

Modelagem Matemática e Equações Diferenciais: um mapeamento das pesquisas em Educação Matemática

Aldo Peres Campos e Lopes¹

Resumo: Apresentamos um mapeamento da produção científica no Brasil, baseado em teses e dissertações, as quais contemplaram a Modelagem Matemática que empregaram equações diferenciais. O mapeamento foi efetuado no banco de teses e dissertações da Coordenação de Aperfeiçoamento e Pessoal de Nível Superior (Capes). Para realização desse artigo, algumas questões norteadoras nos guiaram: Quais são os objetivos dessas pesquisas? Quais as perspectivas de Modelagem Matemática são adotadas quando envolvem Equações Diferenciais? Quais são as principais contribuições, possibilidades e dificuldades identificadas? Para tanto, realizamos uma revisão sistemática, caracterizada como um estudo exploratório, do tipo bibliográfico, enquadrando no grupo de pesquisas denominado “estado da arte”. Além disso, verificamos uma relativa escassez de produções nessa área e constatamos que há uma janela de oportunidades para mais pesquisas com a temática abordada. Os resultados mostraram os benefícios do uso da Modelagem Matemática como estratégia de ensino, como motivação, como sair da rotina usual da sala de aula e como trabalhar com problemas reais e outros. Porém, há empecilhos como o tempo despendido em tais atividades e a adequação curricular. Sobretudo, sustentamos que há a necessidade de se refletir sobre Modelagem Matemática no Ensino Superior, principalmente aquela que envolve as Equações Diferenciais.

Palavras-chave: Modelagem Matemática. Ensino Superior. Equações Diferenciais. Mapeamento.

Mathematical Modeling and Differential Equations: a mapping of Mathematics Education research

Abstract: We present a mapping of scientific production in Brazil, based on theses and dissertations, which included Mathematical Modeling that employed Differential Equations. The mapping was carried out in the theses and dissertations database of the Coordenação de Aperfeiçoamento e Pessoal de Nível Superior (Capes). To carry out this article, some guiding questions guided us: What are the objectives of these researches? Which Mathematical Modeling perspectives are adopted when they involve Differential Equations? What are the main contributions, possibilities and difficulties identified? Therefore, we carried out a systematic review, characterized as an exploratory study, of the bibliographic type, within the group of studies called “state of the art”. In addition, we verified a relative scarcity of productions in this area, and we found that there is a window of opportunity for further research on the topic addressed. The results showed the benefits of using Mathematical Modeling as a teaching strategy, as a motivation, how to get out of the usual classroom routine and how to work with real and other problems. However, there are obstacles such as the time spent on such activities and the adequacy of the curriculum. Above all, we maintain that there is a need to reflect on Mathematical Modeling in Higher Education, especially that which involves Differential Equations.

Keywords: Mathematical Modeling. Higher Education. Differential Equations. Mapping.

Modelización matemática y ecuaciones diferenciales: un mapeo de la

¹ Doutor em Matemática. Professor do Instituto de Ciências Puras e Aplicadas (ICPA) da Universidade Federal de Itajubá (UNIFEI). Minas Gerais, Brasil. ✉ aldolopes@unifei.edu.br  <https://orcid.org/0000-0002-4046-0840>.

investigación en Educación Matemática

Resumen: Presentamos un mapeo de la producción científica en Brasil, con base en las tesis y disertaciones, que contemplaron la Modelación Matemática que empleó ecuaciones diferenciales. El mapeo se realizó en la base de datos de tesis y disertaciones de la Coordenação de Aperfeiçoamento e Pessoal de Nível Superior (Capes). Para este artículo, nos han guiado algunas preguntas orientativas: ¿Cuáles son los objetivos de esta investigación? ¿Qué perspectivas de modelización matemática se adoptan cuando se trata de ecuaciones diferenciales? ¿Cuáles son las principales aportaciones, posibilidades y dificultades identificadas? Para ello, realizamos una revisión sistemática, caracterizada como un estudio exploratorio, de tipo bibliográfico, encuadrándose en el grupo de investigaciones denominado "estado del arte". Además, verificamos una relativa escasez de producciones en esta área y constatamos que existe una ventana de oportunidad para seguir investigando con el tema abordado. Los resultados mostraron los beneficios de utilizar la Modelización Matemática como estrategia de enseñanza, como motivación, como salir de la rutina habitual del aula y como trabajar con problemas reales y otros. Sin embargo, existen obstáculos como el tiempo dedicado a estas actividades y la adecuación curricular. Por encima de todo, sostenemos que es necesario reflexionar sobre la modelización matemática en la enseñanza superior, especialmente la de las ecuaciones diferenciales.

Palabras clave: Modelización Matemática. Educación Superior. Ecuaciones Diferenciales. Mapeo.

Introdução

As equações diferenciais constituem um componente importante do ensino de Cálculo e na formação de um engenheiro (pelo menos para uma grande parte das Engenharias). Boyce e Di Prima (1999, prefácio) destacam que “as Equações Diferenciais, mesmo as mais simples, podem ser úteis para modelar fenômenos físicos”. Como ressalta Scárdua (2015, prefácio), de modo geral, a modelagem de fenômenos diversos (estudos populacionais, problemas físicos, fenômenos químicos, biológicos e meteorológicos etc.) depende, de forma direta, de uma boa compreensão das propriedades locais, globais e assintóticas de uma classe de equações diferenciais.

Dito isso, nossa experiência, no ensino de Cálculo em cursos de engenharias e em pesquisas em Educação Matemática, evidencia a existência de obstáculos no processo de aprendizagem por parte dos alunos, ao estudarem as equações diferenciais, seja no emprego de procedimentos para obter as soluções dessas equações, seja na elaboração de significados e no entendimento das ideias e conceitos. Tais impasses salientam-se quando se estuda a aplicação das equações diferenciais em alguma situação contextualizada, envolvendo outras áreas, como Biologia, Química, Física ou outras. Em diversos cenários, os alunos compreendem e dominam as técnicas de resolução, no entanto, apresentam dificuldades em empregar as equações diferenciais para solucionar

problemas (OLIVEIRA; IGLIORI, 2013).

Oliveira e Igliori (2013) realizaram um levantamento bibliográfico de trabalhos feitos, no período de 2000 a 2011, a respeito de pesquisas que tratam do ensino e da aprendizagem de equações diferenciais. As autoras incluíram o banco de teses e dissertações da Capes, algumas revistas científicas nacionais e alguns programas de pós-graduação (incluindo alguns programas franceses). Nesse sentido, o objetivo foi averiguar o que as pesquisas apontavam sobre as dificuldades de aprendizagem das Equações Diferenciais Ordinárias (EDO's) e o que poderia atenuar essas dificuldades. As autoras concluíram que a maior parte das pesquisas sugeria um ensino voltado para aspectos qualitativos das EDO's, de maneira que seja contextualizada, por meio de situações-problema e com o emprego de recursos tecnológicos (OLIVEIRA; IGLIORI, 2013).

Em adição, algumas pesquisas já foram realizadas para averiguar o que tem sido efetuado em termos de modelagem matemática no Brasil. Silveira (2007) fez um levantamento das teses e dissertações nacionais, de 1976 a 2005, objetivando examinar quais tratam da formação de professores. Araújo (2009) examinou os anais dos principais eventos da área de modelagem matemática, entre 2006 e 2007, e apresentou um panorama dos trabalhos apresentados em alguns eventos da área. Um mapeamento de caráter regional foi feito em relação aos trabalhos de modelagem realizados em Minas Gerais (CANEDO JR, KISTEMANN JR, 2014), que apontou algumas características peculiares mais presentes, como as relações entre a modelagem e a etnomatemática, firmadas por Rosa e Orey (2013), na noção de Etnomodelagem. Em uma mais recente revisão integrativa (de teses e dissertações com ênfase em modelagem matemática, de 2010 a 2016), realizada por Pereira et al. (2018), constataram a consolidação da modelagem matemática como uma área de pesquisa da Educação Matemática. Tais trabalhos, apesar de investigarem o uso da modelagem, não trataram diretamente daqueles que envolvem equações diferenciais.

O levantamento bibliográfico que consta neste artigo foi elaborado no intuito de pesquisar, no campo da Educação Matemática, a Modelagem Matemática com Equações Diferenciais. Focaliza-se mais especificamente o uso da Modelagem Matemática que utilize as Equações Diferenciais, podendo apresentar perspectivas ou alternativas de ensino ao modelar e de um melhor ensino das EDO's.

A importância deste estudo se apoia no fato de que em outros, realizados precedentemente (ARAÚJO, 2009; BARBOSA, 2007; CANEDO JR; KISTEMANN JR, 2014;

MALHEIROS, 2012; OLIVEIRA; IGLIORI, 2013; PEREIRA ET AL., 2018; SILVEIRA, 2007), nos quais foram identificados alguns problemas, por exemplo, a necessidade de um ensino com um enfoque mais qualitativo nas equações diferenciais e voltado para situações reais e/ou relacionadas com a futura profissão do estudante de forma interdisciplinar, há uma escassez de novos temas de investigação, já este artigo abrange objetivos não generalistas, não apenas possibilitando uma experiência de ensino, trazendo, além disso, subsídios robustos para o avanço da Educação Matemática.

Mapeamentos, como esses apresentados, estão relacionados com o intuito de percorrer novos caminhos, levando, portanto, a não produzir pesquisas repetidas e a preencher lacunas deixadas em pesquisas já realizadas, o que pode contribuir, por sua vez, para o avanço das discussões e do conhecimento da temática aqui abordada.

É importante destacar, ainda, que o espectro temporal considerado foi o de 2000 a 2020. Entretanto, como não limitamos o tempo nos parâmetros de busca do banco de dados, este mapeamento abrange, de fato, todas as pesquisas realizadas até o ano de 2020 (considerando aquelas que estão ali registradas). Para tal, algumas questões norteadoras nos guiaram neste mapeamento: Quais são os objetivos dessas pesquisas? Quais as perspectivas de Modelagem Matemática são adotadas quando envolvem Equações Diferenciais? Quais são as principais contribuições, possibilidades e dificuldades identificadas?

Em virtude do que foi dito, adotamos nesta pesquisa um mapeamento vertical (CAVALCANTI, 2015) de caráter exploratório-analítico, em que especificamos além do número de trabalhos, os autores e os anos realizados, outras particularidades, tais como: tipo de modelagem adotada, objetivos almejados, tipos de equações diferenciais empregadas, sujeitos de pesquisa, resultados obtidos e sugestão de trabalhos futuros. Ao fazer um levantamento sobre o que se conhece de determinada área, avaliando o cenário da produção do conhecimento, é possível identificar “temáticas recorrentes” e apontar “novas perspectivas, consolidando uma área de conhecimento” (ROMANOWSKI; ENS, 2006, p. 41).

Estratégia metodológica

Neste artigo, apresentamos um exame bibliográfico do tipo estado da arte, ou estado do conhecimento. Pesquisas desse gênero se legitimam pelo desafio de conhecer o já construído e produzido para, depois, buscar o que ainda não foi feito, de dedicar cada vez

mais atenção a um número considerável de pesquisas realizadas de difícil acesso, de dar conta de determinado saber que se avoluma cada vez mais rapidamente e de divulgá-lo para a sociedade (FERREIRA, 2002, p. 259). Similarmente, na concepção de Biembengut (2003, p. 2), o mapeamento é um “princípio metodológico de pesquisa”, visando à “compreensão da estrutura e dos entes nela inseridos”. Ele é também empregado em outras áreas, permitindo uma organização e classificação dos dados obtidos em pesquisas. Segundo essa autora, há dois enfoques possíveis: o primeiro se restringe em organizar os dados para obter uma visão geral; já o segundo, abrange a compreensão das estruturas dos dados, reconhecer padrões e relações.

Na investigação aqui apresentada, adotamos o segundo enfoque sugerido por Biembengut (2003). Ou seja, além de caracterizar as teses e as dissertações, procuramos identificar confluências de ideias, particularidades, relações e perspectivas para demais trabalhos. Segundo Cavalcanti (2015), questionamentos envolvendo quantos/quem/onde indicam um estudo exploratório horizontal, harmonizando com o primeiro enfoque de Biembengut (2003). Questionamentos envolvendo quais avanços foram conseguidos e o que foi deixado como lacuna, apontando tendências e perspectivas, indicam um estudo vertical (CAVALCANTI, 2015), em consonância com o segundo enfoque de Biembengut (2003). Isto é, optamos em nossa investigação pelo direcionamento vertical, identificando este trabalho como exploratório-analítico. Em suma, iniciamos perguntando “quando”, “onde” e “quem” e, em um segundo momento, indagamos “o quê” e “como”, em relação aos trabalhos selecionados.

Iniciamos nosso primeiro procedimento metodológico: identificando as fontes de coleta de dados (BIEMBENGUT, 2003). No nosso caso, escolhemos o banco (ou catálogo) virtual de teses e dissertações da CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior).

Os critérios adotados para seleção foram os seguintes: escolhemos teses e dissertações relativas ao período de 2000 até o final de 2020 (mês de dezembro) e fizemos consultas ao banco de teses e dissertações da Capes. No campo de busca, colocamos:

- “Modelagem Matemática” + “Equações Diferenciais”.

Ressalta-se a necessidade do uso de aspas, ao se efetuar a busca, para evitar a inclusão de trabalhos não relacionados, como os de Engenharia que empregaram algum tipo de equação diferencial ou outros que envolveram modelagem na área de Biologia (o

que, de fato, ocorreu de início, ao não incluir aspas). Assim, como um esforço adicional de se obter apenas trabalhos na área de Educação Matemática, marcaram-se os itens “Educação”, “Ensino” e “Ensino de Ciências e Matemática”, no campo área de avaliação. Dessa maneira, eliminamos trabalhos não vinculados a Programas de Educação Matemática, além disso, no campo de busca, para uma pesquisa adequada, o sinal “+” foi substituído por “AND”.

Foi encontrado um total de 13 trabalhos, sendo 7 teses e 6 dissertações². No entanto, foram inventariados 12 trabalhos, pois excluímos uma dissertação, que apresentava uma análise histórica da obra de George Boole e não empregava a modelagem matemática, nem as EDO's (as palavras “Equações Diferenciais” e “Modelagem Matemática” apareceram no interior da dissertação apenas como um exemplo para ilustrar alguns argumentos da autora). Os resultados obtidos constam no Quadro 1, no qual apresentam-se os trabalhos em ordem cronológica, relacionados ao tipo, sendo tese, dissertação de mestrado acadêmico (ou simplesmente mestrado) ou dissertação de mestrado profissional.

Quadro 1: Relação dos 12 trabalhos coletados na base de dados da Capes

Ano	Autor e Título	Tipo	Instituição
2007	JAVARONI, Sueli Liberatti. Abordagem geométrica: possibilidades para o ensino e aprendizagem de Introdução às Equações Diferenciais.	Doutorado	Universidade Estadual de São Paulo (Unesp)
2008	ARAÚJO, Alyne Maria Rosa. Modelagem Matemática nas aulas de Cálculo: uma estratégia que pode contribuir com a aprendizagem dos alunos de Engenharia.	Mestrado	Universidade Federal do Pará (UFPA)
2010	FERREIRA, Vagner Donizeti Tavares. A Modelagem Matemática na introdução ao estudo de Equações Diferenciais em um curso de Engenharia.	Mestrado Profissional	Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP)
2011	FECCHIO, Roberto. A Modelagem Matemática e a Interdisciplinaridade na introdução do conceito de Equações Diferenciais no Ensino de Engenharia.	Doutorado	Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP)
2011	SOUZA, Galvina Maria. Uma estratégia metodológica para a introdução de um curso de equações diferenciais ordinárias.	Mestrado	Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais (PUC-MG)
2012	SOARES, Débora da Silva. Uma Abordagem Pedagógica Baseada na Análise de Modelos para Alunos de Biologia: qual o papel do software?	Doutorado	Universidade Estadual de São Paulo (Unesp)
2012	DALLA VECCHIA, Rodrigo. A Modelagem Matemática e a Realidade do Mundo Cibernético.	Doutorado	Universidade Estadual de São Paulo (Unesp)

² Encontramos no banco de dados 11 trabalhos, mas os revisores da revista sugeriram o acréscimo de 2 trabalhos que não foram identificados pela busca feita: Javaroni (2007) e Soares (2012). Como são trabalhos que envolvem EDO's em modelagem, acatamos a sugestão e os incluímos.

2015	BRAGA, Roberta Modesto. Aprendizagem em Modelagem Matemática pelas interações de elementos de um sistema de atividade na perspectiva da Teoria da Atividade de Engeström.	Doutorado	Universidade Federal do Pará (UFPA)
2016	DOMINGOS, Rônero Márcio Cordeiro. Resolução de Problemas e Modelagem Matemática: uma experiência na formação inicial de professores de Física e Matemática.	Mestrado	Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)
2017	BARROS, Michele de Carvalho. Equações Diferenciais Ordinárias no Contexto dos Registros de Representação Semiótica e da Modelagem Matemática.	Doutorado	Universidade Estadual de Maringá (UEM)
2017	FREIRE, Talita Breschiliare Piffer. Uma unidade de ensino potencialmente significativa para o estudo de Equações Diferenciais Ordinárias.	Mestrado Profissional	Universidade Federal Tecnológica do Paraná (UFTPR)
2017	ROBIM, Bárbara Nivalda Palharini Alvim Sousa. A Matemática em atividades de Modelagem Matemática: um viés wittgensteiniano.	Doutorado	Universidade Estadual de Londrina (UEL)

Fonte: Dados da Pesquisa

Isto posto, para obtermos acesso à tese ou à dissertação, em alguns casos, foi necessário recorrer ao banco de teses e dissertações específico da instituição e, em outros, coletamos com os próprios autores por e-mail. Por consequência, todos trabalhos foram encontrados.

Com o *corpus* de análise, seguimos com o levantamento de dados. Para tal, iniciamos com uma organização por meio de quadros, contendo informações a respeito dos objetivos, tipo de modelagem adotada, sujeitos da pesquisa, resultados obtidos e sugestões de trabalhos futuros. Segundo Biembengut (2003), essa organização inicial não é indicada para avançar nas análises. Um caminho sugerido é a identificação de trabalhos com similaridades e correlações para um melhor entendimento — e assim o fizemos. Depois de um quadro inicial, foram feitos outros para clarificar aspectos importantes dos trabalhos analisados.

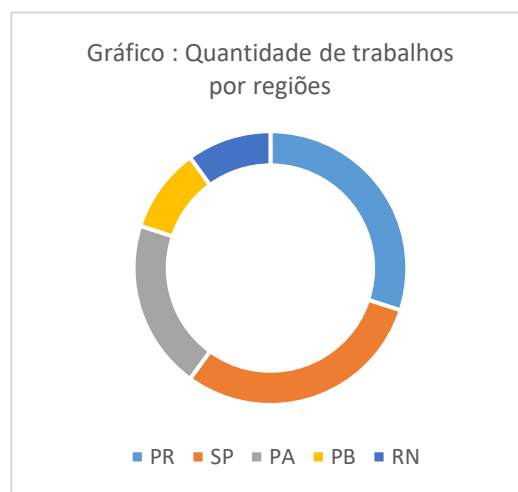
Para compreendermos o que tem sido realizado nas pesquisas envolvendo Modelagem Matemática com Equações Diferenciais, determinamos cinco atributos de análise, estabelecidas previamente: 1) os objetivos de pesquisa, 2) as perspectivas de modelagem empregadas, 3) os tipos de EDO's abordados, 4) os resultados e contribuições para o avanço do tema na área, 5) as considerações de trabalhos futuros sugeridos pelos autores. A análise de tais atributos será feita no formato descritivo.

Análise inicial dos dados

A leitura e a análise do Quadro 1, complementadas, em muitos casos, com a leitura integrativa das obras, viabilizaram uma melhor organização e síntese dos dados, particularizando e quantificando as variáveis em estudo.

Observamos que houve um pouco mais de teses de doutorado do que dissertações de mestrado (7 teses e 5 dissertações). Das dissertações, notamos que 2 são de programas de mestrado profissional.

Figura 1: Gráfico da quantidade (percentual) de teses/dissertações por regiões



Fonte: Dados da Pesquisa

De acordo com os dados do gráfico da Figura 1, a predominância dos trabalhos tem sido nas regiões Sul e Sudeste (83%). Em relação aos estados, observamos que mais da metade dos trabalhos de modelagem com equações diferenciais, 66% deles, pertencem aos estados de São Paulo e Paraná juntos.

Primordialmente, é importante salientar que nenhum dos trabalhos analisados é apenas documental ou bibliográfico. Desse modo, em todos eles há sujeitos. Esses foram alunos de engenharias para 5 trabalhos (ARAÚJO, 2008; FERREIRA, 2010; FECCHIO, 2011; SOUZA, 2011; BARROS, 2017) e os demais envolveram alunos de Licenciatura em Matemática. A pesquisa de Domingos (2016) incluiu também alunos de Licenciatura em Física. As engenharias envolvidas nos trabalhos foram Engenharia Química, de Produção, de Telecomunicações, de Controle e Automação e da Computação. Desses trabalhos envolvendo alunos de engenharias, constatamos que 3 não identificaram qual engenharia estava envolvida na pesquisa (FERREIRA, 2010; FECCHIO, 2011; BARROS, 2017). Os sujeitos foram selecionados de forma intencional, sempre tendo em vista o objeto de

estudo. Das 12 pesquisas analisadas, identificamos que 5 envolvem formação inicial de professores.

A partir da próxima seção, apresentamos análises detalhadas a respeito dos aspectos dessas pesquisas: objetivos almejados pelos autores, perspectiva de modelagem adotada, tipos de equações abordadas, resultados obtidos (de natureza geral e relacionados à modelagem e às equações diferenciais) e sugestões de trabalhos futuros.

Objetivos almejados nas pesquisas analisadas

Notamos que o foco das pesquisas vai ao encontro da prática na sala de aula, trazendo meios que facilitem e/ou investiguem a inclusão da Modelagem Matemática na disciplina Equações Diferenciais. Observamos que alguns trabalhos (30%) utilizaram a modelagem para fazer uma abordagem de aspectos introdutórios das EDO's. De fato, poucos trabalhos utilizaram EDO's de segunda ordem ou sistemas de EDO's (conforme discutiremos mais adiante).

Analisando os objetivos, percebemos que, para todas as pesquisas selecionadas, as EDO's representam um instrumento, um objeto matemático a ser utilizado. Ou seja, o propósito não é a investigação a respeito do ensino e da aprendizagem dessas equações diretamente e esse fato é comprovado pelos resultados obtidos nessas pesquisas em que pouco se discutiu a respeito disso.

Após a leitura de algumas partes dos trabalhos (por exemplo, a introdução e o referencial teórico), notamos alguns aspectos no tocante aos direcionamentos adotados quanto à Modelagem Matemática. Observamos que uma ênfase é direcionada para os pressupostos da Modelagem Matemática (ARAÚJO, 2008) e relacionados a outras temáticas, como Interdisciplinaridade (FECCHIO, 2011), Tecnologias Digitais (JAVARONI, 2007; SOARES, 2012; DALLA VECCHIA, 2012) e a Teoria da Atividade de Engeström (BRAGA, 2015). No caso de Tecnologias Digitais, não estamos aqui diferenciando os conceitos usados nas pesquisas, mas agrupando as pesquisas que usaram recursos tecnológicos (celulares, computadores, *softwares* específicos, entre outros recursos) como parte essencial do trabalho realizado. Em outros trabalhos, a Modelagem é utilizada para averiguar alguns aspectos relacionados com a aprendizagem, tais como a linguagem (ROBIM, 2017), a aprendizagem significativa (FREIRE, 2017), os diferentes tipos de registros (BARROS, 2017) e os possíveis benefícios de resgatar conceitos anteriores (SOUZA, 2011). Domingos (2016) associa a Modelagem Matemática com a Resolução de

Problemas e Ferreira (2010) faz uma conexão com o mundo real e tomada de decisões.

Em todos os trabalhos, identificamos uma análise de reflexões, sentimentos e práticas tanto de alunos quanto de professores sobre a Modelagem Matemática no ensino, bem como suas diferentes perspectivas e abordagens. Mediante os objetivos dos trabalhos, em conformidade com o Quadro 2, podemos agrupar os trabalhos nos seguintes objetivos:

1. Aprender EDO por meio da Modelagem Matemática;
2. Investigar o uso de recursos tecnológicos na Modelagem Matemática;
3. Examinar o desenvolvimento de habilidades;
4. Averiguar como a Modelagem Matemática auxilia na resolução de problemas do mundo real.

Para o primeiro objetivo, temos 5 trabalhos (ARAÚJO, 2008; FECCHIO, 2011; SOUZA, 2011; BRAGA, 2015; BARROS, 2017). Tais trabalhos utilizaram de uma modelagem que aproximava o aluno do mundo real, almejando à motivação e à promoção da fixação de conteúdo e tinham como finalidade levar o aluno a evoluir e a criar maneiras de construir o próprio conhecimento, deixando de lado a mecanização do conteúdo abordado. Esses autores utilizaram diferentes teorias da aprendizagem, associadas muitas vezes a outras teorias, tais como Interdisciplinaridade e Teoria das Situações Didáticas (FECCHIO, 2011) e Teoria da Atividade de Engeström (BRAGA, 2015).

Já as três pesquisas que contemplam o objetivo 2 (SOARES, 2012; DALLA VECCHIA, 2012; FREIRE, 2017), usaram a tecnologia como uma ferramenta necessária (e indispensável) para abordar o ensino das EDO's. O trabalho de Javaroni (2007) abrange os itens 1 e 2 simultaneamente.

No que se refere as duas pesquisas, englobadas no objetivo 3, os autores (DOMINGOS, 2016; ROBIM, 2017) tiveram como finalidade pesquisar o desenvolvimento de habilidades. Domingos (2016) não estabeleceu habilidades para serem observadas *a priori*, enquanto Robim (2017) pesquisou a manifestação da linguagem nas atividades de modelagem desenvolvidas. Esse benefício do uso da modelagem já havia sido identificado em pesquisas anteriores (ARAÚJO, 2008).

Na pesquisa do objetivo 4 (FERREIRA, 2010), foi investigado como a Modelagem Matemática auxilia na resolução de problemas do mundo real. Para alguns autores, como Araújo (2008), resolver problemas do mundo real é algo já esperado de uma modelagem, pois é uma distinção dessa metodologia.

Na seção seguinte, passamos a apresentar as perspectivas de Modelagem Matemática adotadas nas pesquisas analisadas.

Perspectivas de modelagem matemática adotadas nos trabalhos analisados

Em todos os trabalhos, a abordagem metodológica utilizada foi qualitativa e o foco envolveu compreender e analisar fenômenos e discursos. Nas teses e nas dissertações analisadas, a finalidade foi determinar como os estudos de Modelagem Matemática são fundamentados teoricamente. A Modelagem Matemática tem sido utilizada como meio de sustentar a parte empírica dos trabalhos e, em alguns deles, uma outra teoria é utilizada para uma melhor compreensão do objeto em estudo. A concepção empregada pelos autores está relacionada com a prática de pesquisa dentro de cada programa de pós-graduação e suas respectivas linhas de pesquisas. Logo, para uma melhor compreensão, efetuamos uma leitura da parte teórica dos trabalhos e da parte empírica.

Dessa forma, constatamos que, para o encaminhamento do trabalho prático com a modelagem, alguns autores sugerem etapas, enquanto outros não. A abordagem dos conteúdos matemáticos é determinada pelos problemas para alguns, enquanto para outros, os conteúdos programáticos determinam os problemas.

Atualmente, há distintas perspectivas/concepções de Modelagem Matemática no cenário nacional (KLÜBER; BURAK, 2008; CARARO; KLÜBER, 2017; CARVALHO; NICOT, 2019). Como não está no escopo do artigo, não iremos explicar e detalhar todas as perspectivas existentes, mas apenas citá-las sucintamente. Em harmonia com Klüber e Burak (2008), as principais concepções de Modelagem Matemática podem ser enumeradas de acordo com as perspectivas: (1) Ambiente de aprendizagem para investigar a realidade; (2) Processo de obtenção de um modelo; (3) Conjunto de procedimentos que auxiliam a compreender fenômenos do cotidiano, levando a previsões e decisões; (4) Sistema de aprendizagem.

Cada uma dessas concepções é defendida por algum autor e possui um embasamento teórico em relação ao ensino e à aprendizagem da Matemática. Por exemplo, as quatro perspectivas/concepções mencionadas estão ligadas, respectivamente, aos autores: Barbosa, Biembengut, Burak e Caldeira (KLÜBER; BURAK, 2008). Tendo em vista os trabalhos que aqui estamos analisando, adotaremos uma divisão diferente para as noções de modelagem:

1. Estratégia de ensino e aprendizagem, que envolve equacionar um modelo, a fim

- de fazer previsões e tomar decisões;
2. Ambiente de aprendizagem para investigar fenômenos/situações reais;
 3. Alternativa pedagógica;
 4. Filosófica ou adota uma própria noção.

Essas três primeiras noções estão ligadas aos autores: Bassanezi (2002), Barbosa (2009), Almeida, Silva e Vertuan (2012).

A maior parte das pesquisas (7 trabalhos) se encaixa no item 1, enquanto duas estão no item 2 e no item 4 e, apenas uma, no item 3.

Dos trabalhos analisados, a maioria adota a concepção de Modelagem Matemática defendida por Bassanezi (os 7 trabalhos do item 1) para modelar (JAVARONI, 2007; FECCHIO, 2011, SOUZA, 2011; SOARES, 2012; BRAGA, 2015; DOMINGOS, 2016; BARROS, 2017). De acordo com Bassanezi (2002), a Modelagem Matemática é uma estratégia de ensino-aprendizagem que pode ser utilizada em todos os níveis de ensino. Para ele, a modelagem envolve “matematizar” um problema da realidade, a fim de resolvê-lo, interpretá-lo, para auxiliar em previsões e tomadas de decisões.

Em dois trabalhos, foi adotada a perspectiva da modelagem como sendo um ambiente de aprendizagem para investigar a realidade (ARAÚJO, 2008; FERREIRA, 2010) defendida por Barbosa (item 2).

Igualmente, a concepção de Modelagem Matemática como uma “alternativa pedagógica” (que conectamos com o item 3), conforme configurado por Almeida, Silva e Vertuan, foi adotada em dois trabalhos (FREIRE, 2017; ROBIM, 2017). Tais autores salientam as peculiaridades investigativas da modelagem, além de estabelecerem uma perspectiva socioepistemológica.

Sublinhamos que duas pesquisas apresentaram características peculiares em relação às demais. Robim (2017) abordou a Modelagem Matemática a partir de uma perspectiva filosófica e adotou, como referência principal, a filosofia da linguagem de Wittgenstein. Dalla Vecchia (2012), apesar de mencionar que não adotou uma perspectiva *a priori*, ele se apoiou em autores internacionais, como Borromeo Ferri e Blum (2010) e seguiu uma concepção própria para Modelagem Matemática. Para ele, a Modelagem Matemática no âmbito da Educação Matemática é “um processo dinâmico e pedagógico de construção de modelos sustentados por ideias matemáticas que se referem e visam encaminhar problemas de qualquer dimensão abrangida pela realidade” (DALLA VECCHIA,

2012, p. 129). Isto posto, incluímos essas duas pesquisas no item 4.

Em alguns trabalhos, outros referenciais teóricos foram utilizados. Por exemplo, na dissertação de Souza (2011), as atividades sequenciais foram elaboradas utilizando-se as ideias de Zabala e, para as estratégias de ensino, a autora apoiou-se nas ideias de Ponte. Por outro lado, Fecchio (2011) baseia-se em Brousseau para as situações didáticas propostas e, para Interdisciplinaridade, usa as ideias de Malheiros, Machado e Bassanezi.

Apresentamos, na próxima seção, alguns aspectos relacionados às equações diferenciais abordadas nos trabalhos em estudo.

Tipos de equações diferenciais usadas nos trabalhos analisados

Observamos, no Quadro 2 a seguir, os tipos de EDO's utilizados. Para um melhor entendimento, fizemos uma leitura da parte experimental de cada trabalho. Dessarte, foi possível, além de identificar o tipo de EDO empregada, discernir o tratamento dado às equações envolvidas.

Quadro 2: Tipos de EDO utilizados nas pesquisas

Autor (ano)	Tipos de EDO's do modelo
Javaroni (2007)	Queda livre, crescimento populacional, lei de resfriamento de Newton
Araújo (2008)	Queda livre, lei de resfriamento de Newton, mistura de substâncias e fluxo de corrente contínua (esta última envolve EDO de 2ª ordem e as demais, de 1ª ordem).
Ferreira (2010)	Amortecedor automotivo (com ou sem suspensão; envolve sistemas do tipo massa-mola); despoluição de lagoas (mistura de substâncias); absorção de drogas. Todas as equações são de 1ª ordem.
Fecchio (2011)	Mistura de soluções, lei de resfriamento de Newton, crescimento populacional, circuito RL. Todas as equações são de 1ª ordem.
Souza (2011)	Crescimento populacional (envolve EDO de 1ª ordem).
Soares (2012)	Modelo da malária.
Dalla Vecchia (2012)	Corpo em queda livre.
Braga (2015)	Mistura de substâncias, crescimento populacional, lei de resfriamento de Newton (aplicado a um bolo), modelo logístico. Todas EDO's são de 1ª ordem.
Domingos (2016)	Crescimento populacional, lei de resfriamento de Newton, corpo em queda livre, lei de Torricelli, juros, mistura de substâncias e sistema massa mola (esta última envolve EDO de 2ª ordem e as demais, de 1ª ordem).
Barros (2017)	Crescimento populacional, circuito elétrico, lei de resfriamento de Newton (aplicado a um bolo). Todas EDO's são de 1ª ordem.
Freire (2017)	Lei de resfriamento de Newton (horário em que uma pessoa morreu), lançamento de um projétil, absorção de substância pelo organismo (ritalina), eficiência de um operador de máquinas, risco de obter diabetes. Todas as EDO's envolvidas são de 1ª ordem.

Robim (2017)	Temperatura do café e a garrafa térmica (lei de resfriamento de Newton), ônibus espacial (lançamento de um projétil), armazenamento de grãos de soja (fluxo de volume), prática de bungee jump (queda livre), <i>slackline</i> (envolve sistema de equações de 1ª ordem de 4 variáveis), envolvem EDO's de 1ª ordem. Envolvendo EDO's de 2ª ordem: pêndulo simples (de igrejas), amortecedor de carros.
--------------	---

Fonte: Dados da Pesquisa

Um aspecto perceptível desses trabalhos analisados é a tendência do uso de EDO's de primeira ordem (67%). Poucos trabalhos (33%) utilizaram EDO's de 2ª ordem ou sistemas de EDO (ARAÚJO, 2008; SOARES, 2012; DOMINGOS, 2016; ROBIM, 2017). Algumas dessas pesquisas do Quadro 3 sugerem trabalhos futuros que envolvam EDO's de 2ª ordem.

Perante o exposto, as modelagens desenvolvidas são semelhantes em diversos trabalhos, como: lei de resfriamento de Newton (66%), queda livre (50%), crescimento populacional (50%) e mistura de soluções (42%). Outras atividades semelhantes foram: circuito elétrico (em 25% dos trabalhos) e sistema massa mola (em 17%). Duas pesquisas, por outro lado, que se destacaram por trazer algumas modelagens diferentes dos demais trabalhos analisados foram a tese de Robim (2017) e a tese de Soares (2012). As atividades de modelagem utilizadas pela autora estão descritas no Quadro 3 e sua referência principal para as modelagens desenvolvidas foi o clássico livro de Bassanezi (2002).

Em relação ao tratamento dado às EDO's, notamos que o foco é o tratamento algébrico costumeiro (em 67% dos trabalhos). Ou seja, diante da EDO, o procedimento é encontrar sua solução por meio de manipulações algébricas, seguindo um algoritmo de resolução padrão. Com isso, alguns aspectos intrínsecos das EDO's podem passar despercebidos pelos alunos. Uma abordagem qualitativa possibilitaria identificar os campos de vetores (que indicam as trajetórias das soluções) e os gráficos envolvidos.

Apesar de a maioria dos trabalhos focarem nos aspectos algébricos das equações, alguns trabalhos (33%) fizeram um tratamento qualitativo das EDO's. Dalla Vecchia (2012) utilizou os modelos de queda livre e de crescimento populacional para ilustrar campos de vetores. Similarmente, Javaroni (2007), Soares (2012), Barros (2017) e Freire (2017) apresentaram uma abordagem envolvendo campos de vetores.

Algumas das pesquisas analisadas (30%) apresentaram resultados de experimentos práticos (BRAGA, 2015; BARROS, 2017; ROBIM, 2017). Além dos experimentos, Barros (2017) descreveu uma análise de alguns livros tradicionais de Equações Diferenciais.

Diante do analisado, podemos agrupar as pesquisas com as seguintes

características, em relação às EDO's:

1. Fizeram um tratamento qualitativo das EDO's;
2. Utilizaram de experimentos práticos;
3. As EDO's envolvidas eram de 1ª ordem;
4. As EDO's envolvidas eram de 2ª ordem ou sistemas de EDO's.

Segundo o que foi discutido anteriormente, para o item 1, temos 5 pesquisas (JAVARONI, 2007; SOARES 2012; DALLA VECCHIA, 2012; BARROS, 2017, FREIRE, 2017). Já para o segundo, tivemos também trabalhos (BRAGA, 2015; BARROS, 2017; ROBIM, 2017). Para o terceiro, encontramos 8 pesquisas (JAVARONI, 2007; FERREIRA, 2010; FECCHIO, 2011; SOUZA, 2010; DALLA VECCHIA, 2012; BRAGA, 2015; BARROS, 2017; FREIRE, 2017), enquanto para o último item, 4 (ARAÚJO, 2008; SOARES, 2012; DOMINGOS, 2016; ROBIM, 2017).

Concluimos, conforme já apontado anteriormente, que todas as pesquisas tiveram alguma atividade de modelagem que coincidiu com a de alguma outra pesquisa de nosso mapeamento. Talvez, para uma pesquisa qualitativa a respeito de Modelagem Matemática e/ou do ensino de EDO, isso não possa apresentar um problema. Entretanto, pode indicar a necessidade de professores dessa disciplina buscarem por atividades diversas e relacionadas com o cotidiano dos alunos e/ou do futuro profissional deles, assim como sugerido por Bassanezi (2002).

Na próxima seção, apresentamos alguns resultados evidenciados pelos autores nos trabalhos analisados neste artigo.

Alguns resultados apontados nas pesquisas analisadas

Para apresentar os resultados obtidos nos trabalhos, optamos por evidenciar as contribuições a partir de suas convergências. Dessa forma, destacamos os aspectos envolvendo a Modelagem Matemática e as Equações Diferenciais.

Todas as pesquisas analisadas fizeram algumas ponderações a respeito de dificuldades e potencialidades do emprego da Modelagem Matemática como estratégia de ensino. No Quadro 3 sintetizamos as potencialidades da Modelagem Matemática como estratégia de ensino (itálico nosso). Para uma compreensão mais ampla, foi feita uma leitura da parte “resultados” das pesquisas envolvidas.

Quadro 3: Potencialidades da Modelagem Matemática como estratégia de ensino

Autor (ano)	Potencialidades
Javaroni (2007)	O trabalho realizado motiva aos interessados a uma elaboração de suas próprias propostas de ensino. Iniciar o estudo das EDO's com os modelos matemáticos clássicos na literatura, explorando-os por meio das Tecnologias de Informação e Comunicação, pode <i>trazer mais possibilidades para o processo de aprendizagem</i> dos alunos.
Araújo (2008)	<i>A aquisição e a sedimentação de conhecimentos de Cálculo</i> foram motivadas pela Modelagem Matemática; ajuda na visão crítica do que é abordado nas atividades; professor se torna mediador e alunos se tornam responsável pelo aprendizado. Os alunos <i>aprendem novos conteúdos sem a necessidade de um professor</i> , fazendo interações com outras áreas do conhecimento. A Modelagem Matemática, por trabalhar com problemas reais, <i>motiva a aprendizagem</i> (autônoma ou não) dos alunos e ajuda a <i>despertar características reflexivas e críticas dos alunos</i> .
Ferreira (2010)	O estudante pode <i>construir o próprio conhecimento</i> relacionando-se com o meio em que se encontra; <i>aprimorar a capacidade de explorar e organizar ideias ao resolver um problema</i> relativo a um fenômeno real; aprimorar a capacidade de usar a Matemática em diferentes áreas do conhecimento.
Fecchio (2011)	<i>Quebra da rotina usual em sala de aula</i> ; desenvolver habilidade de resolver problemas de um modo criativo; <i>desenvolver habilidade de empregar conhecimentos construídos em novos contextos</i> .
Fecchio (2011), Ferreira (2010)	<i>Motivar/animar/envolver</i> o estudante; aprimorar a capacidade de produzir interpretações e/ou previsões e/ou tomadas de decisões fundamentadas nas soluções de problemas relativos a um fenômeno real.
Souza (2011)	<i>Capacidade de aplicar conhecimentos em situações reais</i> .
Soares (2012)	Para a autora, "fica evidente que <i>as tecnologias apresentam possibilidades para o ensino e aprendizagem</i> de Matemática" (SOARES, 2012, p. 245). Para isso se tornar efetivo, é necessário a intervenção do professor.
Dalla Vecchia (2012)	O autor produz uma visão teórica a respeito de modelagem. Para ele, a modelagem é fluida, i.e., está em constante movimento e perpassa pelo objetivo pedagógico, pela linguagem utilizada, pelo modo em que o problema é determinado e pelas especificidades no mundo cibernético.
Braga (2015)	O trabalho coletivo, a historicidade e a multivocalidade (tradições e opiniões próprias) dos sujeitos operam cooperativamente para superar contradições (tensões que proporcionam mudanças) a fim de alcançar transformações expansivas. "A Modelagem Matemática constitui-se no próprio sistema e como essas interações geram transformações expansivas, ou seja, gerou aprendizagem" (BRAGA, 2015, p.126).
Domingos (2016)	<i>Aluno se torna 'parceiro' na aprendizagem</i> . Possibilidade de estudar temas da realidade. Novas possibilidades de ensino para professores em formação. Desenvolvimento de habilidades e atitudes para aplicar a teoria nas atividades de Modelagem.
Barros (2017)	<i>Usar conhecimento matemáticos em problemas não-matemáticos. Aplicar os princípios de modelagem na vida profissional</i> .
Freire (2017)	<i>Modelagem Matemática se apresentou como uma proposta metodológica distinta da tradicional</i> (resolução de listas de exercícios).
Robim (2017)	Modelagem se apresentou como um meio de aprendizagem e pode <i>ajudar na formação de conceitos</i> . A Modelagem auxilia no <i>reforço de conceitos aprendidos</i> em outras disciplinas (como o Cálculo 1), <i>estimula autonomia</i> e maior participação dos alunos, auxilia na compreensão dos processos matemáticos por meio de problemas externos à Matemática.

Fonte: Dados da Pesquisa

Podemos concluir que as potencialidades do uso da Modelagem Matemática estão relacionadas à aplicação e à fixação do conteúdo, ao desenvolvimento de habilidades, além de motivar os alunos. Apesar dos aspectos negativos mencionados em alguns desses trabalhos, as pesquisas consideraram proveitosas as atividades com modelagem, ou seja, os aspectos positivos se sobressaem.

Por meio da análise do Quadro 3, juntamente com a leitura dos trabalhos, podemos observar, pelo menos, 12 potencialidades da Modelagem Matemática como estratégia de ensino que os autores apontaram em suas pesquisas (conforme destacado nas partes em itálico do Quadro). Dentre essas potencialidades, a que é mais mencionada está relacionada à motivação do aluno, essa característica é referida em todos os trabalhos, mas enfatizada em 40% deles. Em seguida, a compreensão aprofundada dos conteúdos abordados é uma contribuição mencionada por 50% dos autores. Um outro aspecto destacado, em 67% dos trabalhos, é o desenvolvimento da habilidade de usar a Matemática em situações reais. Essa habilidade, por sua vez, leva ao desenvolvimento da criticidade (ARAÚJO, 2012).

Apesar dos aspectos positivos, várias pesquisas apresentaram também alguns empecilhos para o uso da Modelagem Matemática, conforme apontado pelos autores no capítulo de resultados, e que sintetizamos no Quadro 4 a seguir.

Quadro 4: Empecilhos para implementação da Modelagem Matemática como estratégia de ensino

Autor (ano)	Empecilhos
Araújo (2008)	Resistência inicial por parte dos alunos.
Fecchio (2011)	Alunos apresentam dificuldades relacionadas a algum conteúdo prévio e demandam mais tempo que o previsto para realizar a modelagem. Assim, é necessário um melhor planejamento didático.
Freire (2017)	Romper com a tradicional prática docente.
Souza (2011)	Resistência inicial por parte dos alunos; alunos apresentam dificuldades relacionadas a algum conteúdo prévio e em aplicar o conteúdo teórico.
Dalla Vecchia (2012)	Adequação aos objetivos pedagógicos; romper com a tradicional prática docente.
Domingos (2016)	As atividades de modelagem demandam muito tempo para sua realização.
Barros (2017)	Dificuldades relacionadas a algum conteúdo prévio.
Robim (2017)	O aluno apresenta dificuldades em aplicar o conteúdo teórico.

Fonte: Dados da Pesquisa

Há uma dificuldade de implementação da Modelagem Matemática, pois ela está subordinada aos objetivos pedagógicos (DALLA VECCHIA, 2012). À vista disso, há um óbice em romper com a prática docente tradicional (FREIRE, 2017; DALLA VECCHIA,

2012). A resistência quanto à adoção de uma nova metodologia se manifesta também por parte dos alunos, sendo maior no início das atividades (ARAÚJO, 2008). Eles não estão acostumados a atividades exploratórias, mas sim em respostas prontas (SOUZA, 2011). Ademais, os alunos apresentam dificuldades devido à falta de conhecimento prévio (seja de Cálculo 1, seja de conteúdo do Ensino Fundamental ou Médio) e isso leva a conclusões equivocadas (FECCHIO, 2011; SOUZA, 2011; BARROS, 2017). Uma outra dificuldade apresenta foi a de traduzir o problema real para uma linguagem matemática (ROBIM, 2017; SOUZA, 2011), além do tempo para realizar as atividades de modelagem (FECCHIO, 2011; DOMINGOS, 2016).

Além dos aspectos mencionados precedentemente, Fecchio (2011) ressalta que, durante a modelagem realizada, em algumas ocasiões, houve a necessidade de o pesquisador utilizar alguns exemplos, a fim de fazer com que os alunos se sentissem estimulados e competentes para fazerem discussões e conjecturarem para obter o modelo em questão. Outrossim, ele esclarece que a implementação da Modelagem Matemática como uma estratégia de ensino carece de um planejamento didático, de participação de mais professores e de uma mobilização de “*conhecimentos sobre a condução do trabalho em grupo*” (FECCHIO, 2011, p.183).

Em relação às contribuições das pesquisas realizadas para a aprendizagem das EDO's, Barros (2017) constatou que a aprendizagem das EDO's é costumeiramente centrada em uma abordagem algébrica. Ela averiguou que alguns livros contêm atividades de “Modelagem Matemática”, contudo tais atividades são realizadas com aplicações de fórmulas. Em consonância com a aprendizagem vinda de diferentes tipos de registros de representação (como algébrica e gráfica), a autora sugere uma abordagem qualitativa das EDO's, formulando novas questões para o problema analisado. Por outro lado, as pesquisas consideradas, de um modo geral, pouco discorrem a respeito de questões de ensino e aprendizagem. A maioria das pesquisas não mostram os impactos do uso de Modelagem Matemática na aprendizagem das EDO's. Algumas mencionaram apenas que o ensino e a aprendizagem das EDO's podem receber o auxílio e a contribuição de estratégias de ensino diferentes, como a Modelagem Matemática (SOUZA, 2011; DOMINGOS, 2016). Freire (2017) afirmou que as Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação agem a favor da construção do conhecimento e que houve aprendizagem significativa dos conteúdos. Todavia, a autora não especificou quais conteúdos e como analisou a aprendizagem significativa e se essa aprendizagem era no sentido de David

Ausubel. De forma similar, Soares (2012) menciona que essas Tecnologias Digitais podem trazer novas possibilidades para o ensino — e que cabe ao professor intervir para o uso efetivo. Robim (2017) mencionou que as atividades de modelagem proporcionaram a formação de conceitos, envolvendo EDO's de 1ª e de 2ª ordem. Entretanto, a autora não aprofundou no assunto, não mencionando como confirmou esse fato.

Em suma, as pesquisas analisadas consideraram proveitoso produzir um trabalho com os alunos em situações-problema, de uma maneira contextualizada (como é normalmente feito em modelagens) e que também atraia o aluno, com problemas ligados às áreas de atuações futuras, pois, assim, eles estariam mais engajados.

Indicações para pesquisas futuras nas teses e dissertações analisadas

Indicar caminhos para prosseguir nas pesquisas revela que o objeto de estudo não se esgotou com uma investigação somente ou que dela outros aspectos dignos de estudo foram gerados. Alguns trabalhos não indicaram sugestões para pesquisas futuras (ARAÚJO, 2008; DALLA VECCHIA, 2012; FREIRE, 2017). Aqueles que apresentaram estão no Quadro 5 a seguir.

Quadro 5: Sugestões para futuras pesquisas

Autor (ano)	Sugestões
Javaroni (2007)	Apresenta um possível caminho futuro como sendo a aplicação do que foi feito em uma disciplina regular de EDO
Ferreira (2010)	Sugere um trabalho similar, mas considerando o modelo do sistema de massa-mola amortecedor, o que geraria equação diferencial de segunda ordem. Também, investigar os resultados de uma proposta de uma sequência de atividades para modelar, por meio de uma equação diferencial de primeira ordem, o tempo necessário que um capacitor leva para se carregar, em um circuito RC (Resistor e Capacitor em série).
Fecchio (2011)	Desenvolver pesquisas, aliando Modelagem Matemática e Interdisciplinaridade, tencionando à formação crítica e profissional do engenheiro, abordando equações diferenciais lineares de primeira e segunda ordem (por exemplo, modelos como o sistema massa-mola, a carga e descarga de capacitores com corrente contínua e alternada) nas quais se examine a relação de troca entre sujeitos de pesquisa trabalhando em grupo para a formação do conhecimento.
Souza (2011)	Desenvolver trabalhos que possam responder a seguinte questão: Explorar um maior número de problemas aplicados às EDO's, pode desenvolver a capacidade de equacionar situações ou mesmo de criar modelos matemáticos?
Soares (2012)	Que tipo de relação o aluno faz entre a Matemática e a Biologia? Como são realizados os processos de produção de conhecimento envolvidos nas atividades de Modelagem? Como se manifesta o interesse dos alunos pelo fenômeno biológico e como esse interesse varia no decorrer da atividade? Qual é o impacto do uso de <i>software</i> nas atividades dos alunos?
Braga (2015)	Investigar a implementação de atividades de Modelagem em disciplinas optativas, nas quais os conteúdos matemáticos são livres, seguindo uma matriz curricular e

	oferecidas em turmas maiores.
Domingos (2016)	Recomenda aprofundar nos estudos relacionados à Modelagem Matemática no currículo de disciplinas de Licenciaturas.
Barros (2017)	Estudar os diferentes papéis da formação matemática na qualificação profissional de futuros engenheiros. Investigar os registros de representações semióticas e Modelagem Matemática para EDO's de 2ª ordem. Estudar diferentes abordagens das soluções de uma EDO (algébrica, qualitativa e numérica).
Robim (2017)	Pesquisar sobre a formação de professores em modelagem matemática, em uma concepção de ensino na qual o papel do professor esteja relacionado ao ensino dos usos que se faz dos conceitos matemáticos em contextos linguísticos, como a modelagem matemática. Investigar o papel da Matemática a partir da modelagem e na perspectiva de Wittgenstein. Investigar os usos da linguagem e procedimentos matemáticos em atividades de modelagem desenvolvidas em problemas reais.

Fonte: Dados da Pesquisa

Conforme já mencionamos antes, poucos trabalhos (33%) envolveram Modelagem com EDO's de 2ª ordem, ou seja, as modelagens produzidas envolveram, majoritariamente, EDO's de 1ª ordem. Alguns desses sugeriram que as EDO's de 2ª ordem fossem abordadas por outras futuras pesquisas. Exemplificando, Ferreira (2010) sugere um possível estudo envolvendo uma EDO de 1ª ordem, um circuito RC (Resistor e Capacitor em série). Além disso, ele recomenda um trabalho similar ao que ele desenvolveu, mas que considerem modelos que recaem em EDO's de 2ª ordem (como o sistema massa-mola-amortecedor). Fecchio (2011) também sugere pesquisas voltadas às EDO's de 1ª e de 2ª ordem e cita os mesmos modelos que Ferreira (2010), porém, tendo o foco na Interdisciplinaridade e a formação crítica do engenheiro.

Apesar dessas recomendações, percebemos que o enfoque ainda não é na aprendizagem das equações diferenciais. Apenas Soares (2012) e Barros (2017) sugeriram um olhar nesse sentido, estudando os diferentes meios de se obter uma solução de uma EDO. Soares (2012) faz diversas sugestões, no entanto elas são um olhar diferente diante do que foi feito ou uma análise de parte dos dados não analisados, segundo a própria autora. Assim como Soares (2012), algumas das sugestões são pequenas variações das próprias pesquisas produzidas (JAVARONI, 2007; DOMINGOS, 2016; BARROS, 2017) ou não apresentam uma clara diferença do que foi realizado no próprio trabalho (FECCHIO, 2011; ROBIM, 2017).

Desse modo, as recomendações de trabalhos futuros, quando feitas, não tendem para uma direção somente. Elas direcionam para a realização de atividades de modelagem com outros tipos de fenômenos físicos (e, conseqüentemente, outros tipos de EDO), em diferentes contextos (como em disciplinas optativas), em conjunto com outra teoria (como

a Interdisciplinaridade) e aliando diferentes os tipos de solução de uma EDO. Embora sejam recomendações válidas, elas não representam uma riqueza de apontamentos e não vão muito além do que já foi produzido na própria pesquisa.

Após essa síntese das conclusões dos trabalhos analisados, passamos às considerações finais.

Considerações Finais

Com a realização deste trabalho, tencionamos examinar o que pesquisas na área de Educação Matemática revelam sobre o uso da Modelagem Matemática envolvendo Equações Diferenciais Ordinárias e indicar possibilidades.

A partir desse objetivo primário, caracterizamos um conjunto de 12 pesquisas, levantadas no período de 2000 a 2020, identificando locais de produção, sujeitos envolvidos, bem como ênfases e direcionamentos metodológicos e teóricos, além dos objetivos e resultados obtidos. Encontramos uma mesma quantidade entre pesquisas de doutorado e de mestrado.

Os sujeitos envolvidos nas investigações consideradas abrangeram alunos de Licenciatura em Matemática e Física, mas a predominância foi de alunos de Engenharias. Embora haja cerca de 60 habilitações diferentes de Engenharia, poucas ainda foram abordadas. Isto é, há uma variedade de outras engenharias possíveis para pesquisas na temática aqui tratada.

Das 12 pesquisas analisadas, 5 envolveram a formação de professor, entretanto elas focaram na formação inicial do professor. Assim sendo, há uma lacuna para pesquisas envolvendo Modelagem Matemática com Equações Diferenciais focando a formação continuada.

Em relação ao ensino e à aprendizagem das EDO's, pouco foi analisado pelos autores. Uma das sugestões enfatizada pelos trabalhos analisados e que destacamos é a relevância dos professores conseguirem, de maneira equilibrada e simultânea, utilizar métodos analíticos, gráficos e recursos tecnológicos no estudo das equações diferenciais. Porém, há uma carência de mais pesquisas que analisem profundamente questões relacionadas ao aprendizado da disciplina em atividades de Modelagem.

Uma outra perspectiva possível é em relação aos tipos de EDO's tratadas nas modelagens, uma vez que identificamos uma tendência de uso de EDO's de 1ª ordem,

sendo tais EDO's geralmente as mesmas. Desse modo, há possibilidades de outras investigações envolvendo outras modelagens, aplicadas a problemas reais, e que envolvam outros tipos de EDO's, não apenas as de 1ª ordem. Ademais, outras abordagens de resolução podem ser empregadas e analisadas, como as Transformadas de Laplace ou de Fourier. Outros tipos de atividades, que apliquem EDO em outras situações, é algo que pode ser benéfico, não somente para futuras pesquisas, mas também para que um aluno possa ter contato com problemas ligados ao seu cotidiano e/ou sua futura área de atuação profissional.

Os autores dos trabalhos aqui examinados julgaram importante desenvolver um trabalho com os alunos em situações-problema, de forma contextualizada e que fosse de interesse do aluno, especialmente relacionadas às áreas de atuações futuras, pois, dessa forma, sentiram-se mais motivados, proporcionando um bom retorno à pesquisa. Para seguir essa sugestão, foi indicado o uso de Modelagem Matemática como uma estratégia de ensino favorável nesses aspectos. Mediante as pesquisas consideradas, observamos ainda uma demanda por estudos para compreender como os conhecimentos matemáticos são construídos pelos alunos e como serão usados no cotidiano do futuro profissional. As pesquisas analisadas retrataram diferentes perspectivas de Modelagem e os autores se posicionaram quanto à perspectiva adotada, mostrando uma tendência no cenário de pesquisas dentro da temática.

Quanto aos resultados dos trabalhos, notamos que a Modelagem Matemática é organizada e conduzida de diferentes maneiras, ela auxilia no interesse dos alunos e apresenta uma possibilidade pedagógica diferente da tradicional em aulas de EDO. Porém, demonstra dificuldades de implementação seja ela devido ao currículo, ao tempo despendido ou às estruturas da sala de aula tradicional.

A partir da revisão sistemática aqui apresentada, é possível constatar que a modelagem vem sendo aplicada em conexão com outras tendências da Educação Matemática, bem como tem cooperado com experiências em outros campos do conhecimento, como a Interdisciplinaridade. Isso indica que a modelagem, em conformidade com a concepção empregada, compreende entroncamentos com outros campos e enseja o diálogo entre distintas linhas de pesquisa, sejam elas da Educação Matemática ou não. Dessa maneira, consideramos que a comunidade nacional de pesquisadores da área, que, de acordo com Araújo (2012) e Barbosa (2007), encontra-se em consolidação, alicerçada em suas pesquisas, pode favorecer não somente as

discussões a respeito de modelagem, mas também outras linhas educacionais. Demonstra, ainda, reforçando autores como Barbosa (2009), que há lacunas que devem ser mais bem estudadas acerca da pesquisa em modelagem concernente a outras tendências, tanto em Educação Matemática como em áreas afins.

Além do que já foi abordado anteriormente, clarificamos uma lacuna. Alguns autores notam que, ao se examinar a produção científica sobre a modelagem em território nacional, “é notória a presença, em quase sua totalidade, de referências à Educação Matemática Crítica (EMC)” (MALHEIROS, 2012, p. 870). Nesse sentido, vários trabalhos têm destacado a importância da EMC no contexto civilizatório atual (LOPES, 2020). Jacobini e Wodewotzki (2006) debateram sobre a presença da modelagem no contexto da EMC. Entretanto, em se tratando do levantamento apresentado neste artigo, a afirmação desses autores não procede integralmente.

Diante do que foi exposto, os resultados aqui apresentados indicam uma janela de oportunidade de pesquisas que auxiliem no desenvolvimento da criticidade em alunos de Engenharia. Mais especificamente, as pesquisas de Educação Matemática que utilizem Modelagem Matemática com Equações Diferenciais podem se embasar na EMC, contribuindo para a criticidade do aluno, pois, como afirma Skovsmose (2017, p. 18), a “Educação Matemática Crítica também é relevante aos estudantes universitários de matemática e de engenharia”. Observa-se, portanto, uma vereda profícua de pesquisa que pode começar a dar seus primeiros frutos e configura-se numa região de inquérito rica em possibilidades investigativas.

Há 3 anos não consta no banco de dados da CAPES trabalhos relativos à temática deste artigo. Contudo, isso não significa que programas de Pós-graduação não estejam desenvolvendo pesquisas a respeito, apenas não estão ainda lá registradas, visto que pesquisas de mestrado e doutorado levam anos para serem concluídas. Logo, é possível que nos próximos anos encontremos outros trabalhos relacionados. Apesar de existir uma quantidade considerável de pesquisas envolvendo Modelagem Matemática, ainda é diminuta os trabalhos que envolvam Modelagem Matemática com Equações Diferenciais.

Com este artigo, não se propõe findar a análise da produção na área a respeito de Modelagem Matemática com Equações Diferenciais, mas, sim, colaborar com elementos que contribuem para o debate.

Referências

ALMEIDA, L. M. W.; SILVA, K. P.; VERTUAN, R. E. **Modelagem Matemática na Educação Básica**. São Paulo: Contexto, 2012.

ARAÚJO, J. L. Pesquisas sobre modelagem em eventos científicos recentes de educação matemática no Brasil. In: IV SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 4, 2009, Brasília. In: **Anais do 4º SIPEM**. Brasília: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2009, p. 1-19.

ARAÚJO, J. L. Ser crítico em projetos de modelagem em uma perspectiva crítica de educação matemática. **Boletim de Educação Matemática**, v. 26, n. 43, p. 839-859, ago. 2012.

BARBOSA, J. C. Modelagem e modelos matemáticos na educação científica. **Alexandria: Revista de Educação em Ciência e Tecnologia**, v. 2, n. 2, p. 69-85, jul. 2009.

BARBOSA, J. C. Sobre a pesquisa em modelagem matemática no Brasil. In: CONFERÊNCIA NACIONAL SOBRE MODELAGEM NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 5, 2007, Ouro Preto. In: **Anais do 5º CNMEM**. Ouro Preto: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2007, p. 82-103.

BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática**: uma nova estratégia. São Paulo: Contexto, 2002.

BIEMBENGUT, M. S. Mapeamento como princípio metodológico para a pesquisa educacional. In: MACHADO, N. J.; DA CUNHA, M. O. **Linguagem, conhecimento, ação**: ensaios de epistemologia e didática. São Paulo: Escrituras Editora, 2003, p. 01-11.

BORROMEO FERRI, R.; BLUM, W. Mathematical Modelling in Teacher Education Experiences from a Modelling Seminar. In: CONGRESS OF THE EUROPEAN SOCIETY FOR RESEARCH IN MATHEMATICS EDUCATION, 6, 2010, Lyon. **Anais do 6º CERME**. Lyon: INRP, 2010, p. 2046-2055.

BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. **Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno**. Rio de Janeiro: LTC, 1999.

CANEDO JR, N. R.; KISTEMANN JR, M. A. O movimento das pesquisas em modelagem matemática em Minas Gerais. **Revista Eletrônica de Educação Matemática**, v. 9, p. 100-123, jun. 2014.

CARARO, E. F. F.; KLÜBER, T. E. Concepções De Modelagem Matemática Na Formação De Professores Em Modelagem Matemática. In: XIV ENCONTRO PARANAENSE DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 14, 2017, Cascavel. **Anais do 14º EPEM**. Cascavel: UNIOESTE, 2017, p. 1-16.

CARVALHO, D. S.; NICOT, Y. E. Concepções de Modelagem Matemática presentes em Pesquisas Brasileiras na Educação Matemática. **South American Journal of Basic Education, Technical and Technological**, Rio Branco, v. 6, n. 1, p. 418-430, jan./jul. 2019.

CAVALCANTI, J. D. B. **A noção de Relação ao Saber**: História e Epistemologia. Panorama do Contexto Francófono e Mapeamento de sua utilização na literatura científica brasileira. 2015. 428f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências – Universidade Federal Rural de Pernambuco. Recife.

FERREIRA, N. S. A. As pesquisas denominadas “estado da arte”. **Educação & Sociedade**, v. 22, n. 79, p. 257-272, 2002.

JACOBINI, O. R.; WODEWOTZKI, M. L. L. Uma reflexão sobre a modelagem matemática no contexto da educação matemática crítica. **Boletim de Educação Matemática**, v.19, n. 25, p. 71-88, ago. 2006.

KLÜBER, T. E; BURAK, D. Concepções de modelagem matemática: contribuições teóricas. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 10, n. 1, p. 17-34, jan./jul. 2008.

LOPES, A. Formação crítica dos professores de Matemática articulada às questões contemporâneas. **Revista de Ensino de Ciências e Matemática**, v. 11, n. 6, p. 809-817, 1 out. 2020.

MALHEIROS, A. P. S. Pesquisas em modelagem matemática e diferentes tendências em educação e em educação matemática. **Boletim de Educação Matemática**, v. 26, n. 43, p. 89-110, ago. 2012.

OLIVEIRA, E. A.; IGLIORI, S. B. C. Ensino e Aprendizagem de equações diferenciais: Um levantamento preliminar da produção científica. **Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana**, v. 4, n. 2, p. 2-22, ago. 2013.

PEREIRA, R. S. G.; SEKI, J. T. P.; PALHARINI, B. N.; DAMIN, W.; SILVA, A. C.; MARTINS, B. O. A modelagem matemática no Brasil: Resultados de uma revisão integrativa de teses e dissertações. **Revista Thema**, v. 15, n. 1, p. 156-167, mar. 2018.

ROMAN, A. R.; FRIEDLANDER, M. R. Revisão integrativa de pesquisa aplicada à enfermagem. **Cogitare Enfermagem**, v.3, n. 2, p. 109–112, jul./dez. 1998.

ROMANOWSKI, J. P., ENS, R. T. As pesquisas denominadas “estado da arte” em educação. **Revista Diálogo Educacional**, v. 6, n. 19, p. 37-50, set./dez. 2006.

ROSA, M.; OREY, D. C. The mathematics of the curves on the wall of the Colégio Arquidiocesano and its mathematical models: A case for *ethnomodeling*. **Journal of Mathematical Modelling and Application**, v. 1, n. 8, p. 42–62, jan. 2013.

SCÁRDUA, B. **Equações ordinárias e aplicações**. Rio de Janeiro: SBM, 2015.

SILVEIRA, E. **Modelagem matemática em educação no Brasil**: Entendendo o universo de teses e dissertações. 2007. 197f Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Universidade Federal do Paraná. Curitiba.

SKOVSMOSE, O. O que poderia significar a Educação Matemática para diferentes grupos de estudantes? **Revista Paranaense de Educação Matemática**, v. 6, n. 12, p. 18-37, jul./dez. 2017.