Trabajando con el hexágono

Inmaculada Fernández Benito y Encarnación Reyes Iglesias

Resumen

En este artículo se presentan varias construcciones geométricas que se obtienen a partir del hexágono regular. Tomando como base este polígono se constata la presencia de otras figuras derivadas. Así, por ejemplo, se muestran: parhexágonos, hexagramas, estrellas de seis puntas, diagramas meditativos, signos lapidarios, logotipos, ...

Se ofrecen también ejemplos de actividades que pueden adaptarse a cualquiera de los niveles educativos. Con ellas se pretende que los motivos geométricos estudiados propicien la investigación de relaciones numéricas y algebraicas interesantes.

Abstract

In this article several geometrical constructions have been obtained from the regular hexagon. The same way, other interesting figures based on this polygon can be built; for instance: parhexagons, hexagrams, six pointed stars, meditative diagrams, lapidary signs, logos, ...

Some examples of exercises are also proposed. These activities are suitable to be adapted to all educational levels. Their main purpose is to induce the investigation of the numerical and algebraic relations from the geometrical motives studied.

Hexagrama

Se conoce con este nombre la figura que puede obtenerse de una de las siguientes formas:

- A partir de dos triángulos equiláteros girados 60° uno respecto de otro (por tanto no es un polígono, sino dos). Fig. 1.

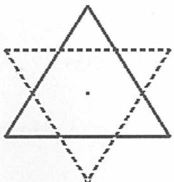


Figura 1

- A partir de un hexágono regular trazando segmentos que unan dos vértices no consecutivos, finalizando el proceso cuando los seis vértices estén enlazados. La forma estrellada obtenida se denota con el símbolo 6/2, donde 6 es el número de vértices del polígono inicial y 2 indica que se unen los vértices alternando de dos en dos. Fig. 2.

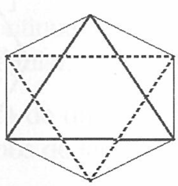


Figura 2

Este motivo conocido también como «estrella de David» o «sello de Salomón» es el símbolo de la cultura hebrea y de la religión judía.

Estrella hexagonal

Destacando el contorno del hexagrama se obtiene un polígono cóncavo de doce lados, doce vértices y ángulos de dos tipos, que se denota con el símbolo $|6/2|$. Fig. 3.

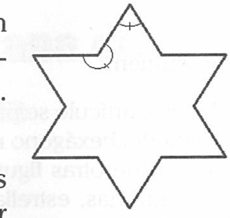


Figura 3

Esta estrella hexagonal puede diseccionarse en seis rombos de ángulos 60º y 120º (diamantes formados por la yuxtaposición de dos triángulos equiláteros cuyo lado mide la longitud del lado del polígono cóncavo). Fig. 4.

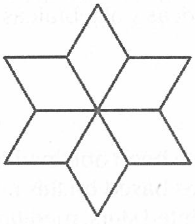


Figura 4

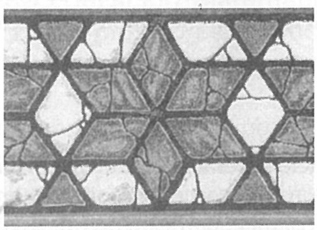


Figura 5

En la figura 6 se ha considerado el hexágono regular circunscrito a las estrellas de los párrafos anteriores. Trazando la diagonal D perpendicular al lado L y aplicando el teorema del Coseno en el triángulo isósceles de lados L, L y D, se tiene: $D^2 = 2L^2 - 2L^2 \cos 120^\circ$.

Sabemos que $120^\circ = 180^\circ - 60^\circ$, por tanto $\cos 120^\circ = -\dfrac{1}{2}$.

Entonces $D^2 = 2L^2 (1+\dfrac{1}{2}) = \dfrac{2L^2}{2} 3 = 3L^2$ y, por tanto,

$\dfrac{D^2}{L^2} = 3$; de donde $\dfrac{D}{L} = \sqrt{3}$. Fig. 6

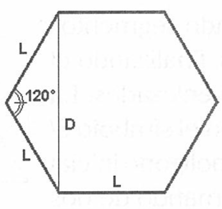


Figura 6

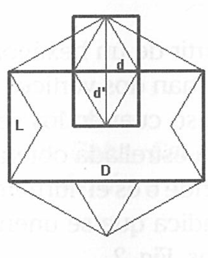


Figura 7

Esto significa que el rectángulo de lados D y L tiene proporción $\sqrt{3}$.

Las longitudes de las diagonales de uno de los rombos en que se descompone la estrella están en la misma proporción que el rectángulo anterior (Fig. 7). En efecto, tomando el lado de la estrella como unidad, cada rombo está formado por dos triángulos equiláteros de base 1 y altura $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Entonces se tiene que la diagonal menor del rombo d mide 1 y la diagonal mayor d' tiene longitud $\sqrt{3}$. En consecuencia, cada uno de estos rombos puede inscribirse en un rectángulo semejante al rectángulo de lados D y L.

Parhexágono

Se conoce con este nombre el hexágono que tiene sus lados dos a dos paralelos e iguales en longitud (Fig 8). El hexágono regular es el ejemplo más conocido de parhexágono, sin embargo hay gran variedad de ellos. El parhexágono situado a la derecha de la figura 8 aparece frecuentemente en vidrieras, pavimentos y objetos cotidianos (Figuras 9 y 10).

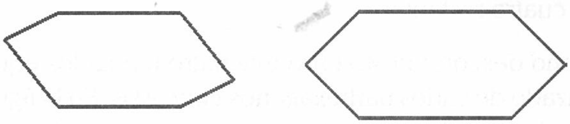


Figura 8

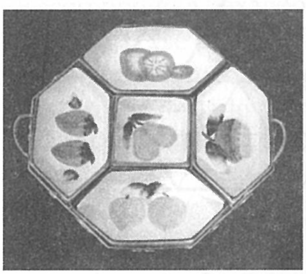


Figura 9

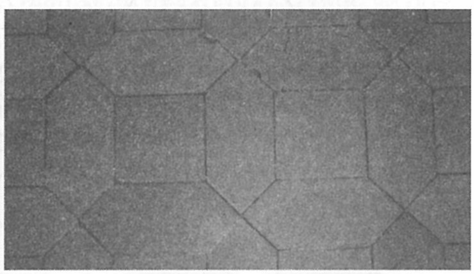


Figura 10

Pueden generarse parhexágonos de formas diferentes. A continuación mostramos algunos ejemplos trazados a partir del hexágono regular.

a) Se dibuja el simétrico de un hexágono regular respecto de uno de sus lados, obteniéndose el parhexágono al trazar dos rombos de lado igual al del hexágono inicial. Fig. 11.

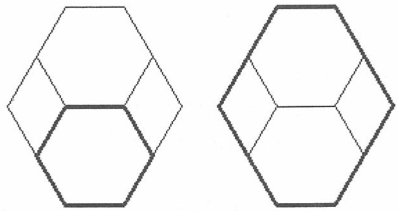


Figura 11

b) Se construyen seis hexágonos simétricos respecto de cada uno de los lados del hexágono inicial. El parhexágono se obtiene al unir lados y diagonales de estos hexágonos como se muestra en la figura 12.

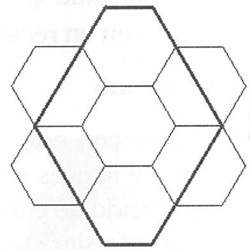


Figura 12

Obsérvese que el hexágono construido es equiángulo de 120º (ángulo interior del hexágono) y sus lados miden: una unidad (medida del lado del hexágono inicial) dos de ellos y tres unidades los cuatro restantes.

c) El hexágono descompuesto en veinticuatro triángulos equiláteros permite el trazado de varios parhexágonos cóncavos. En la figura 13 se han destacado dos de ellos formados por cuatro y ocho triángulos respectivamente.

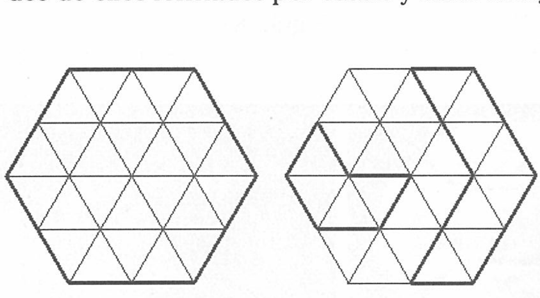


Figura 13

Signos y diagramas

La forma estrellada derivada del hexágono (hexagrama) fue utilizada como trama para diseñar muchos de los signos lapidarios que los maestros constructores de obras dejaban como firma en las iglesias y catedrales del medievo. En esta época, la transmisión del conocimiento se realizaba oralmente, o simbólicamente mediante el empleo de esas marcas de cantería. En la figura 14 se han trazado cuatro signos utilizando como base generadora o figura matriz el hexagrama.

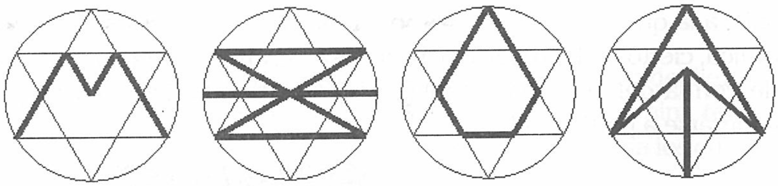


Figura 14

Algunos diagramas meditativos, como el que aparece en la parte derecha de la figura 15 también pueden obtenerse a partir del hexagrama.

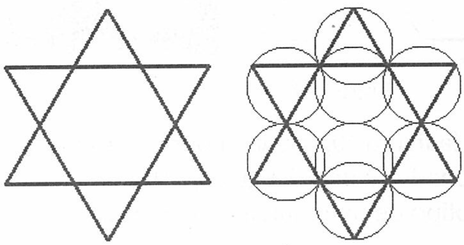


Figura 15

El conjunto de doce puntos espaciados (seis vértices y seis puntos de intersección de los dos triángulos que determinan el hexagrama) representan los signos del zodiaco.

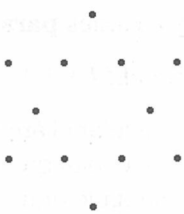


Figura 16

Logotipos

a) Al descomponer el hexágono regular en tres rombos, como se observa en la figura 17, se puede visualizar una representación en perspectiva del hexaedro. La subdivisión de este cubo en ocho cubos, cuyos lados miden la mitad del lado del hexágono de partida, ha sido utilizado como logotipo de una empresa constructora.

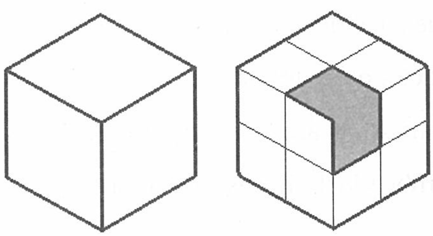
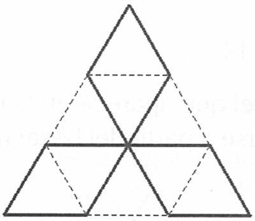


Figura 17

b) La figura cíclica obtenida al girar 120° un rombo formado por dos triángulos equiláteros (Fig. 18), además de ser el logotipo de una conocida marca automovilística, es una runa nórdica, símbolo de «poder celestial», a la que se atribuyen, como a todos los caracteres de la escritura rúnica, cierto poder mágico o misterioso. Su área evidentemente coincide con la del hexágono regular. Obsérvese en la figura como puede generarse a partir de él.



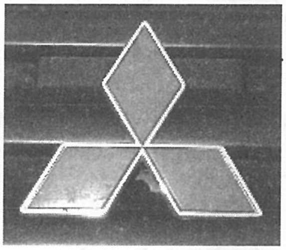


Figura 18

c) La estrella de la figura 19, formada por seis rombos cada uno diseccionado en dos triángulos, es la base para el diseño del logotipo de una marca de cerveza.

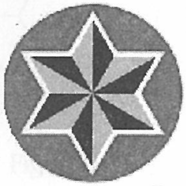


Figura 19

Activadades para el aula

Actividad 1

a) Calcular el área del hexagrama, relacionándola con el área del hexágono regular que contiene. Se recomienda tomar como unidad el lado del triángulo equilátero (punta del hexagrama).

b) Hallar el área del rombo sombreado de la figura 21.

c) Hallar el lado y el área del hexágono circunscrito al hexagrama. (deducir que la apotema de este hexágono mide 3/2).

d) Calcular el área del triángulo isósceles sombreado (deducir que su altura es 1/2).

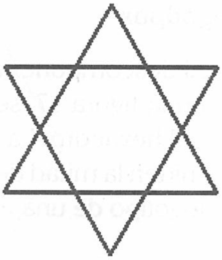


Figura 20

e) Establecer relaciones entre:

- El área de un rombo y el área del hexagrama.
- El área de un rombo y la del hexágono circunscrito.
- Áreas de los dos hexágonos regulares (inscrito y circunscrito a la estrella).

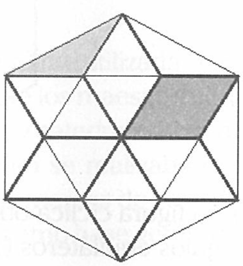


Figura 21

Actividad 2

La parte izquierda de la figura 22 presenta una configuración de diez puntos espaciados formando un triángulo equilátero que se denomina ***tetraktys***. Fue muy importante para los pitagóricos porque simbolizaba los cuatro elementos: tierra, aire, fuego y agua.

Acoplando dos ***tetraktys,*** como se muestra en la parte derecha de la figura 22, se obtienen doce puntos que unidos entre sí generan un hexagrama. Notar que el punto central ha sido eliminado del esquema.

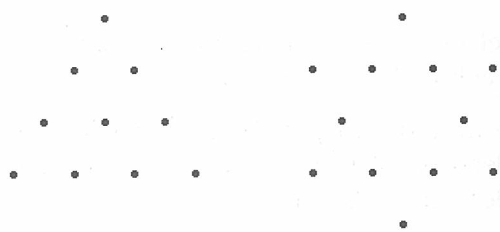


Figura 22

El tetraktys tiene relación con los números poligonales, en concreto es el cuarto número triangular.

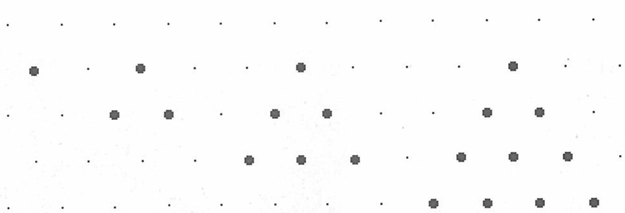


Figura 23

a) Calcular el término general de la sucesión de los números triangulares.

b) Investigar sobre los números poligonales.

c) Establecer relaciones entre las distintas familias de estos números. Por ejemplo comprobar que cada número cuadrado c_n es suma de los dos números triangulares t_n y t_{n-1}.

Actividad 3

En la figura 24 se observa la disección de un hexágono regular en seis parhexágonos cóncavos y equiláteros. Suponiendo que el lado de cada uno de estos parhexágonos mide uno, calcular el área del mismo y la del hexágono regular.

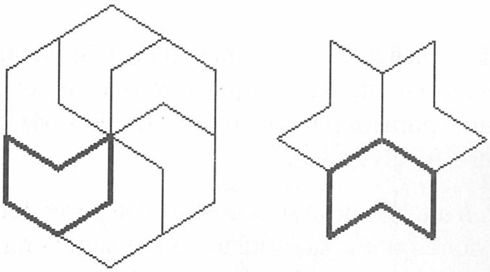


Figura 24

Comprobar que el resultado obtenido para este último hexágono, coincide con el calculado aplicando la fórmula clásica.

Observando la estrella de la figura 24 vemos que está formada por tres parhexágonos idénticos a los que completan el hexágono regular de la parte izquierda de la misma figura.

Deducir el valor del área de la estrella a partir de los cálculos anteriores.

Inscribir la estrella en el hexágono para corroborar los resultados obtenidos.

Actividad 4

El mosaico de la figura 25 es una composición de estrellas, rombos y parhexágonos. Hallar el área de cada uno de estos polígonos, tomando como unidad la medida del lado del rombo.

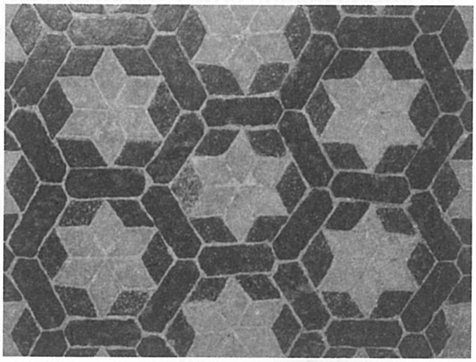


Figura 25

Actividad 5

Sobre los trazados de los signos de cantería de la Figura 14 se propone enunciar y resolver ejercicios adaptados al currículo de cada curso y grupo de alumnos. Por ejemplo:

- Puntos base de cada trazado.
- Formas poligonales, cóncavas y convexas.
- Longitudes de segmentos y polígonos.
- Áreas de los polígonos que encierran estas marcas.

Actividad 6

A partir del diagrama de la figura 26 se plantean enunciados adaptados a los distintos niveles educativos, por ejemplo:

- Área de un pétalo de la roseta. Área de la roseta.
- Área comprendida entre el hexagrama y la roseta.
- Área de triángulos curvilíneos.

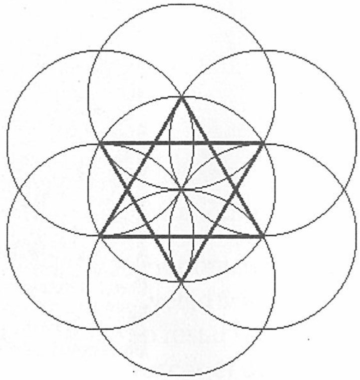


Figura 26

Bibliografía

Fernández, I; Reyes, E.(2003): *Geometría con el hexágono y el octógono*. Proyecto Sur de Ediciones.

Kappraf, J. (2001): *The geometric bridge between art and science*. World Scientific.

Pavón, N. (1998): *Signos lapidarios de los canteros en la Catedral de Burgos*. Publicaciones de la Excma. Diputación de Burgos.

Inmaculada Fernández Benito es Licenciada en Matemáticas por la Universidad de Valladolid. Catedrática de Matemáticas en el IES María Moliner de Laguna del Duero (Valladolid). Sus principales campos de interés son la invetigación en Geometría y su aplicación al Arte y a la Arquitectura, así como la Educación Matemática.
Correo electrónico: lferna3@platea.pntic.mec.es

Encarnación Reyes Iglesias es Licenciada en Matemáticas por la Universidad de Valladolid y Doctora en Matemáticas por la misma Universidad en 1985. Es Profesora Títular del Área de Matemática Aplicada en la ETS de Arquitectura de la Universidad de Valladolid. Su investigación abarca desde la Matemática Aplicada a la Arquitectura. Otros intereses son la Papiroflexia Geométrica, las Matemáticas aplicadas a la vida cotidiana y la Educación Matemática.
Correo electrónico: ereyes@maf.uva.es

XI Jornadas sobre
el Aprendizaje
y la Enseñanza
de las Matemáticas
(XI JAEM)

ENCUENTROS EDUCATIVOS

ACTAS

XI JAEM

CANARIAS, 2003