Sociedade Brasileira de Educação Matemática

emr

Por que $\sqrt{2}$ é irracional? Buscando explicações nos processos de experimentação mental

Willian José da Cruz[1]

Resumo: Este artigo é um dos resultados da pesquisa teórica intitulada *Os Experimentos Mentais como Metodologia Alternativa para o ensino da Matemática*. A intenção deste texto é apresentar uma discussão epistemológica sobre a ideia de números irracionais, destacando a $\sqrt{2}$. Neste contexto, apresentamos os Experimentos Mentais como uma possível metodologia alternativa para o ensino da Matemática, auxiliando o debate e levantando contradições e possibilidades na exploração da temática. Esses Experimentos são formas de expor pensamentos por meio de representações como objetos de consideração em uma dada atividade e/ou prova matemática, recorrendo a um contexto teórico bem definido. Tais Experimentos só são possíveis de serem aplicados ao ensino desta ciência se considerarmos que a Matemática é uma atividade semiótica que constrói diagramas, experimenta nesses diagramas e verifica os possíveis resultados.

Palavras-chave: Metodologia de Ensino. Epistemologia. Educação Matemática. Cognição. Comensurabilidade.

Why $\sqrt{2}$ is irrational? Seeking explanations in the processes of thought experimentation

Abstract: This article is one of the results of the theoretical research *entitled The Thought Experiments as Alternative Methodology for the teaching of Mathematics*. The intention of this text is to present an epistemological discussion about the idea of irrational numbers, highlighting $\sqrt{2}$. In this context, we present the Thought Experiments as a possible alternative methodology for the teaching of Mathematics, helping the debate and raising contradictions and possibilities in the exploration of the theme. These experiments are ways of exposing thoughts by means of representations, as an object of consideration in a given mathematical activity and/or proof, using a well-defined theoretical context. Such experiments are only possible to be applied to the teaching of this science, if we consider that Mathematics is a semiotic activity that builds diagrams, experiments in these diagrams, and verifies the possible results.

Keywords: Teaching Methodology. Epistemology. Mathematics Education. Cognition. Commensurability.

Introdução

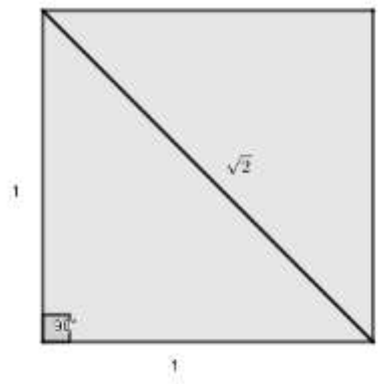
O mais famoso teorema na obra "*Os Elementos",* de Euclides, é o Teorema de Pitágoras, localizado na proposição 47 do livro I de Euclides. Esse teorema afirma que: "Nos triângulos retângulos, o quadrado sobre o lado que se estende sob o ângulo reto é igual aos quadrados sobre os lados que contêm o ângulo reto" (EUCLIDES, 2009, p. 132). Numa linguagem mais atual, esse teorema é apresentado da seguinte forma: "Em qualquer triângulo retângulo, a soma dos quadrados dos dois catetos é igual ao quadrado da hipotenusa, sendo os catetos os lados que formam o ângulo reto e a hipotenusa o lado oposto ao ângulo reto" (HERSH, 1997, p. 272

[1] Doutor em Educação Matemática pela UNIAN/SP. Professor adjunto do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora-MG, Brasil. E-mail: willian.cruz@ufjf.br – ORCID: https://orcid.org/0000-0001-7509-1021.

- tradução nossa).

Imaginando dois triângulos retângulos de catetos medindo 1 unidade, tal que formem um quadrado, como pode ser visto na figura 1, aplicando o Teorema de Pitágoras para encontrar a medida da diagonal desse quadrado, vamos verificar que essa diagonal tem que ser $\sqrt{2}$.

Figura 1 - A diagonal do quadrado de lado 1



Fonte: O próprio autor (2022).

Por outro lado, os pitagóricos descobriram que não há número inteiro ou racional que satisfaça a condição $\frac{1}{x} = \frac{x}{2}$. Isso quer dizer que não há uma razão entre dois números inteiros, primos entre si, cujo quadrado dessa razão seja igual a 2.

Há uma prova, chamada indireta, que mostra ser absurda a consideração da existência de tal razão. Essa prova parte da suposição de que há um par de números p e q, primos entre si, isto é, números que têm como maior divisor natural comum o número 1, tal que:

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2 \qquad \text{(a)}$$

Isso quer dizer que se $\frac{p}{q}$ satisfaz a condição dada, então p e q não podem ter fatores comuns à exceção de 1. Em particular, não pode ter 2 como fator comum. Se multiplicarmos membro a membro da igualdade (a) por q^2, vamos encontrar a relação

$$p^2 = 2q^2 \qquad \text{(b)}$$

O fator 2 está visível no lado direito da igualdade (b), o que sugere que o termo p^2 é um múltiplo de 2. É possível demonstrar que se p^2 é um múltiplo de 2, então p deve ser um múltiplo de 2. Podemos, dessa forma, escrever que $p = 2r$, por exemplo. Portanto,

$$p^2 = 4r^2 \qquad \text{(c)}$$

Mas como

$$p^2 = 2q^2 \qquad \text{(b)}$$

encontramos uma nova igualdade substituindo p^2 por $4r^2$ na igualdade (b), que fica:

$$4r^2 = 2q^2 \qquad \text{(d)}$$

que, simplificando, chegamos ao resultado

$$2r^2 = q^2 \qquad \text{(e)}$$

Mas isso é justamente como a igualdade (a) quando substitui p por q e r por q. Na verdade, mostramos que p e q são ambos múltiplos de 2, o que é uma contradição. Essa contradição mostra que a existência da razão $\frac{p}{q}$ tal que $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$ é um absurdo ou uma impossibilidade.

Assim, pode-se dizer que não há qualquer número inteiro ou razão que garanta a existência de $\sqrt{2}$. No entanto, ela existe como linha, segmento, diagonal do quadrado de lados medindo 1 unidade. Só não existe como número dito racional?

Hersh, buscando esclarecer essa confusa situação, argumentou que a diagonal do quadrado de lado 1unidade parece não ter comprimento, mas, por meio das operações da geometria euclidiana, podemos adicioná-la, subtraí-la, multiplicá-la e até dividi-la. E isso fez com que o autor afirmasse que “os segmentos de reta constituem um sistema aritmético mais rico do que o sistema aritmético de números” (1997, p. 273). Esse impasse traz luz a outras ideias de números para além dos números racionais.

Este artigo é um dos resultados da pesquisa teórica intitulada *Os Experimentos Mentais como metodologia alternativa para o ensino da Matemática*. A intenção deste texto é fazer uma discussão epistemológica sobre a ideia de números irracionais, a destacar a $\sqrt{2}$.

Com a compreensão de que a Matemática é uma atividade semiótica, isto é, uma atividade que constrói diagramas, experimenta nesses diagramas e verifica os resultados encontrados, é que propomos essa discussão com o entendimento de que possamos dar ao ensino de Matemática uma nova perspectiva sobre esses tipos de números, promovendo um ambiente crítico de construção de conceitos e de investigação.

Afinal, o que são esses números irracionais?

Para iniciar a discussão sobre o que poderiam ser os números irracionais, vamos conhecer um pouco sobre os pitagóricos. Silva (2007) argumenta que Pitágoras e seus seguidores talvez tenham sido os primeiros grandes matemáticos gregos. “Pitágoras de Samos viveu por volta do século VI a.C. e criou, com seus discípulos, uma seita mística na qual conviviam o racionalismo grego e os elementos do pensamento mágico de povos mais ao leste e ao sul” (SILVA, 2007, p. 32). Pela história, pouco se sabe sobre a vida de Pitágoras; assim, seus ensinamentos acabaram se dissolvendo no tempo de um passado mítico, misturando realidade e lenda. No entanto, a tradição pitagórica sobreviveu e teve, ou ainda tem, uma grande influência no pensamento e na ciência ocidental.

No século XVII, encontramos a célebre frase de Galileu Galilei, que dizia: “O livro do universo está escrito em caracteres matemáticos” (SILVA, 2007, p. 32). Na visão de Galileu, “Deus, na sua infinita sabedoria, conhece duas linguagens” (GALILEU, 2011, p. 31). A linguagem comum, que é a única que o homem comum entende, e a linguagem científica (matemática), que é rigorosa e exata. Essa segunda linguagem foi usada por Deus, segundo Galileu, para escrever o livro da natureza. Segundo esse filósofo, entender os números faz com que o intelecto humano participe da divindade. No livro de Galileu, intitulado *Diálogo Sobre os dois máximos sistemas do mundo ptolomaico e copernicano*, encontramos a seguinte citação, sobre a visão platônica dos números, enunciada pelo personagem Salviati, que fala por Galileu:

> [...] os pitagóricos tinham a máxima estima a ciência dos números e mesmo Platão admirava o intelecto humano e o considerava partícipe da divindade somente por ele entender a natureza dos números, eu o sei muito bem, nem estaria longe de fazer o mesmo juízo. Contudo, não acredito de modo algum que os mistérios, pelos quais Pitágoras e sua seita tinham em tanta veneração, a ciência dos números, sejam as tolices que estão nas bocas e nos escritos do vulgo; ao contrário, sei que eles, para que as suas coisas admiráveis não fossem expostas às injúrias e ao desprezo da plebe, condenavam como sacrilégio a publicação das mais recônditas propriedades dos números e das quantidades incomensuráveis e irracionais por eles investigadas, pregando que aquele que as tivesse manifestado seria atormentado no outro mundo (GALILEU, 2011, p. 97).

Silva (2007) escreve que os pitagóricos se tornaram conhecidos por sua teoria - em parte metafísica, em parte mágica -, que considerava que o universo se constituía de números. Esse mesmo autor argumenta que uma das mais importantes descobertas matemáticas da época de Pitágoras, e quiçá de qualquer época, foi a constituição das grandezas incomensuráveis. “Eles descobriram que a média proporcional, ou geométrica, entre a unidade e o seu dobro – isto é, o x tal que $\frac{1}{x} = \frac{x}{2}$ – não podia ser expressa em termos dessa unidade” (SILVA, 2007, p. 33).

Entretanto, se na visão dos pitagóricos tudo era constituído de números, então “todas as grandezas deveriam poder ser comparadas quanto à quantidade de unidades que contêm; isto é, duas grandezas deveriam ser comensuráveis” (SILVA, 2007, p. 33). Os pitagóricos perceberam que a média proporcional entre 1 e 2 não era comensurável com a unidade e nem com partes equivalentes dessa unidade, ou seja, “a diagonal de qualquer quadrado não é comensurável com o lado desse quadrado” (SILVA, 207, p. 33). Abriu-se então a primeira crise na Matemática com a descoberta da incomensurabilidade, a qual os matemáticos souberam superar com a teoria de Eudoxo, nos *Elementos de Euclides*, e com a teoria dos irracionais, de Dedekind.

A teoria de Eudoxo está no livro V (definição 5) dos Elementos de Euclides, e sua escrita traz que:

> Magnitudes são ditas estar na mesma razão, uma primeira para uma segunda e uma terceira para uma quarta quando os múltiplos da primeira e da terceira ou, ao mesmo tempo, excedam, ou, ao mesmo tempo, sejam iguais ou, ao mesmo tempo, sejam inferiores aos mesmos múltiplos da segunda e da quarta, relativamente a qualquer tipo que seja de multiplicação, cada um de cada um, tendo sido tomados correspondentes (EUCLIDES, 2009, p. 205).

Numa linguagem mais atual, se considerarmos que $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{AD}$ e $\overline{DE}$ são segmentos que representam as magnitudes, para Eudoxo, se

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{DE}}$$

independentemente se esses segmentos são comensuráveis ou não, então devem existir números inteiros positivos p e q, tais que possam ser verificadas as condições que seguem: a) Se $p\overline{AB} < q\overline{BC}$ então $p\overline{AD} < q\overline{DE}$; b) Se $p\overline{AB} > q\overline{BC}$ então $p\overline{AD} > q\overline{DE}$; d) Se $p\overline{AB} = q\overline{BC}$ então $p\overline{AD} = q\overline{DE}$. Essa definição teve um papel importante como fonte de inspiração para a criação dos números reais.

Segundo Bongiovanni (2005), após vinte séculos da crise dos incomensuráveis, matemáticos conseguiram construir um objeto matemático que representasse $\sqrt{2}$. Esse mesmo autor disserta que:

> Desde a crise provocada pela descoberta das grandezas incomensuráveis na Antiga Grécia, os matemáticos levaram vinte séculos para construir um objeto matemático cujo quadrado é 2. Sabiam que nenhum número racional ao quadrado dava 2, sabiam que a diagonal de um quadrado de lado unitário podia ser construída com régua e compasso e que, portanto, existia, mas não sabiam como definir e operar com esses novos números. Foi somente no século XIX que a façanha de dar uma definição consistente para esses objetos matemáticos se concretizou (BONGIOVANNI, 2005, p. 98).

A ideia de densidade, isto é, da sempre existência de um ponto entre dois pontos quaisquer, havia ascendido à mente de Galileu e Leibniz para a consideração da continuidade de pontos na reta. “Mas só isso não bastava para caracterizar esses objetos, pois os números racionais também têm essa propriedade e não formam um continuum” (BONGIOVANNI, 2005, p. 98). Os números racionais não cobrem totalmente os pontos da reta. Foi então que, desde 1858, o matemático alemão Dedekind (1831-1916) se dedicou à questão de preencher esses espaços na reta.

> Refletindo sobre a questão, Dedekind se perguntou: "O que há na grandeza geométrica contínua que a distingue dos números racionais?" E foi buscar a inspiração na teoria das proporções de Eudoxo (IV A.C). Dedekind chegou à conclusão de que a essência da continuidade de um segmento de reta estava na separação dos números racionais em duas classes. "Por essa observação trivial, o segredo da continuidade será revelado", escreveu Dedekind (BONGIOVANNI, 2005, p. 99).

Richard Dedekind (1831 – 1916) utilizou uma maneira diferente para definir números irracionais. Ele foi "um dos mais importantes pioneiros na análise lógica e filosófica dos alicerces da Matemática" (COURANT; ROBBINS, 2000, p. 82). Dois de seus ensaios, *Steligkeit um irrationale Zahlen* e *Was sind und was sollen die Zahlen?*, exerceram uma influência muito grande sobre os estudos relacionados aos fundamentos da Matemática. Em Courant e Robbins, encontramos a afirmação de que "Dedekind preferia operar com ideias abstratas gerais em vez de utilizar sequências específicas de intervalos aninhados. Seu procedimento tem por base a definição de um corte" (2000, p. 82).

De forma resumida, a definição de corte começa por considerar a divisão do conjunto de todos os números racionais em duas classes, as quais denotaremos por A e B, tal que qualquer elemento $b \in B$ tem que ser maior do que qualquer elemento $a \in A$. As classificações desse tipo são denominadas de corte no conjunto dos números racionais. A existência de um corte está sob a tutela de três possibilidades, em que apenas uma delas deve ser válida:

1) *O conjunto A tem um maior elemento, o qual indicaremos por a^**. Esse caso mostra, por exemplo, que se A é o conjunto de todos os números racionais menores ou iguais a 1 e se B é o conjunto de todos os números racionais maiores que 1, neste caso, $a^* = 1$.
2) *O conjunto B tem um menor elemento, o qual indicaremos por b^**. Esse caso mostra, por exemplo, que se A é o conjunto de todos os números racionais menores que 1 e se B é o conjunto de todos os números racionais maiores ou iguais a 1, neste caso, $b^* = 1$.
3) *Não existe um maior elemento em A e nem um menor elemento em B.*

Não seria possível acontecer de termos um maior elemento para A e, ao mesmo tempo, um menor elemento para B, pois, sendo a^* e b^* tais elementos respectivamente, e considerando a densidade no conjunto dos número racionais, o elemento $\frac{a^*+b^*}{2}$, que se situa na metade de a^*

e b^*, seria um elemento maior que o maior elemento de A e menor do que o menor elemento de B. Nessas condições, não poderia pertencer a nenhum dos dois conjuntos.

"No terceiro caso, em que não há nem um maior número racional em A e nem um menor número racional em B, o corte, segundo afirma Dedekind, define ou, simplesmente, é um número irracional" (COURANT; ROBBINS, 2000, p. 83).

A reta que organiza os números racionais, seguindo uma determinada ordem, isto é, indo dos números negativos para os positivos da esquerda para direita, respectivamente, pode ser cortada em qualquer lugar e de forma indefinida. Hersh (1997) argumenta que essa divisão ou corte é para Dedekind um outro tipo de número que pode ser adicionado, dividido (exceto por zero), multiplicado ou subtraído. Também é possível ser definida uma relação de ordem para esses cortes.

De forma mais geral, cada número racional x define um corte associado. O que fica à esquerda de x são os números racionais menores ou iguais a x, e o que fica à direita de x são os números racionais maiores que x, como afirma Hersh (1997). Esse mesmo autor comenta:

> Por esta associação entre números racionais e cortes, fazemos dos números racionais um subsistema do sistema de cortes. Para identificar os cortes de Dedekind, como o procurado sistema de números reais, devemos mostrar que ele inclui todos os números racionais e irracionais – todos os números que podem ser aproximados com precisão arbitrária por racionais (HERSH, 1997, p. 274 – tradução nossa).

Que tipo de corte de Dedekind é a $\sqrt{2}$? Esse é o caso em que A é constituído por todos os números racionais negativos, o zero e todos os números racionais positivos cujo quadrado é menor que 2, isto é, todo número racional x tal que $x \leq 0$ e $x^2 < 2$; e B é constituído de todos os números racionais positivos cujo quadrado é maior que 2, ou seja, todo número racional x tal que $x^2 > 2$. Essa é a terceira possibilidade dos cortes, indicando que, nesse caso, $\sqrt{2}$ é um corte ou um número irracional.

Conectando um Experimento Mental a aproximações racionais e ao estudo da incomensurabilidade de um segmento em relação à unidade

Consideramos que Matemática é uma atividade semiótica. Cruz afirma que "a realidade do conhecimento pode ser conceituada como um processo semiótico que envolve o próprio sujeito" (2018, p. 31). Nessa perspectiva, o conceito de explicação está relacionado à forma de representar, ou seja, "do ponto de vista semiótico explicar significa representar (CRUZ, 2018, p. 129). "Uma representação é exatamente um aspecto da percepção, de certa maneira, numa determinada forma" (OTTE, 2012, p. 33). Não podemos transformar algo (um conceito, objeto, ...) em cognição sem um símbolo.

Quando fazemos um julgamento perceptual, "não podemos realmente fazer uma distinção entre o que vem do mundo externo e o que é procedente da nossa própria interpretação" (CRUZ, 2018, p. 129). Otte afirma que "num julgamento perceptual, a percepção de dados gerais ou de objetos ideais e a percepção de dados particulares parecem inseparáveis" (2012, p. 33). Isso quer dizer que há uma complementaridade entre os processos de criação e de aplicação de representações simbólicas, isto é, ambos os processos estão, de certo modo, ligados.

Nosso interesse está em explicar o que é um número irracional; no entanto, se pretendemos explicar, teremos que generalizar. Cruz afirma que "cognição é a relação entre uma experiência individual, particular, e um conceito ou uma regra. Implica relacionar um particular a um geral" (2021, p. 16). Em síntese, o significado de generalizar está relacionado a compreender um aspecto geral em uma representação particular e é desse modo que desenvolvemos qualquer prova, problema e/ou atividade que tenham essa característica.

Cruz (2021) apresenta os Experimentos Mentais como uma possível metodologia para o ensino da Matemática com base na concepção histórico-dialética da educação e ênfase na epistemologia. Uma metodologia de ensino com base nessa concepção pode ser entendida como

> [...] sendo um conjunto de princípios e/ou diretrizes sócio-políticos, epistemológicos e psicopedagógicos articulados a uma estratégia técnico-operacional capaz de reverter os princípios em passos e/ou procedimentos orgânicos e sequenciados, que sirvam para orientar o processo de ensino-aprendizagem em situações concretas (MANFREDI, 1993, p. 5).

Cruz conceitua os Experimentos Mentais como

> [...] formas que o sujeito utiliza para colocar seus próprios pensamentos, no desenvolvimento de um determinado conceito, como objeto de consideração em uma dada atividade e/ou prova matemática, por meio de representações e ancorados a um sistema de representação coerente, isto é, a um contexto bem definido. Esses Experimentos exercem, no campo da Educação Matemática, dois papéis fundamentais, a destacar: 1- Mostrar a coerência do próprio conceito; 2 - Identificar a possibilidade de aplicação desse conceito (2021, p. 14).

A aplicação de tais Experimentos como metodologia de ensino da Matemática só é possível "se acreditarmos que a Matemática é uma atividade semiótica, ou seja, uma atividade de construção de diagramas, experimentação sobre esses diagramas e verificação dos resultados” (CRUZ, 2021, p. 14).

Esse aspecto é o que chamamos de epistemologia semiótica. Essa epistemologia visa explicar que a essência de uma representação está em outra representação, e a essência dessa segunda representação está numa terceira, e assim sucessivamente. Como o nosso acesso a qualquer objeto matemático é feito por meio de uma representação, então consideramos que essa visão epistemológica é fundamental para a compreensão de, digamos, qual tipo de número é a $\sqrt{2}$.

As características dos Experimentos Mentais que os condicionam a serem tomados como uma possível metodologia para a Matemática são nomeadas por *Forma, Estrutura, Compreensão, Dependência, Revelação* e *Comparação*. Esses nomes têm significados específicos nesse processo, não necessariamente significados do senso comum.

Forma, por exemplo, significa um sistema de atividades supostas em que, para o desenvolvimento de uma dada atividade, parte-se de hipóteses ou de certas conjecturas desenvolvidas a partir de uma representação particular do objeto de estudo. Cruz argumenta que “este sistema de atividades supostas nos permite considerar que o mundo, em especial o mundo matemático, consiste em dois tipos de entidades, a saber: signos e objetos. Os signos têm significado e os objetos têm existência real pura” (2021, p. 15).

Esse mesmo autor complementa que “como buscamos generalidade no processo de experimentação mental, Forma é essencial neste desenvolvimento e isto nos direciona para epistemologia da Matemática sob o ponto de vista semiótico. Esta epistemologia trata da relação entre signos e objetos” (CRUZ, 2021, p. 15).

Estrutura significa a adoção de uma síntese abdutiva. “Síntese abdutiva é a introdução de uma ideia nova não contida nos dados do problema, da atividade ou da prova, permitindo dar as conexões que esses mesmos dados não teriam fornecido” (CRUZ, 2021, p. 16).

Compreensão é o processo dedutivo no desenvolvimento da experimentação mental. Em comunhão com a Forma e a Estrutura, esse processo inicia-se pela construção de um diagrama, a percepção, nas partes desse diagrama, de relações que não foram explicitadas nas premissas do argumento e, finaliza, por meio de elaborações mentais, na conclusão do argumento apresentado.

Dependência “indica que o processo de experimentação mental está dependendo de conhecimentos e argumentos aceitos pela comunidade, mesmo não sendo argumentos estritamente lógicos” (CRUZ, 2021, p. 17). Isso significa que todo processo de experimentação mental deve ser feito sob a égide de uma teoria de base consistente que por vezes é nomeada por sistema de representação.

Revelação significa que, por meio dos Experimentos Mentais, podemos encontrar contradições ou confusões lógicas no desenvolvimento da dada atividade. Isso permite mostrar aos experimentadores evidências a favor ou contra uma determinada teoria.

Comparação mostra a possibilidade de outros resultados e de uma generalização mais ampla, comparando "o conhecimento com outras possibilidades de solução em uma dada atividade, prova e/ou problema" (CRUZ, 2021, p. 18).

O Experimento Mental que vamos apresentar vai permitir fornecer aproximações racionais para um segmento cuja medida pode ser representada por $\sqrt{2}$. Por meio dessa representação, buscaremos explicar que esse número é o limite de uma sequência convergente de números racionais. Para o desenvolvimento desse Experimento, utilizamos o *software* de geometria dinâmica Geogebra.

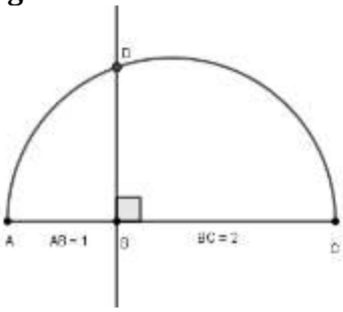
Forma: Suponha dois segmentos consecutivos e adjacentes AB e BC, de tal forma que $\overline{AB} = 1$ e $\overline{BC} = 2$, como representado na figura 2.

Figura 2 - Segmentos consecutivos e adjacentes

Fonte: O próprio autor (2022).

Estrutura: Considerando o segmento AC como o diâmetro de uma semicircunferência e traçando uma perpendicular pelo ponto B, vamos chegar à representação da figura 3, encontrando o ponto D na semicircunferência considerada.

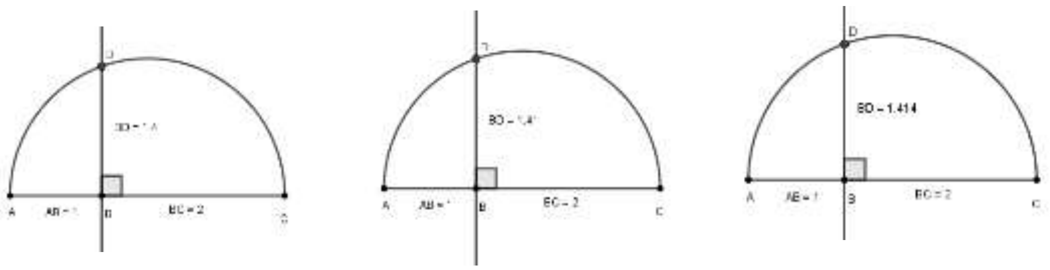
Figura 3 - Semicircunferência



Fonte: O próprio autor (2022).

Medindo o segmento BD e considerando o número de casas decimais cada vez mais crescente, chegamos aos resultados apresentados na figura 4. Para desenvolver essas medidas, usando a opção configuração de texto no Geogebra e com arredondamentos, fomos modificando o número de casas decimais.

Figura 4 - Aproximações para a raiz de 2

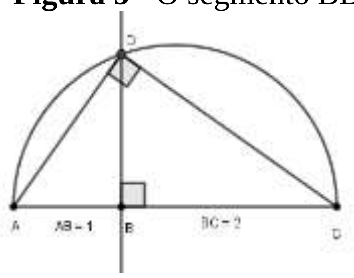


Fonte: O próprio autor (2022).

Na impossibilidade de apresentar mais imagens, apresentamos mais alguns resultados dessa medida: $\overline{BD} = 1{,}4142$ (quatro casas decimais); $\overline{BD} = 1{,}41421$ (cinco casas decimais); $\overline{BD} = 1{,}4142135624$ (dez casas decimais) e assim sucessivamente.

Compreensão: No diagrama da figura 5, percebemos que BD é a altura relativa à hipotenusa de um triângulo retângulo inscrito na semicircunferência, triângulo esse de vértices A, C, D. Portanto, podemos relacionar essa altura com outros segmentos nesse mesmo diagrama.

Figura 5 - O segmento BD



Fonte: O próprio autor (2022).

Pelo teorema de Pitágoras, podemos escrever:

$$1)\ \overline{AC}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{CD}^2;$$
$$2)\ \overline{AD}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BD}^2;$$
$$3)\ \overline{CD}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{BD}^2$$

Somando as igualdades 2 e 3 temos:

$$\overline{AD}^2 + \overline{CD}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + 2\overline{BD}^2.$$

Em comparação com 1, podemos escrever que

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + 2\overline{BD}^2.$$

Sabendo que $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}$ e substituindo na igualdade anterior, vamos chegar à conclusão que

$$(\overline{AB}+\overline{BC})^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+2\overline{BD}^2.$$

Simplificando, chegamos ao resultado

$$\overline{BD}=\sqrt{\overline{AB}\cdot\overline{BC}}.$$

mais especificamente,

$$\overline{BD}=\sqrt{1\cdot 2}=\sqrt{2}$$

Dependência: Todo esse processo só foi possível porque estamos nos baseando na Geometria Euclidiana, mais especificamente no estudo das relações métricas no triângulo retângulo.

Revelação: Chegamos a um contraste que, por um lado, indica que o segmento $\overline{BD}=1{,}41$, considerando uma de suas aproximações e, por outro lado, indica que $\overline{BD}=\sqrt{2}$.

Comparação: Portanto, podemos aproximar $\sqrt{2}$ por:

$$1$$
$$1{,}41$$
$$1{,}414$$
$$1,4142$$
$$\vdots$$

Esse Experimento nos auxilia na consideração de que a medida do segmento BD é dada por um valor para o qual a sua representação decimal vai se aproximando de um determinado número, ao passo que vai aumentando a quantidade de algarismos significativos dessa representação. Esse tal número é considerado como sendo o limite das aproximações decimais que representam a medida do segmento BD. Talvez possamos inferir que tal número é $\sqrt{2}$ e que então essa raiz é o limite de determinada sequência convergente de números racionais.

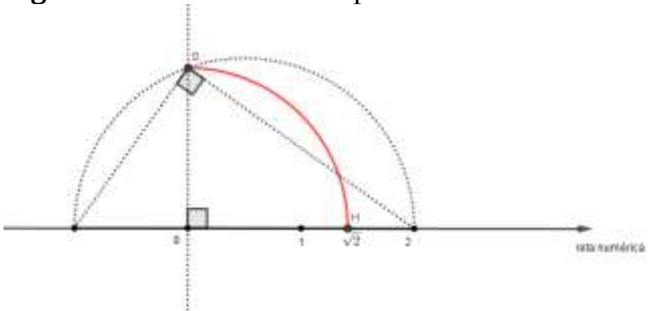
Os cortes de Dedekind proveem um limite para cada sequência convergente de números racionais. Mas, em concordância com Hersh (1997), precisamos de um limite para cada sequência convergente de cortes que podem ser tanto de números racionais quanto de números irracionais. Em outras palavras, precisamos de um limite para cada sequência convergente de números reais. E esse foi o ponto decisivo de Cantor quando "definiu os números reais como séries convergentes de números racionais. O objetivo não é mais aproximar uma quantidade já dada, mas estabilizar um novo tipo de número por significados de um conjunto de números elementares" (IGLIORI, 2009, p. 21). Essa propriedade é chamada de completeza em $\mathbb{R}$ (conjunto dos números reais).

Igliori e Fonseca argumentam que a construção dos números reais por meio dos cortes de Dedekind ou por classes de equivalência de sequências de racionais proposta por Cauchy evidencia a exploração de apenas aspectos lógicos. “Em geral não há uma interpretação ou um modelo intrínseco a essas teorias, e esse fato decorre da teoria formalista” (2013, p. 181). Entretanto, acreditamos que o processo de Experimentação Mental tenta mostrar uma outra perspectiva complementar.

Se $\sqrt{2}$ não é um corte racional, então, pelo que já foi exposto, é um corte irracional que representa, por exemplo, a medida da altura relativa à hipotenusa de um triângulo retângulo inscrito num semicírculo ou a diagonal de um quadrado de lado 1unidade.

Essa é uma propriedade bastante importante, pois há um raciocínio com base no Experimento apresentado que demostra, em uma construção geométrica simples, que $\sqrt{2}$ pode ser demarcado sobre a reta numérica (figura 6) e que esse ponto não pode coincidir com qualquer número racional.

Figura 6 - Raiz de 2 como ponto da reta numerada

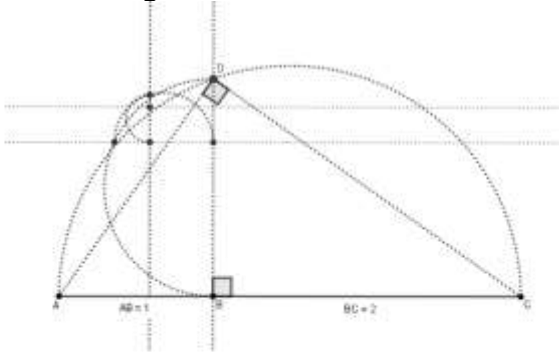


Fonte: O próprio autor (2022).

Mas o segmento BD do nosso Experimento tem então o comprimento representado por um número irracional? Na comparação com a unidade AB, o que ele significa? O segmento BD é incomensurável com a unidade AB, o que quer dizer que não existe uma quantidade $\frac{m}{n}$ de AB contida em BD, sendo m e n inteiros. Isto é, se dividirmos AB em n partes iguais, não vamos encontrar uma quantidade m dessas partes que caibam em BD.

Tentamos desenvolver um Experimento para encontrar tal quantidade e representamos na figura 7, mas chegamos a um processo recursivo de construção infinita de semicircunferências. Sugerimos ao leitor que possa desenvolver esse Experimento no Geogebra, que comece por transportar a unidade AB para BD, escrevendo na sequência uma semicircunferência de diâmetro BD e traçando uma perpendicular pelo extremo da unidade no interior de BD. Novamente transportamos o segmento menor para essa nova perpendicular, repetindo o procedimento.

Figura 7 - Recursividade[2]



Fonte: O próprio autor (2022).

Resumindo, podemos afirmar que um número irracional representa o comprimento de um segmento incomensurável com a unidade. Essa é uma definição inteiramente geométrica, mas que no aspecto complementar elucida algumas ideias sobre tais números.

Considerações

Destacamos, como afirma Igliori, que "a Educação Matemática é um campo de pesquisa que tem por objeto de investigação a atividade matemática nos diversos setores da sociedade, em especial aquela que acontece no ambiente escolar" (2009, p. 11). É com essa visão de investigação que este artigo buscou trazer alguma contribuição para o ensino dos números reais com um olhar especial para os números irracionais, especificamente a $\sqrt{2}$.

Entendemos que o ensino é uma atividade direcionada para uma meta, que é a aprendizagem. E somente seremos bem-sucedidos na nossa atividade se alcançarmos a meta. "Aprendizagem, por sua vez, é conceituada como a aquisição de capacidade de explicar, apreender e compreender, de enfrentar criticamente situações novas" (D'AMBROSIO, 2011, p. 117). É nessa esteira que buscamos expor algumas compreensões sobre o conceito de números irracionais e, consequentemente, de números reais, entendendo que "em matemática, compreender um conceito significa desenvolver uma teoria e vice-versa", como afirma Otte (2012, p. 154).

Acreditamos que uma teoria é um signo que tem algum significado apenas quando faz sentido para quem ensina e, consequentemente, para quem aprende. Estamos plenamente convencidos de que os Experimentos Mentais cumprem esse papel de dar sentido a certos conceitos matemáticos.

[2] Acompanhe a construção deste experimento em: https://www.geogebra.org/m/ddvzfgsv

“Nós, seres humanos, somos perseguidos e assediados por esperanças, fé, sonhos, expectativas e ideias, e essas questões exercem influências sobre nós, sobre nossa mente e não podem ser subestimadas” (CRUZ, 2018, p. 155). Em termos gerais, não vivemos em um mundo de coisas determinadas, mas em um universo de signos e possibilidades.

Referências

BONGIOVANNI, V. As duas maiores contribuições de Eudoxo de Cnido: a teoria das proporções e o método da exaustão. **UNIÓN. Revista Iberoamericana de Educación Matemática**, España, v.1, n. 2, p. 91-110, 2005.

COURANT, R.; ROBBINS, H. **O que é matemática?** Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda, 2000.

CRUZ, W. J. **Experimentos Mentais na Educação Matemática:** uma analogia com provas matemática formais. Curitiba: Editora Appris, 2018.

CRUZ, W. J. O uso dos Experimentos Mentais como possível metodologia de ensino da matemática: um olhar epistemológico. **Revista Eletrônica de Educação Matemática – REVEMAT**, Florianópolis, v.16 p. 01 – 26, 2021.

D’AMBROSIO, U. **Educação para uma sociedade em transição**. Natal RN: EDUFRN, 2011.

EUCLIDES. **Os elementos**. São Paulo: Editora da UNESP, 2009.

GALILEU, G. **Diálogo sobre os dois máximos sistemas do mundo ptolomaico e copernicano**. São Paulo: Associação Filosófica Scientiae Studia: Editora 34, 2011.

HERSH, R. **What is mathematics, really?** Oxford: Oxford University Press, 1997.

IGLIORI, S. B. C. Considerações sobre o ensino de cálculo e um estudo sobre números reais. *In:* FROTA, M. C. R.; NASSER, L. (Orgs.). **Educação Matemática no Ensino Superior:** pesquisas e debates. Recife, SBEM, 2009, p. 11 - 26.

IGLIORI, S. B. C.; FONSECA, R. F. Reflexões sobre a teoria de Conway no ensino e na aprendizagem dos números reais. *In:* FROTA, M. C. R.; BIANCHINI, B. L.; CARVALHO, A. M. F. T. (Orgs.). **Marcas da Educação Matemática no ensino superior.** Campinas, SP: Papirus, 2013, p. 165 – 185.

MANFREDI, S. M. **Metodologia de Ensino-diferentes concepções (versão preliminar)**. Campinas: F.E./UNICAMP, 1993.

OTTE, M. **A realidade das ideias:** uma perspectiva epistemológica para a educação matemática. Cuiabá: EdUFMT, 2012.

SILVA, J. J. **Filosofias da matemática**. São Paulo: Editora UNESP, 2007.