras com características e propriedades comuns.

O segundo nível (análise) é marcado pelo reconhecimento e caracterização das figuras geométricas por meio de suas propriedades. As propriedades são apreendidas experimentalmente, por meio de atividades de observação, de medição e desenhos. Os estudantes descobrem que algumas propriedades, quando combinadas, referem-se a uma classe de figuras. Entretanto, nesse estágio, os estudantes não conseguem estabelecer relações entre as classes de figuras (por exemplo, nesse estágio um estudante poderia dizer que determinada figura não é um retângulo porque é um quadrado). “Nesta fase o aluno começa a discernir as características e propriedades das figuras, mas não consegue, ainda, estabelecer relações entre essas propriedades e nem entende as definições ou vê inter-relações entre figuras”. (PEREIRA; SILVA; MOTTA

JÚNIOR, 2005, p. 25). Nesse nível os alunos começam a apreciar que uma coleção de formas é composta devido às suas propriedades.

No terceiro nível (dedução informal) os estudantes conseguem trabalhar com definições abstratas, distinguir condições necessárias e suficientes para determinado conceito e até mesmo compreender algumas argumentações lógicas no domínio da Geometria. Eles conseguem classificar figuras seguindo uma hierarquia (ordenando as propriedades, por exemplo) e oferecer, de maneira informal, argumentos para justificar suas classificações. Os estudantes podem argumentar, por exemplo, que apesar de um quadrado possuir quatro lados de mesmo tamanho, ele pode ser classificado como um retângulo porque apresenta as mesmas propriedades de um retângulo. Nesse nível, os estudantes também são capazes de descobrir algumas propriedades geométricas por meio de deduções informais. Por exemplo, eles podem deduzir que em qualquer quadrilátero a soma das medidas de seus ângulos internos deve ser igual a 360° , pois qualquer quadrilátero pode ser decomposto em dois triângulos, cuja soma das medidas dos ângulos internos resulta em 180° . Conforme os estudantes vão descobrindo as propriedades das figuras, eles sentem necessidade de organizar essas propriedades. Essa organização lógica das ideias é a primeira manifestação do verdadeiro pensamento dedutivo, embora os estudantes ainda não compreendam que a dedução lógica é o método para se estabelecer verdades geométricas. Para van Hiele (1999), nesse nível os alunos começam a pensar sobre as propriedades dos objetos geométricos e estabelecer relações entre essas propriedades. Os estudantes utilizam as propriedades que já conhecem para formular definições e utilizá-las para justificar seu raciocínio.

No nível 4 (dedução formal) os estudantes são capazes de examinar mais do que apenas as propriedades das formas. “Neste estágio o aluno analisa e compreende o processo dedutivo e as demonstrações com o processo axiomático associado” (PEREIRA; SILVA; MOTTA JÚNIOR, 2005, p. 25). Os alunos começam a sentir a necessidade de um sistema lógico estruturado, com axiomas, definições, teoremas e postulados, no qual serão capazes de construir suas provas e demonstrações.

O nível 5 (rigor) é o nível mais elevado do modelo van Hiele. “Os objetos de atenção são os próprios sistemas axiomáticos, não apenas as deduções dentro de um sistema” (VAN DE WALLE, 2009, p. 443). Neste estágio o aluno está habilitado a trabalhar com diferentes sistemas axiomáticos, como as geometrias não euclidianas, e compará-los. É o nível que menos atenção tem recebido dos pesquisadores. A grande maioria das pesquisas que se utilizam do modelo van Hiele abordam, predominantemente, os três primeiros níveis e, eventualmente, o quarto nível, pois a Geometria costumeiramente trabalhada na escola não ultrapassa o nível da dedução formal.

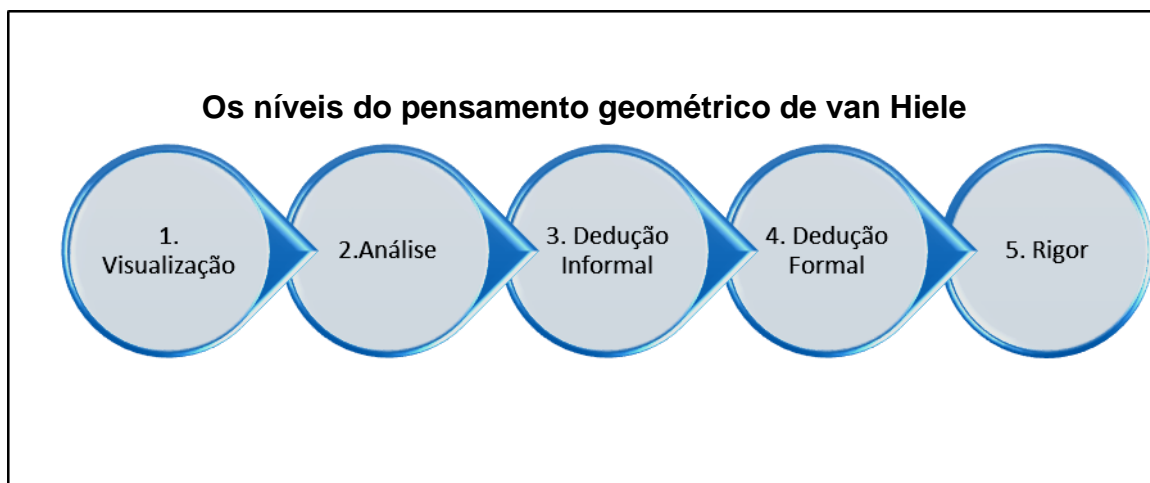


Figura 1 – Os níveis do pensamento geométrico de van Hiele

Fonte: próprio autor

O modelo van Hiele de pensamento geométrico pressupõe, portanto, uma classificação do desenvolvimento do pensamento geométrico em níveis muito bem delimitados. Considerando a necessidade de se implementar em sala de aula propostas para o ensino de Geometria que ultrapassassem a simples memorização de fórmulas e propiciassem, de fato, a produção de conhecimentos geométricos, foi elaborada uma sequência de tarefas-exploratório investigativas sobre alguns conteúdos geométricos para ser trabalhada com alunos de sexto ano do Ensino Fundamental. Tarefas exploratório-investigativas são tarefas de caráter aberto que colocam os alunos em um genuíno momento de atividade matemática, ocasião essa em que investigam relações, conjecturam, experimentam e estabelecem conclusões, podendo-se estabelecer um paralelo ao trabalho desenvolvido por matemáticos profissionais (VIEIRA; ALLEVATO, 2012). No presente trabalho, buscou-se identificar, no envolvimento com as tarefas, em que estágio de desenvolvimento do pensamento geométrico o aluno se encontrava. Esse exercício é importante para compreender como se dá a produção de conhecimentos geométricos pelos estudantes. Apresentamos, na próxima seção, a descrição dos sujeitos da pesquisa bem como os procedimentos metodológicos que orientaram a coleta e análise dos dados.

Procedimentos metodológicos

As tarefas exploratório-investigativas abordando conteúdos geométricos foram realizadas por alunos na faixa etária entre 11 e 12 anos de idade de uma escola pública de uma cidade do interior do estado de São Paulo durante o terceiro bimestre do ano letivo de 2013. É importante destacar que, nesse trabalho, o pesquisador também era o professor de Matemática da turma.

A discussão e a reflexão sobre como se dá o desenvolvimento do pensamento geométrico de estudantes envolvidos em tarefas exploratório-investigativas assenta-se em uma análise que deve considerar as percepções, opiniões, sensações e experiências dos envolvidos. Esta pesquisa se constituiu como uma pesquisa qualitativa, na qual,

segundo Bicudo (2006), privilegiam-se procedimentos que deem conta de dados sensíveis, de concepções, de estados mentais, de acontecimentos como, as descrições de experiências e os relatos de observações. As pesquisas em educação muitas vezes assumem esse caráter qualitativo devido à natureza das questões de investigação que se colocam.

Procurou-se analisar a produção do conhecimento geométrico pelos alunos manifesta em seus diálogos e registros e observada pelo professor. Os diálogos foram observados em dois momentos: (1) durante o desenvolvimento das tarefas, momento em que os alunos, divididos em grupos, discutiam o encaminhamento das atividades propostas; e (2) durante a socialização dos resultados, momento em que cada grupo apresentava para o restante da classe suas explicações e conclusões. Os diálogos foram gravados em áudio e, posteriormente, transcritos. Os registros correspondem às resoluções escritas que foram registradas nas folhas que continham as propostas das tarefas, e na lousa, no momento de socialização dos resultados. Consideramos, ainda, como dados da pesquisa, as anotações do pesquisador realizadas em diário de campo contendo as descrições e as impressões sobre o desenvolvimento das tarefas, na tentativa de captar alguma informação relevante que tenha “escapado” às transcrições das falas dos sujeitos e aos registros escritos das atividades. Tais impressões foram desencadeadas a partir da Observação Direta (MASCARENHAS, 2011; VIANNA, 2003) das ocorrências durante a realização das atividades. Para Vianna (2003, p. 12) “a observação é uma das mais importantes fontes de informações em pesquisas qualitativas em educação”. O autor salienta que anotações cuidadosas e bem detalhadas vão constituir os dados brutos das observações.

A organização e a análise cuidadosa dos diálogos dos alunos, de suas produções escritas e das anotações do diário de campo possibilitaram o estabelecimento de relações com os níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico do modelo van Hiele, como podemos observar a seguir.

Classificação de sólidos geométricos e o modelo van Hiele

Uma das tarefas exploratório-investigativas realizadas pelos alunos foi a tarefa de classificação de sólidos geométricos. Depois de inicialmente, com o apoio do livro didático (DANTE, 2010), apresentarmos aos alunos uma primeira classificação das figuras geométricas (sólidos geométricos, regiões planas, contornos e linhas abertas), propusemos aos alunos que, reunidos em grupos, efetuassem a construção de alguns sólidos geométricos a partir de suas planificações. Com os sólidos geométricos construídos, foi solicitado aos grupos que elaborassem uma classificação, separando os sólidos geométricos de acordo com características comuns que pudessem ser observadas. Os grupos também deveriam justificar os critérios utilizados na classificação (oralmente e por escrito), os quais foram posteriormente socializados e discutidos entre os alunos e o professor. A tarefa proposta apresentava, como característica principal, o fato de não conter nenhuma indicação sobre como os alunos deveriam classificar os sólidos geométricos. Uma das características das tarefas exploratório-investigativas é justamente o caráter aberto da atividade. Nesse caso, as classificações apresentadas não poderiam

ser rotuladas como certas ou erradas, e sim encaradas como oportunidades de reflexão e discussão. Segundo Van de Walle (2009) nesse tipo de atividade os alunos devem decidir como agrupar, e não o professor. Isso permite que os alunos realizem a tarefa usando ideias que eles mesmos reconheçam e compreendam.

Uma das classificações apresentadas pelos alunos pode ser observada na Figura 2.

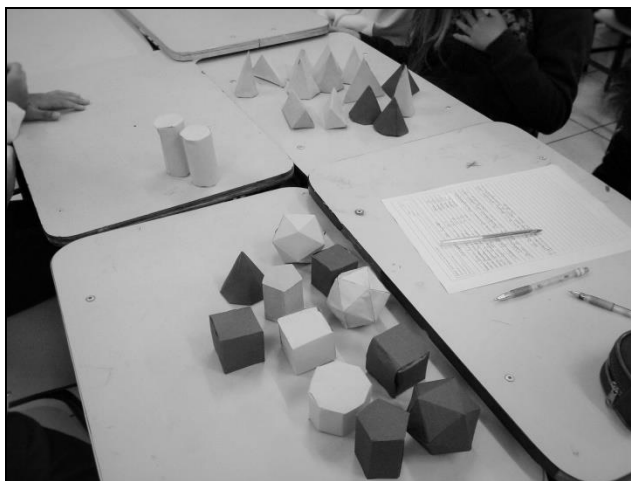


Figura 2 – Classificação de sólidos geométricos

Fonte: próprio autor

Ao serem questionados pelo professor a respeito do critério utilizado na separação dos sólidos geométricos um dos alunos do grupo que classificou os sólidos como ilustrado na Figura 2 apresentou a seguinte explicação:

Aluno A: Nós separamos as figuras em três grupos: as figuras pequenas, as figuras triangulares e os dois cilindros.

No grupo denominado *figuras pequenas* os alunos reuniram quase todos os prismas, o octaedro, o dodecaedro e o icosaedro. No grupo denominado *figuras triangulares* os alunos reuniram as pirâmides, o prisma de base triangular e o cone. No terceiro grupo os alunos reuniram apenas os dois cilindros.

Vale ressaltar que essa tarefa foi proposta como primeiro contato dos alunos com o conteúdo Sólidos Geométricos, e expressões como prismas, pirâmides e corpos redondos ainda eram desconhecidas. Assim, pudemos notar que ao elaborarem essa primeira classificação os alunos, apoiados fortemente em aspectos visuais das figuras, já apresentaram a preocupação em separar os cilindros pelo fato dessas figuras não apresentarem todas as faces planas. Dentre os poliedros, a diferença entre pirâmides e prismas também foi percebida, apesar de o prisma de base triangular ter sido colocado no mesmo grupo das pirâmides, o que pode ser justificado pelo fato de o prisma de base triangular apresentar, assim como todas as pirâmides, faces triangulares. Também destacamos o fato de o cone ter sido reunido juntamente com as pirâmides, mesmo sem possuir todas as faces planas. Mais uma vez o aspecto visual (assim como as pirâmides, o cone apresenta uma base e um vértice “oposto” à base) influenciou a decisão dos alunos.

Pode-se perceber, a partir da classificação e justificativa do aluno, que o mesmo encontra-se no primeiro nível do modelo van Hiele (visualização). O fato de a aparência ser o fator dominante nesse nível faz com que as aparências prevaleçam sobre as propriedades das formas.

Um outro grupo apresentou sua classificação conforme descrito na Figura 3.

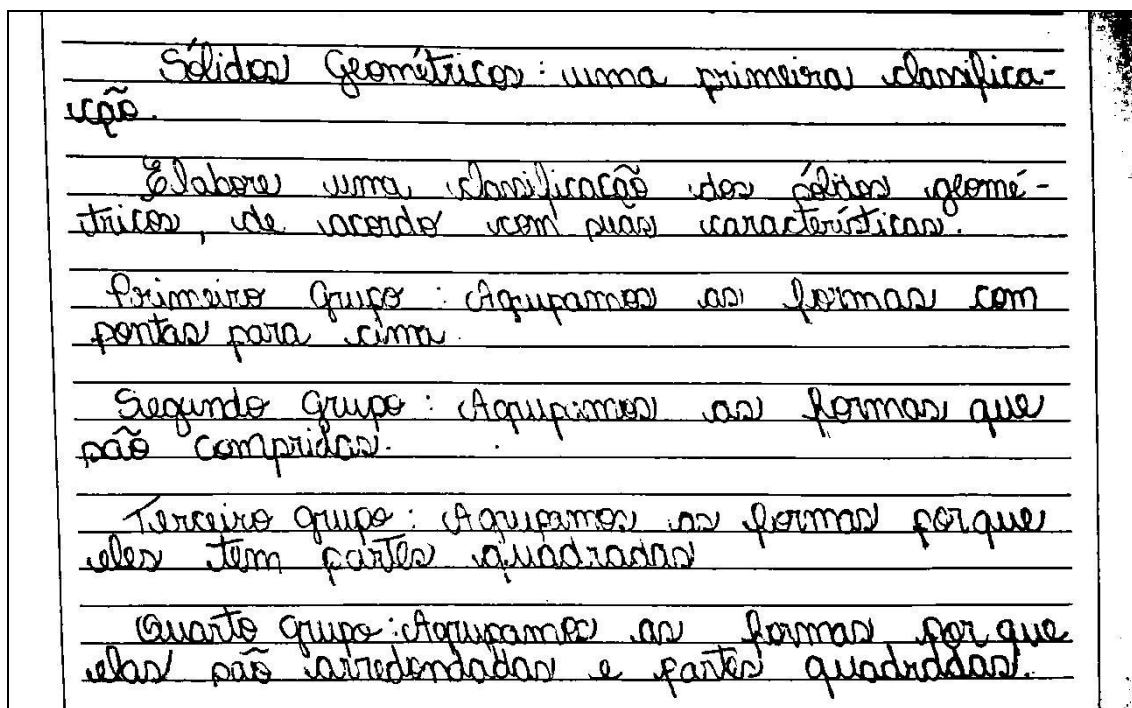


Figura 3

Fonte: próprio autor

Van de Walle (2009) explica que os estudantes no nível da visualização irão agrupar e classificar as formas baseados em suas aparências. Afirmações como “eu coloquei essas formas juntas porque são todas pontudas” irão aparecer frequentemente. O resultado disso é que os alunos nesse nível podem criar e começar a compreender as classificações das formas.

Uma outra classificação apresentada foi a seguinte:

Aluno B: Nós separamos as figuras em sete grupos. No primeiro grupo colocamos as figuras com bases triangulares; no segundo colocamos as figuras com bases retangulares; no terceiro separamos as figuras com cinco lados na base, no quarto grupo colocamos as figuras de base quadrada; no quinto grupo colocamos as figuras de base circular; no sexto, as figuras com oito lados na base e no sétimo as figuras com base de seis lados.

Nessa classificação, os alunos voltaram sua atenção para uma característica importante dos sólidos geométricos: a forma de suas bases. Ao efetuarem a separação das figuras de acordo com o formato das bases os alunos já demonstram, intuitivamente, a necessidade de separar em classes distintas os diferentes prismas e pirâmides construídos. Pode-se dizer que nesta última classificação os alunos já ultrapassaram o

nível da visualização do modelo van Hiele e se encontram no segundo nível (análise). O foco dos estudantes não está apenas na aparência das formas, mas também em suas características e propriedades.

Apesar de não apresentarem o vocabulário específico e utilizarem termos inadequados para expressarem suas observações, os alunos começaram a perceber algumas propriedades dos sólidos geométricos. Uma forma encontrada para se refletir sobre as classificações efetuadas foi a socialização de todas as classificações elaboradas pelos alunos em um momento onde se promoveu a discussão sobre quais critérios seriam mais adequados. Além de possibilitar o desenvolvimento de capacidades de comunicação matemática, esse momento tinha como objetivo oferecer a oportunidade de transição para um nível superior do modelo van Hiele. Segundo Andrade e Nacarato (2004), é no processo de negociação de significados, pautado em um rico processo de argumentação, que professores e alunos aprendem simultaneamente. Após confrontarem todas as classificações e orientados pelo professor, os alunos chegaram à divisão dos sólidos geométricos construídos em poliedros (prismas, pirâmides e outros poliedros) e corpos redondos. Também foi nesse momento, de reflexão e formalização do conhecimento produzido, que os alunos tiveram a oportunidade de desenvolver o vocabulário matemático específico, conhecendo os termos adequados a serem utilizados na descrição dos sólidos geométricos. A partir desse momento em que os alunos demonstram compreensão das propriedades geométricas das formas e utilizam essas propriedades para classificar as figuras em categorias, é possível encorajá-los a formularem conjecturas e explorarem argumentos dedutivos informais caminhando em direção ao terceiro nível do modelo van Hiele (dedução informal).

Considerações finais

Observou-se, durante a realização desta tarefa, que muitas das ações realizadas pelos estudantes encontraram explicações no modelo van Hiele. Contudo, apesar de ter se constituído em um modelo respeitado e que influenciou (e ainda influencia) inúmeras pesquisas sobre o desenvolvimento do pensamento geométrico, a teoria dos van Hiele apresenta algumas limitações.

Clements e Battista (1992) ressaltam que a teoria não estabelece critérios suficientemente claros para a classificação dos estudantes em um determinado nível e acrescentam que, algumas pesquisas têm revelado a possibilidade de estudantes desenvolverem concomitantemente capacidades relacionadas a dois níveis diferentes do modelo van Hiele e, inclusive, a possibilidade de estudantes alcançarem um nível superior sem ter desenvolvido completamente as habilidades do nível precedente.

Embora seja uma crítica válida, a inconsistência dos níveis hierárquicos do modelo não foi observada na tarefa realizada nesta pesquisa.

Pereira, Silva e Motta Júnior (2005) consideram que há algumas limitações referentes à importância das diferenças individuais e à autonomia dos estudantes no processo de aprendizagem. Para os autores o modelo van Hiele considera os alunos como um grupo homogêneo no qual os estilos cognitivos diferenciados e as distintas

preferências de aprendizagens não são levadas em consideração, além de não permitir que os alunos atinjam um desenvolvimento matemático autônomo, muitas vezes conferindo aos alunos um comportamento passivo diante das tarefas que lhes são propostas.

A heterogeneidade presente em sala de aula é uma realidade que pode ser conferida em nossa investigação. Uma maneira de tentar promover a autonomia e transferir do professor para o aluno a responsabilidade pela produção do conhecimento geométrico é a adoção de estratégias de ensino que coloquem o aluno como protagonista de sua aprendizagem. As tarefas exploratório-investigativas parecem convergir para esse objetivo.

Apesar das críticas e limitações, o modelo van Hiele de desenvolvimento do pensamento geométrico é, indubitavelmente, um marco teórico que não pode deixar de ser considerado em pesquisas sobre o pensamento geométrico. A própria definição dos níveis de desenvolvimento e dos objetos geométricos com os quais se ocupam nos colocam em um movimento de reflexão sobre a ação de professores e alunos em sala de aula e nos ajuda a descortinar como se dá a evolução da aprendizagem geométrica.

Referências

ANDRADE, J. A. A.; NACARATO, A. M. Tendências didático-pedagógicas para o ensino de geometria. In: REUNIÃO ANUAL DA ANPED, 27., 2004, Caxambu. **Anais...** Caxambu: ANPED, 2004.

BICUDO, M. A. V. Pesquisa qualitativa e pesquisa qualitativa segundo a abordagem fenomenológica. In: BORBA, M. C.; ARAÚJO, J. L. (Org.). **Pesquisa qualitativa em educação matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2006. p. 101-114.

CLEMENTS, D. H.; BATTISTA, M. T. Geometry and spatial reasoning. In: GROUWS, D. A. **Handbook of research on mathematics teaching and learning**. New York: NCTM, 1992. p. 420-464.

DANTE, L. R. **Tudo é matemática** – 6ª série. 3 ed. São Paulo: Ática, 2010.

FREUDENTHAL, H. **Mathematics as an educational task**. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company, 1973.

LORENZATO, S. Por que não ensinar geometria? **Educação Matemática em Revista**, Florianópolis, v. 4, p. 3-13, jan./jun. 1995.

MASCARENHAS, D. F. M. **Dificuldades e estratégias de ensino e aprendizagem da geometria e grandezas no 5º ano de escolaridade do ensino básico nas escolas E. B. 2/3 da Madalena e E. B. 2/3 de Pedrouços do Distrito do Porto**. 2011. 478 f. Tese (Doutorado em Didática e Organização Escolar) – Faculdade de Ciências da Educação, Universidade de Granada, Granada, 2011.

NASSER, L.; SANT'ANNA, N. F. P. **Geometria segundo a teoria de van Hiele**. Rio de Janeiro: Editora do IM-UFRJ, 2010.

PAVANELLO, R. M. **O abandono do ensino de geometria**: uma visão histórica. 1989. 196 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1989.

PEREIRA, G. A.; SILVA, S. P.; MOTTA JÚNIOR, W. S. O modelo van Hiele de ensino de geometria aplicado à 5ª e 6ª séries do Ensino Fundamental. **FAMAT em revista**, Uberlândia, n. 5, p. 21-50, set. 2005.

SENK, S. L. Van Hiele levels and achievement in writing geometry proofs. **Journal for research in Mathematics Education**, v. 20, n. 3, p. 309-321, may. 1989.

USISKIN, Z. **Van Hiele levels and achievement in secondary school geometry**. Chicago: Department of Education – University of Chicago, 1982.

VAN DE WALLE, J. A. **Matemática no ensino fundamental**: formação de professores e aplicação em sala de aula. Tradução: Paulo Henrique Colonese. 6. ed. Porto Alegre: Artmed, 2009.

VAN HIELE, P. M. Developing geometric thinking through activities that begin with play. **Teaching children mathematics**, v. 5, n.6, p. 310-316, feb. 1999.

VIANNA, H. M. **Pesquisa em educação**: a observação. Brasília: Plano Editora, 2003.

VIEIRA, G.; ALLEVATO, N. S. G. Tecendo relações entre resolução de problemas e investigações matemáticas nos anos finais do Ensino Fundamental. In: SANTOS, C. A. B. et. al. **Ensino de ciências e matemática**: a produção discente na pós-graduação. São Paulo: Terracota, 2012. p. 29-47.