

Un modelo matemático para la difusión de culturas y poblaciones

Albert Fàbrega

Introducción

Imaginemos que desde dos puntos situados a cierta distancia, cada uno de ellos cuna de una civilización, las respectivas poblaciones o culturas se expanden bajo ciertas condiciones, de forma que el territorio va siendo ocupado por ellas.

En un modelo muy simple de esta expansión, es posible estudiar las regiones que finalmente coloniza cada cultura, y, en particular, las fronteras entre ellas.

Un buen ejemplo, del cual se han obtenido las ideas para este artículo, es el que ofrece la civilización megalítica en la península ibérica. Desde que comenzó su estudio, a finales del siglo XIX y a primeros del XX, llamó poderosamente la atención de los arqueólogos el hecho de que en el centro y levante hispánicos hay una ausencia total de megalitos, y que parece haber una frontera bastante definida entre dos culturas contemporáneas.

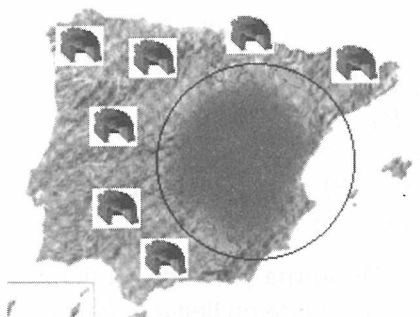


Figura 1

Quizás el modelo que se ofrece sea aún poco elaborado para dar cuenta de dicho fenómeno, pero es lo bastante elemental –por lo que se refiere al aparato matemático necesario– como para permitir, por un lado, mejoras que lo adecuen a la realidad y, por otro, hacer uso de él

en las aulas, como base de discusión y estudio de las técnicas matemáticas aplicadas a las ciencias sociales.

El modelo

En el modelo hacemos las siguientes hipótesis:

1. El territorio es R_2 .
2. Cada población se expande a partir de un centro de cultura al que llamamos **foco**.

3. El número de culturas es finito ($n > 1$). En principio son dos o tres.
4. La expansión es radial: tiene lugar en línea recta en todas direcciones y a partir del foco.
5. En cada dirección la velocidad es constante, y, por lo tanto, la velocidad de expansión sólo depende de la dirección.
6. Cuando un individuo alcanza un punto no ocupado, lo ocupa y sigue adelante en la misma dirección.
7. Si un individuo llega a un punto ocupado, sigue adelante en la misma dirección.
8. Si varios individuos (de diferente cultura) llegan simultáneamente a un punto, este punto es "tierra de nadie" y cada uno de ellos sigue su camino en su propia dirección.
9. Si, eventualmente, hay contradicciones sobre qué cultura ha de ocupar un punto determinado, el punto queda como "tierra de nadie".

Dos focos

Supongamos que una cultura tiene foco $F = (-a, 0)$ y otra cultura tiene foco $F' = (a, 0)$. Para un punto $P = (x, y)$ cualquiera, el tiempo que tarda en llegar a él la cultura F es

$$t_F = \frac{d_F(P)}{v_F(P)}$$

donde $d_F(P)$ es la distancia de P a F y $v_F(P)$ es la velocidad (constante) de expansión de la cultura F en la dirección FP .

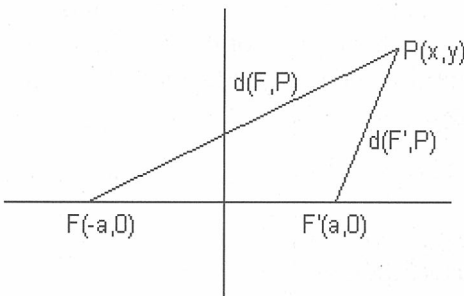


Figura 2

De forma parecida, el tiempo que tarda en llegar a P la cultura F' es

$$t_{F'} = \frac{d_{F'}(P)}{v_{F'}(P)}$$

Los puntos de la frontera serán aquellos en los cuales $t_F = t_{F'}$ es decir,

$$\frac{d_F(P)}{v_F(P)} = \frac{d_{F'}(P)}{v_{F'}(P)}$$

y, por lo tanto, en estos puntos

$$\frac{d_F(P)}{d_{F'}(P)} = \frac{v_F(P)}{v_{F'}(P)}$$

Expansión uniforme

Si ahora suponemos que la velocidad de expansión de cada una de las culturas es la misma en todas direcciones, de forma que

$$\frac{v_F(P)}{v_{F'}(P)} = c, \text{ con } c > 0$$

(es decir, que F se expande en todas direcciones c veces más rápido que F'), entonces tenemos

$$\frac{d_F(P)}{d_{F'}(P)} = c$$

$$\frac{d_F^2(P)}{d_{F'}^2(P)} = c^2 = k > 0$$

De donde resulta

$$\begin{aligned} (x+a)^2 + y^2 &= k(x-a)^2 + ky^2 \\ (k-1)x^2 + (k-1)y^2 - 2a(k+1)x &= -a^2(k-1) \\ x^2 + y^2 - 2a\lambda x + a^2 &= 0 \end{aligned}$$

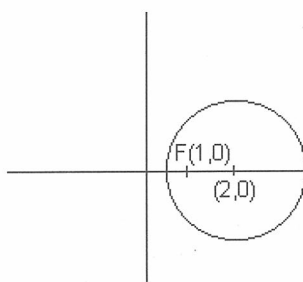


Figura 3

$$\text{con } \lambda = \frac{k+1}{k-1}$$

y por tanto

$$(x-a\lambda)^2 + y^2 = a^2(\lambda^2 - 1)$$

Si $k > 1$, se trata de un círculo¹ con centro

¹ Es curioso que en la página 55 de Prehistoria Catalana, Bosch Gimpera titula una sección dentro del capítulo del neolítico y el eneolítico así: "Los diferentes círculos de cultura".