Una aplicación del geoplano ortométrico

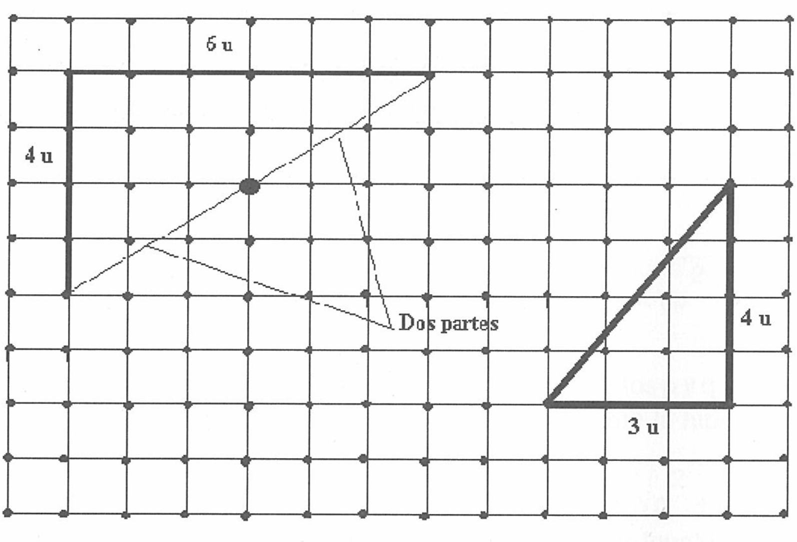
Juan Contreras Guerrero

Resumen

Todos los que nos dedicamos a la enseñanza de las matemáticas conocemos el geoplano ortométrico y algunas de sus aplicaciones. Se trata de una plancha de madera u otro material, en la que se disponen de forma regular una serie de clavos o puntos en trama cuadrangular pudiéndose formar en él figuras utilizando gomas elásticas. En este pequeño artículo se expone un acercamiento manipulativo a los conceptos de máximo común divisor y del mínimo común múltiplo de dos números, así como su fundamento matemático.

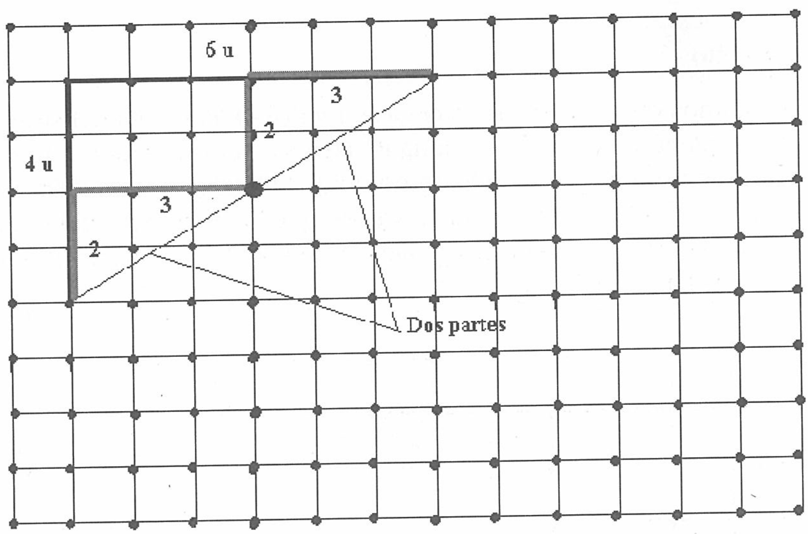
Desarrollo

Supongamos que queremos calcular el mcd(6,4). Para ello construimos en el geoplano un triángulo rectángulo cuyos catetos midan 6 y 4 unidades respectivamente, tomando como unidad el lado de un cuadrado de la trama. Uniendo los catetos observamos que la hipotenusa del triángulo queda dividida en dos partes iguales por un punto de la trama y el mcd de 6 y 4 es también 2.

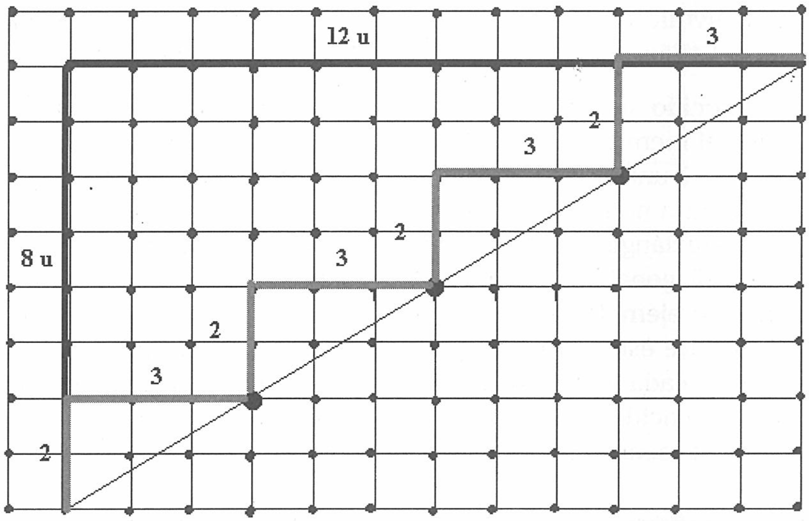


Si los números son primos entre sí, sabemos que su mcd es la unidad y entonces la hipotenusa del triángulo cuyos catetos son esos números no pasa por ningún punto de la trama.

También se observa, en el caso del mcd(6,4), que se pueden construir dos triángulos rectángulos de lados 3 y 2 unidades respectivamente y cuyos vértices de ángulos agudos están situados en puntos de la trama. Las hipotenusas de estos triángulos rectángulos no pasan por puntos de la trama, no quedando éstas divididas en partes iguales por ningún punto del geoplano, dado que los catetos son números primos entre sí. En este caso las hipotenusas se consideran como unidad. Aquí podemos justificar claramente la propiedad del máximo común divisor de dos números que dice: **"Si mcd(a,b) = d, entonces mcd(a/d, b/d) = 1"**; en el ejemplo 6/2=3, 4/2=2 y mcd(3,2) = 1



Otro ejemplo: mcd(12,8)



Aquí vemos que mcd(12,8) = 4 y que mcd(12/4,8/4) = mcd(3,2) = 1

¿Cuál es la explicación?

Sabemos que si $\mathrm{mcd}(a,b) = d \Rightarrow \begin{cases} a = p \cdot d \\ b = q \cdot d \end{cases}$ con $\mathrm{mcd}(p,q) = 1$

Tomando un triángulo rectángulo de catetos a y b unidades, respectivamente, se tiene que el valor de la hipotenusa h es:

$$h^2 = a^2 + b^2 = (p \cdot d)^2 + (q \cdot d)^2 = p^2 \cdot d^2 + q^2 \cdot d^2 = d^2 \cdot \left(p^2 + q^2\right)$$

$$h = \sqrt{d^2 \cdot \left(p^2 + q^2\right)} = d \cdot \sqrt{p^2 + q^2} = d \cdot h', \quad \text{con } h' = \sqrt{p^2 + q^2}$$

siendo h´ la hipotenusa del triángulo rectángulo de catetos p y q unidades, números primos entre sí, cuyos extremos situados sobre la hipotenusa h coinciden con vértices de la trama.

La hipotenusa h contiene "d" veces el segmento $h' = \sqrt{p^2 + q^2}$. Esto significa que la hipotenusa queda dividida en "d" partes iguales de longitudes h´, estando las divisiones en puntos de trama cuadrada.