

SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN, MAPAS CONCEPTUALES Y CONCEPCIONES DE LOS PROFESORES SOBRE LA FUNCIÓN CUADRÁTICA¹

PEDRO GÓMEZ, CRISTINA CARULLA

En el estudio que se reporta aquí se exploraron las concepciones de profesores de matemáticas de secundaria acerca de la función cuadrática con base en una serie de mapas conceptuales que ellos, organizados por grupos, produjeron con motivo de un esquema de interacción que involucró tres tipos de análisis: de contenido, de instrucción y cognitivo. Los sistemas de representación fueron el eje organizador estos mapas conceptuales que fueron codificados con base en una serie de atributos que pretendían identificar aquello que el profesor reconoce como esencial del objeto, el tipo de representaciones que él utiliza para abordar el objeto y el conjunto de situaciones, fenómenos y problemas que él asocia al objeto. El análisis de los resultados se hizo con base en una caracterización de los mapas conceptuales y muestra que la utilización de los sistemas de representación, los mapas conceptuales y el análisis didáctico, junto con un esquema de trabajo en el que se trabaja en grupo, en el que se interactúa con investigadores y en el que se contrastan las producciones socialmente, puede afectar las visiones de los profesores sobre el contenido matemático.

INTRODUCCIÓN

El problema que dio lugar a este estudio tenía que ver con la contrastación de una hipótesis que surgió a lo largo de la realización de varios programas de formación permanente de profesores. Nosotros percibimos en estos programas, que, cuando los profesores se enfrentan al problema de analizar un concepto matemático desde la perspectiva del análisis didáctico² (análisis de contenido, análisis de instrucción y análisis cognitivo) con la ayuda de

1. El estudio que se reporta aquí tuvo el apoyo del Instituto para la Investigación y el Desarrollo Pedagógico (IDEP) a través del contrato N° 66 de 1998. Queremos agradecer a Vilma María Mesa y Patricia Perry, quienes leyeron y comentaron una primera versión de este artículo.

2. Esta es una versión resumida y adaptada de lo que los investigadores españoles llaman el análisis didáctico (González, 1995).

los sistemas de representación y los mapas conceptuales como eje organizador, los primeros, y como herramienta de representación, los segundos, entonces los profesores se hacen paulatinamente más conscientes de la complejidad del contenido matemático y de la problemática de su enseñanza y aprendizaje.

Para explorar sistemáticamente esta hipótesis, se diseñó un esquema de interacción basado en estas herramientas didácticas y se recolectó información producida por los profesores. Esta información estaba presentada en forma de mapas conceptuales. El análisis de estos mapas conceptuales muestra una evolución en las producciones de los profesores.

Este artículo comienza describiendo el papel que pueden jugar los mapas conceptuales, los sistemas de representación y el análisis didáctico en la exploración y el desarrollo de las concepciones de los profesores de matemáticas sobre la función cuadrática. Con base en esta reflexión se propone una posible categorización de los mapas conceptuales sobre la función cuadrática y se describe el esquema de interacción en el que se recogió la información y el instrumento que se utilizó para codificarla. Finalmente se presentan y analizan los resultados y se sugieren algunas conclusiones.

MARCO CONCEPTUAL

En este apartado mostramos la relación entre los mapas conceptuales y los sistemas de representación como medios para afectar y explorar las concepciones de los profesores sobre la función cuadrática.

Concepciones de los profesores

La utilización de los sistemas de representación como eje organizador de las producciones de los profesores y los mapas conceptuales como herramienta de representación de estas producciones permite examinar (al menos desde una perspectiva particular) las concepciones de los profesores sobre la función cuadrática. La descripción de las concepciones como una red de representaciones internas conectadas entre sí en una estructura con diversos niveles de complejidad (Hiebert y Carpenter, 1992), invita a mirar las concepciones con base en los sistemas de representación externos como medio para abordar las representaciones internas y a utilizar los mapas conceptuales como medio para representar gráficamente y de manera no lineal la complejidad de esas estructuras cognitivas. Por otro lado, los estudios que han utilizado los mapas conceptuales como herramienta de investigación para explorar las concepciones (e.g., Williams, 1998; McGowen, 1998 y los otros estudios que estas autoras mencionan) muestran que esta es una herramienta eficiente para este tipo de exploración.

Con base en lo anterior, en este estudio asumimos una posición “operacional” de las concepciones de los profesores que sigue de cerca y adapta las propuestas de Ruiz (1993) y Balacheff (1996). De acuerdo con esta posición, buscamos explorar las concepciones de un profesor sobre un objeto matemático, al identificar, con base en sus producciones, tres características:

- aquello que el profesor reconoce como esencial del objeto,
- el tipo de representaciones que él utiliza para describir el objeto y
- el conjunto de situaciones, fenómenos y problemas que el profesor asocia al objeto, es decir para cuyo análisis él encuentra apropiado su uso.

Mapas conceptuales

Los mapas conceptuales son una técnica para representar visualmente la estructura de la información. Es decir, los mapas conceptuales son un sistema de representación cuyas normas son relativamente sencillas (Lanzing, 1998): “los conceptos se representan por nodos a los que se les da una etiqueta por medio de una palabra o una frase corta que indica el concepto. Las relaciones se representan por líneas (enlaces) que conectan los nodos” (p. 2).

Como sistema de representación, los mapas conceptuales tienen dos ventajas importantes:

- Permiten descripciones no lineales del objeto.
- Al tener un carácter gráfico, resaltan la estructura de la información.

Estas dos cualidades son muy importantes para la descripción de objetos matemáticos y su correspondiente discurso matemático. La estructura del contenido matemático no es lineal. Una representación de un concepto (u objeto) está relacionada con muchas otras representaciones de conceptos (u objetos). Por consiguiente, hay una estructura que representa la manera como las representaciones se conectan unas con otras. Aunque estas son características bien conocidas de los objetos matemáticos y su correspondiente discurso, este último se hace, en general, dentro de un texto. Esto implica, por un lado, que la descripción tiene que ser lineal, y, por el otro, que no es posible ver “gráficamente” la estructura del discurso. Hay que deducirla de la lectura del texto. En consecuencia, en contraposición con la descripción textual, los mapas conceptuales resultan muy potentes para la descripción del discurso matemático y, como veremos más adelante, cuando se conjugan con la noción de sistema de representación, esta potencia se multiplica.

Cuando se utilizan para describir contenido matemático, los mapas conceptuales pueden tener unas características que dependen, al menos parcialmente, de ese contenido. Un mapa conceptual con contenido matemático permite identificar *submapas*. Los submapas son porciones del mapa global en las que se desarrolla una parcela particular y fácilmente identificable del contenido en cuestión (por ejemplo, aquella parte del mapa en la que se describe una de las formas simbólicas de la función cuadrática o la descripción de un objeto matemático dentro de un sistema de representación particular). Los mapas o submapas se pueden caracterizar por el número de niveles que contienen. La figura 1 muestra un mapa con dos niveles y otro con cuatro niveles.

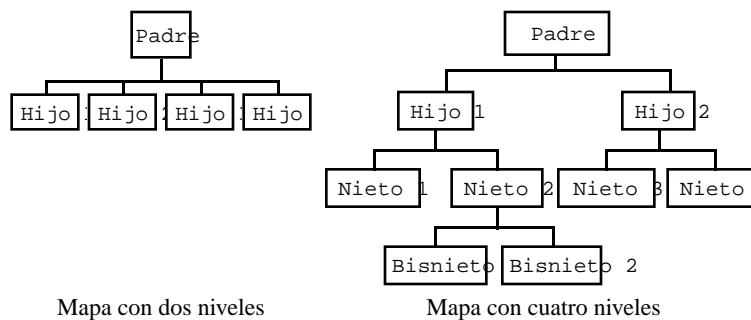


Figura N° 1. Estructuras de submapas

Sistemas de representación

El término “sistema de representación” tiene diferentes significados en la educación matemática. De hecho, un grupo de investigadores pertenecientes al PME ha trabajado en el tema y producido una categorización de estos significados (Goldin y Janvier, 1998, pp. 1-2).

Buscamos utilizar los sistemas de representación para *representar* diferentes facetas de un objeto matemático y trabajamos con los sistemas de representación bajo el supuesto de que se ciñen a un conjunto de reglas que se encuentran condicionadas por las matemáticas en general y por el objeto matemático específico, en particular. Por estas razones, consideramos que la definición de Kaput (1992) sobre sistema de notación se adapta a nuestras necesidades. De acuerdo con esta definición, “un sistema de notación es un sistema de reglas para (i) identificar o crear caracteres, (ii) operar en ellos y (iii) determinar relaciones entre ellos (especialmente relaciones de equivalencia)” (p. 523). Esta definición le permite a Kaput describir las actividades matemáticas que tienen lugar en las matemáticas escolares, con base en la noción de sistemas de representación:

- 1) transformaciones sintácticamente restringidas dentro de un sistema particular, con o sin referencia a otros significados externos;
- 2) traducciones entre sistemas de notación, incluyendo la coordinación de acciones a través de sistemas de notación;
- 3) construcción y verificación de modelos matemáticos, lo que es equivalente a la traducción entre aspectos de una situación y conjuntos de notaciones; y
- 4) la consolidación o cristalización de relaciones y procesos en objetos conceptuales o “entidades cognitivas” que pueden ser usadas en relaciones y procesos de un orden más alto de organización.

La noción de sistema de representación permite organizar la representación de un objeto matemático en un mapa conceptual. Cada sistema de representación es un submapa. La descripción de los fenómenos o situaciones cuyo análisis requiere de la utilización de un modelo que involucra al objeto es otro submapa, que denominamos “aplicaciones”. Cuando el objeto matemático se representa en un mapa conceptual, se identifican dos tipos de objetos en la gráfica: elementos y relaciones (o conexiones). Las relaciones pueden ser de diferentes tipos. En otras palabras, un elemento puede estar relacionado:

- a. con otros elementos dentro de la forma particular o dentro del sistema de representación en el que se encuentran;
- b. con una representación de ese mismo elemento en otro sistema de representación;
- c. con un fenómeno que lo involucra; o
- d. con dos elementos interconectados para los cuales sirve de puente.

Vemos entonces que los sistemas de representación y los mapas conceptuales ofrecen una perspectiva para caracterizar las actividades matemáticas escolares. En un mapa conceptual podemos, de acuerdo con la enumeración anterior, identificar cada una de las actividades matemáticas descritas por Kaput. La relación o conexión de elementos dentro de un mismo sistema de representación (a) corresponde a las transformaciones sintácticas (1). Estas transformaciones sintácticas permiten hacer la conexión entre dos o más elementos pertenecientes a un mismo sistema de representación. La relación entre dos representaciones de un mismo elemento en dos sistemas de representación (b) se refiere a la traducción entre sistemas de representación (2). La relación de un elemento con un fenómeno (elemento del sistema de representación de aplicaciones, c) tiene que ver con la construcción de mode-

los (3). Finalmente, “la consolidación o cristalización de relaciones y procesos en objetos conceptuales o ‘entidades cognitivas’ que pueden ser usadas en relaciones y procesos de un orden más alto de organización” (4) puede identificarse en un mapa conceptual al analizar el lugar que ocupan los procedimientos dentro de la estructura (d). Estos pueden ser el objeto mismo de la descripción o ser conexiones que establecen relaciones entre dos elementos del mapa.

Función cuadrática

La riqueza y complejidad de la función cuadrática como objeto de enseñanza en la educación secundaria motivó nuestro interés en ella. Utilizando los sistemas de representación, produjimos un mapa conceptual de la función cuadrática que nos sirvió de referencia para la codificación y el análisis de las producciones de los profesores. La figura 2 muestra la estructura general de este mapa. Identificamos cuatro sistemas de representación (simbólico,

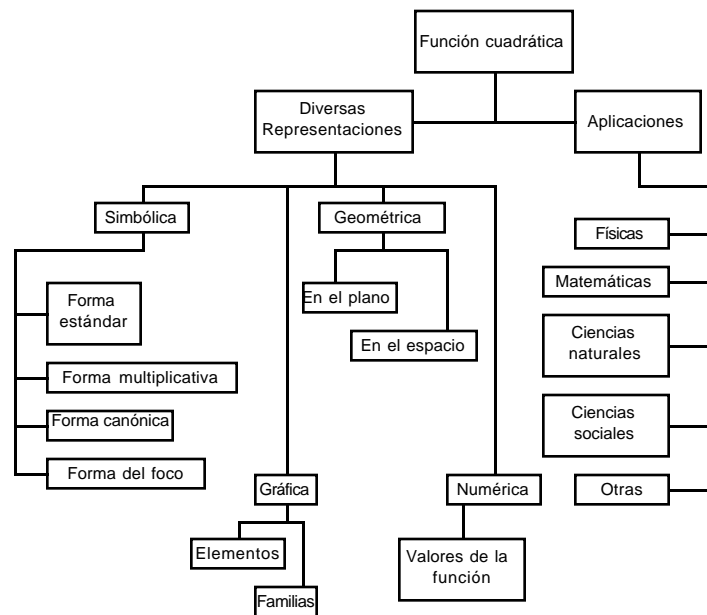


Figura N° 2. Mapa general

gráfico, geométrico y numérico), junto con el submapa de aplicaciones.

En el sistema de representación simbólico encontramos cuatro formas simbólicas (estándar, canónica, multiplicativa y de foco). Cada una de estas formas involucra una serie de parámetros que determinan características particulares de la función (ver figura 3). Los parámetros se encuentran rela-

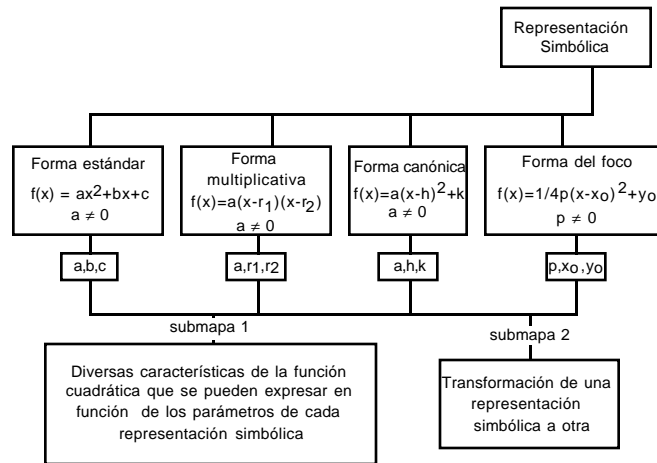


Figura N° 3. Representación simbólica

cionados entre sí. Los conceptos y procedimientos relacionados con la ecuación cuadrática aparecen en una de las formas simbólicas. Todas las características gráficas de la función cuadrática encuentran obviamente su expresión en el sistema de representación simbólico. Nos referimos al sistema de representación gráfico como aquel en el que se representan los objetos y las relaciones en el plano cartesiano. En este sistema de representación se hacen patentes otras características de la función cuadrática. Allí aparecen diversos elementos (puntos de corte con los ejes, eje de simetría, directriz, vértice, crecimiento, concavidad, etcétera) que permiten apreciar el papel de los parámetros. Algunos de estos elementos de la representación gráfica adquieren aún más significado cuando se considera el sistema de representación geométrico. En este sistema de representación recogemos algunas de las construcciones de la parábola en el plano y en el espacio. En el sistema de representación numérico buscamos describir algunas de características de la función cuadrática desde la perspectiva de sus valores numéricos. Aunque este sistema de representación es muy utilizado en las matemáticas escolares, su carácter discreto restringe la descripción de un objeto visto desde la dimensión funcional. En todo caso, en esta representación es posible apre-

ciar algunas de las características y elementos identificados en las representaciones simbólicas, gráficas y geométricas. Finalmente, en el submapa de aplicaciones describimos parcialmente la diversidad de fenómenos cuyo análisis requiere de modelos que involucran a la función cuadrática. Este mapa conceptual de referencia se encuentra descrito en detalle en (Carulla y Gómez, 1999).

La descripción anterior muestra el alto nivel de complejidad de la función cuadrática como objeto de enseñanza en las matemáticas escolares. Su tratamiento simbólico involucra diversas formas; su tratamiento gráfico es rico en elementos y relaciones; su tratamiento geométrico presenta diversas aproximaciones a su construcción; y es un objeto que se encuentra involucrado como modelo en gran número de fenómenos de diversos tipos. Toda esta riqueza se multiplica cuando se tiene en cuenta que cada elemento de un sistema de representación se encuentra relacionado con otros elementos en otros sistemas de representación, y que existen múltiples conexiones dentro de cada uno de estos sistemas.

MÉTODO

Muestra y recolección de información

Para realizar el estudio reunimos a un grupo de veinticuatro profesores de matemáticas de secundaria de colegios oficiales del Distrito Capital de Bogotá. Doce de ellos habían participado en uno o más de nuestros programas de formación permanente de profesores. Seis habían participado en otros programas de formación permanente ofrecidos por “una empresa docente” con esquemas diferentes al utilizado en este estudio y siete trabajaban con nosotros por primera vez. Durante el primer mes de trabajo, algunos profesores se retiraron. Los profesores restantes se organizaron en cinco grupos (dos grupos con dos profesores, dos grupos con cuatro profesores y un grupo con cinco profesores). Más tarde, otro profesor se retiró y uno de los grupos quedó compuesto por una sola profesora. Con estos grupos desarrollamos un esquema de interacción organizado en tres módulos: *análisis de contenido*, *análisis de instrucción* y *análisis cognitivo*. Cada módulo duró un mes y estuvo compuesto por un seminario inicial, una interacción intermedia y un seminario final. En cada seminario inicial nosotros presentamos las ideas básicas del propósito del módulo y las tareas que esperábamos que ellos realizaran durante el mismo. En la segunda mitad de ese seminario los grupos de profesores realizaron un primer borrador de esa tarea. Dos semanas más tarde, cada uno de los grupos nos visitó en nuestras oficinas y realizamos una entrevista individual por grupo en la que cada grupo nos presentó el

avance de su trabajo y nosotros reaccionamos al mismo. Dos semanas más tarde nos reunimos en el seminario final en el que cada grupo presentó el resultado final de su trabajo a los compañeros. De esta forma, recogimos, para cada grupo, tres producciones (seminario inicial, entrevista, seminario final) por módulo. En total, nueve producciones para cada uno de los cinco grupos.

Estas producciones tenían a la función cuadrática como tema matemático. Las tareas propuestas a los profesores consistieron en producir el análisis de contenido (la descripción de la función cuadrática como contenido matemático a enseñar), el análisis de instrucción (la manera como este tema se ha enseñado) y el análisis cognitivo (la descripción de las dificultades de los estudiantes con respecto al tema y del nivel de comprensión que ellos logran al finalizar la educación secundaria). Estas descripciones se hicieron utilizando una herramienta de análisis y organización (los sistemas de representación), por un lado, y una herramienta de representación (los mapas conceptuales), por el otro. Los grupos de profesores presentaron además ensayos en los que profundizaron en las ideas que propusieron en sus mapas conceptuales y nosotros registramos la información que surgió por escrito de la interacción que tuvo lugar en las entrevistas (no-estructuradas) y en los seminarios y que se refería a la manera como ellos describieron el contenido matemático en cuestión. Nuestra principal fuente de información fueron los nueve mapas conceptuales (tres por cada módulo) que presentaron cada uno de los cinco grupos.

Instrumento de codificación

El instrumento de codificación que utilizamos fue el producto de un proceso iterativo de diseño, aplicación y evaluación de diversos instrumentos de codificación de los mapas conceptuales de los profesores. Para cada etapa de esta iteración, evaluamos los resultados obtenidos con el instrumento anterior, identificamos sus ventajas y defectos, diseñamos un nuevo instrumento y lo aplicamos a los mapas conceptuales para obtener una nueva codificación. La evaluación de los instrumentos se hizo con base en una serie de condiciones. Nosotros deseábamos que el instrumento: describiera, en la medida de lo posible, las impresiones intuitivas que habíamos generado cuando revisamos, al comienzo del proceso, las producciones de los profesores; permitiera una codificación sistemática y objetiva; fuera coherente con y estuviera basado en la estructura conceptual del estudio (concepciones de los profesores, mapas conceptuales, sistemas de representación y función cuadrática); tuviera en cuenta los aspectos estructurales de la descripción, pero también resaltara las características de esa descripción que dependen del contenido matemático en cuestión; y permitiera una categorización y clasificación de las producciones de los profesores que diera lugar al análisis

de la evolución de estas producciones en el tiempo. En este proceso produjimos tres instrumentos de codificación que rotulamos como análisis de eventos, análisis por categorías y descripción cuantitativa. Estos instrumentos no se utilizan en este estudio y se describen en detalle en (Gómez y Carulla, 1999a).

El instrumento de codificación utiliza los sistemas de representación como eje inicial de análisis. Desde esta perspectiva, las producciones de los profesores pueden o no estar organizadas con base en esta herramienta y, cuando, lo están, es posible contar el número de niveles de los submapas determinados por cada sistema de representación. Decimos que un sistema de representación es *estructurado* si su representación en el mapa conceptual tiene más de tres niveles. Clasificamos los mapas en aquellos que no tenían sistemas de representación estructurados, aquellos que tenían de dos a cuatro sistemas de representación estructurados y aquellos que tenían cinco sistemas de representación estructurados. Identificamos también aquellos mapas conceptuales en los que había conexiones que involucraban sistemas de representación diferentes del simbólico o el gráfico. En seguida consideramos los atributos propios de la función cuadrática. Observamos el número de formas simbólicas tratadas y la existencia de conexiones entre estas formas simbólicas. Por otra parte, codificamos también aquellos casos en los que el mapa se construía a partir de la ecuación cuadrática. Decimos que el sistema de representación simbólico de uno de tales mapas está centrado en la ecuación cuadrática ($ax^2 + bx + c = 0$) si la caja que identifica a la ecuación cuadrática es una hija de un grupo de cajas o de una caja que determina la estructura del mapa en ese sistema de representación. El mapa está centrado en la ecuación cuadrática si la información que se presenta en el sistema de representación simbólico depende directamente de la información que surge de la descripción de la ecuación cuadrática. En caso contrario, decimos que el mapa no está centrado en la ecuación cuadrática. Finalmente, identificamos aquellos mapas conceptuales en los que los procedimientos de manipulación simbólica (e.g., completación de cuadrados, factorización, etcétera) se tratan, ya sea como objetos, o como relaciones entre cajas. La tabla 1

muestra un resumen de los atributos estructurales seleccionados y sus correspondientes indicadores.

Atributo	Indicadores y códigos		
Estructura externa	No está basado en sistemas de representación (NSR)		Basado en sistemas de representación (SSR)
Estructura interna	No hay sistemas de representación estructurados (No E)	Hay uno (1 E)	Hay 2, 3 o 4 (2E) Hay cinco (5E)
Conexiones con otros sistemas de representación	No hay (N-o)	Hay máximo tres (H-o)	Hay más de tres (V-o)
Formas simbólicas	Hay máximo una (<2)		Hay más de una (>1)
Conexiones entre formas simbólicas	No hay (NCFS)		Sí hay (CFS)
Ecuación cuadrática	Centrado (C)		
Técnicas de manipulación simbólica	Como objetos (O)		Como relaciones (R)

Tabla N° 1. Atributos, indicadores y códigos

Si se tienen en cuenta las posibles combinaciones de los indicadores, resultan 576 tipos de mapas posibles (los atributos “ecuación cuadrática” y “técnicas de manipulación simbólica” tienen 2 y 3 indicadores, respectivamente). Sin embargo, el análisis de los atributos y sus indicadores nos permite eliminar la mayoría de estos mapas posibles. Esto se debe, por ejemplo, a que no tiene sentido hablar de conexiones entre formas simbólicas si hay menos de dos de estas formas o a que no tiene sentido hablar de conexiones con otros sistemas de representación si el mapa no está organizado con base en ellos o si hay menos de dos sistemas de representación.

Seleccionamos entonces un subconjunto del conjunto global de mapas posibles con base en los criterios anteriores. Organizamos este conjunto teniendo en cuenta el número de sistemas de representación estructurados. La figura 4 muestra estos mapas posibles con la respectiva jerarquía producto del análisis de los atributos. Esta jerarquía nos permite establecer un sistema de códigos compuestos por un número de dos dígitos y organizar el subconjunto de mapas en cuatro grupos de acuerdo al primer dígito del número. Este primer dígito representa el número de sistemas de representación estructurados en el mapa conceptual correspondiente.

Consideremos, por ejemplo, la estructura propuesta con las cajas marcadas con el número tres como primer dígito. Estas cajas representan mapas

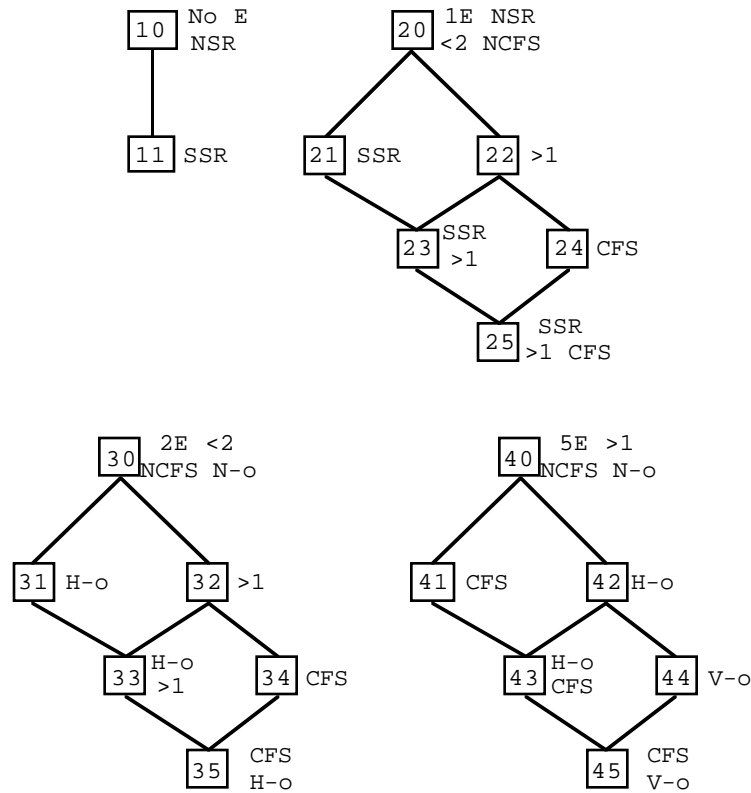


Figura N° 4. Estructura de mapas posibles

en los que hay más de uno y menos de cinco sistemas de representación estructurados (2E). La caja “30” identifica un mapa con menos de dos formas simbólicas (<2), sin conexiones entre las formas simbólicas (NCFS) y sin conexiones con otros sistemas de representación (N-o). Debajo de ella hay dos cajas (“31” y “32”). La primera identifica el mapa en el que hay por lo menos una y máximo tres conexiones con sistemas de representación diferentes del simbólico o el gráfico (H-o), mientras que la segunda identifica el mapa en el que hay más de una forma simbólica (>1). Estas cajas se unen en la caja “33” que tiene las características de las dos cajas anteriores. Por otro lado, la caja “34” identifica el mapa en el que sí hay conexiones entre las formas simbólicas (CFS). La estructura termina en una caja que identifica el mapa que tiene todas las características anteriores.

Esta categorización de los mapas posibles es evidentemente una simplificación de la variedad posible en las producciones de los profesores. Nosotros estábamos buscando esta simplificación, porque ella nos permite categorizar los mapas y comparar los mapas producidos por un mismo grupo en diferentes momentos del tiempo. De hecho, los números insinúan un esquema de comparación. Estos números son un indicativo de la “complejidad” de las producciones de los profesores, dado que a mayor número, mayor el número de características (excepto para aquellos números que se encuentran al mismo nivel como, por ejemplo, 33 y 34).

La producción de un grupo de profesores en un mapa conceptual se puede entonces codificar con un número de dos dígitos. A este número podremos agregar una o dos letras para identificar el papel de la ecuación cuadrática (C, si el mapa está centrado en ella) y de las técnicas de manipulación simbólica (O, si se tratan como objetos y R, si se tratan como relaciones). Finalmente, agregaremos un asterisco (*) al número correspondiente si el mapa no cumple estrictamente con las condiciones. Por ejemplo, el código 32* puede identificar un mapa que tiene más de un sistema de representación estructurado, pero que no está organizado por sistemas de representación. Un mapa codificado con 33-CR es un mapa en el que hay más de un sistema de representación estructurado y menos de cinco, más de una forma simbólica, sin conexiones entre ellas, con menos de cuatro conexiones con otros sistemas de representación, centrado en la ecuación cuadrática y en el que las técnicas de manipulación simbólica se presentan como relaciones (Ver tabla 1 y figura 4).

RESULTADOS

Análisis intergrupar

La tabla 2 presenta los resultados obtenidos como producto de este proceso de codificación. La primera fila de la tabla contiene la numeración de los nueve mapas conceptuales. La segunda fila identifica los momentos de la interacción (SiA: para el primer seminario del módulo i y SiB: para el segundo seminario; Aj para la reunión de asesoría del módulo j). En la primera columna se referencian los cinco grupos de profesores. Los números en las casillas del interior de la tabla corresponden a la codificación descrita en el apartado anterior. Las casillas vacías significan que el mapa correspondiente es equivalente (con respecto al instrumento) al mapa de la casilla anterior. Con base en los resultados presentados en la tabla 2, podemos producir algunas reflexiones de carácter global en las que comparamos las producciones de los diferentes grupos.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	S1A	A1	S1B	S2A	A2	S2B	S3A	A3	S3B
G1	34	35-R	43-R		45-R				
G2	10-C				11	44*		44-R	
G3	20-O		22		23		32*		
G4	20-CO	20-CR	45-R						
G5	32-CO	32*-R			43				45

Tabla N° 2. Codificación de producciones de los profesores

Resulta evidente que hay diferencias en las producciones de los grupos. Hay grupos que comienzan con producciones relativamente avanzadas (como el G5) y otros que comienzan en el primer nivel de la estructura (como el G2). Es muy posible que estas diferencias sean producto de las diferencias en el conocimiento y las visiones de los profesores, como consecuencia, entre otras cosas, de su capacitación previa.

En todos los grupos hubo evolución. Se corrobora la hipótesis inicial del estudio, en el sentido de que el tipo de interacción realizada y las herramientas utilizadas con los profesores puede afectar las producciones de los profesores. Esta evolución también se puede justificar a partir de la confrontación que cada grupo tuvo entre sus propias producciones y las de sus colegas. No obstante, este efecto no fue uniforme. Por otro lado, dos grupos (el G1 y el G4) presentaron cambios importantes en sus producciones con motivo de la primera reunión de asesoría.

En algunos grupos se evidencia la existencia de “concepciones arraigadas” que no cambiaron fácilmente en el tiempo. Este tipo de concepciones se observan por ejemplo en los grupos G2 y G3. El primero porque permanece durante mucho tiempo en producciones que no tienen sistemas de representación estructurados. Y el segundo porque permanece en producciones que tienen un solo sistema de representación estructurado, sin conexiones entre las formas simbólicas.

Se observan diferencias en la estabilidad de las estructuras. Mientras que algunos grupos mantienen su aproximación más o menos constante y su trabajo se centra en la mejora de las producciones anteriores (como el caso de los grupos G1 y G5), hay otros grupos en los que se observan reorganizaciones estructurales en sus producciones (como el caso de los grupos G2, G3 y G4).

El esquema de codificación resultado de este estudio caracteriza parcialmente las producciones de los profesores. Esto se evidencia en el hecho de que de la gran cantidad de mapas posibles, las producciones de los profesores se restringen a unas pocas. La evolución de estas producciones parecen seguir el camino sugerido por la estructura de atributos propuesta en la figura 4. Esta evolución se puede caracterizar por unos caminos de evolución representativos con respecto al manejo de los sistemas de representación, al manejo de las técnicas de manipulación simbólica y de la ecuación cuadrática y al manejo de las conexiones entre sistemas de representación.

Análisis intragrupal

Adicionalmente al análisis anterior, hicimos un análisis de las características y evolución de las producciones de cada uno de los grupos. Para ello, tomamos en cuenta una descripción cuantitativa de los mapas conceptuales, el análisis de los textos producidos con ocasión de algunos de los mapas y los registros que realizamos de nuestras discusiones con ellos en cada una de las tres reuniones de asesoría. Presentamos aquí el ejemplo de uno de los grupos (G1). El análisis de todos los grupos se encuentra en (Gómez y Carulla, 1999a).

Codificación

La tabla 3 presenta la evolución de las producciones de este grupo de acuerdo con la codificación descrita anteriormente.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	S1A	A1	S1B	S2A	A2	S2B	S3A	A3	S3B
G1	34	35-R	43-R		45-R				

Tabla N° 3. Codificación de mapas del grupo G1

Vemos que este grupo comenzó el proceso con un mapa bastante sofisticado en el que ya existía más de un sistema de representación estructurado, más de una forma simbólica y había conexiones entre estas formas simbólicas. Algunos miembros del grupo habían participado en programas de formación permanente en los que los temas de mapas conceptuales y sistemas de representación habían sido trabajados. El grupo avanzó muy rápidamente, mejorando sus producciones, pero manteniendo la estructura inicial, hasta llegar, en la asesoría del segundo módulo, a producir un mapa que contiene todas las características que era posible apreciar con el instrumento. La información que proporciona el instrumento se confirma con las otras fuentes de información.

Descripción cuantitativa

La tabla 4 presenta el número y porcentaje de cajas pertenecientes a cada sistema de representación y el número y porcentaje de conexiones implícitas y explícitas en cada uno de los mapas de este grupo.

	1		2		3		4	
	#	%	#	%	#	%	#	%
Sistemas de representación								
Simbólica	16	64%	24	53%	48	47%	111	51%
Gráfica	7	28%	17	38%	34	33%	44	20%
Númérica	1	4%	2	4%	6	6%	28	13%
Aplicaciones	1	4%	2	4%	7	7%	21	10%
Geométrica	0	0%	0	0%	7	7%	15	7%
Total	25		45		102		219	
Conexiones								
Implícitas	6	100%	23	77%	12	67%	17	57%
Explícitas	0	0%	7	23%	6	33%	13	43%
Total	6		30		18		30	

Tabla N° 4. Sistemas de representación y conexiones. Grupo G1

La figura 5 muestra gráficamente la evolución de las proporciones para los sistemas de representación y para las conexiones.

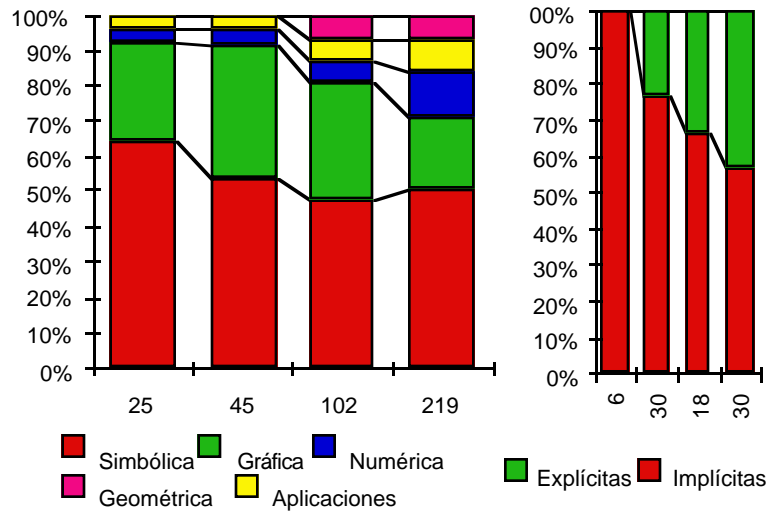


Figura N° 5. Sistemas de representación y conexiones. Grupo G1

En esta tabla y en estas gráficas se aprecia de nuevo la evolución del grupo. Por un lado, desde el primer mapa, aparecen los otros sistemas de representación. La evolución en la complejidad de las producciones se hace evidente en varios aspectos: el aumento en el tamaño de los mapas cuando se mira el número de cajas y el número de conexiones; el aumento en la importancia relativa de los otros sistemas de representación; y el aumento en la proporción de conexiones explícitas.

Análisis de textos y registros de entrevistas

En el módulo de análisis de instrucción los grupos de profesores describieron, utilizando como referencia los mapas conceptuales que habían producido hasta el momento, la secuencia con la que diversos libros de texto y algunos colegas presentan el tema de la función cuadrática. Los grupos de profesores produjeron adicionalmente un documento con sus reflexiones como consecuencia de esta actividad. En este documento, el grupo G1 resalta el énfasis en la representación simbólica y la carencia de conexiones entre los sistemas de representación existentes en los libros de texto analizados. También reconoce que no se tratan con profundidad las representaciones gráfica y verbal. Reconoce que los textos tienden a centrarse en la forma general de la representación simbólica. Logra diferenciar la visión procedimental de la visión “argumentativa”. Su visión “avanzada” del tema, en el momento de hacer el análisis de instrucción, se aprecia en los comentarios y críticas que hacen a los textos. El grupo dice que (G1-Soporte Mapa 6, p.2):

Lo propuesto en los textos, no es suficiente para garantizar la obtención de los logros que se plantean. Del tema se trabajó muy poco, tanto en los textos, como en las clases, por parte del profesor. Se dictan los conceptos desligados. Se hace mayor énfasis en una de las representaciones simbólicas (general [estándar]) y [las] otras se ignoran. De las expresiones simbólicas que se estudian, no se profundiza en ellas, ni se relaciona con las otras expresiones y representaciones.

En el módulo de análisis cognitivo los grupos de profesores debían identificar los elementos del mapa conceptual que representan dificultades para los estudiantes y describir el nivel de comprensión que ellos alcanzan al finalizar la educación media. Al realizar este análisis, este grupo enfatiza la importancia de los sistemas de representación y las conexiones entre ellos. Da una visión clara de la comprensión con base en estos conceptos. También reconoce el papel del modelaje y los sistemas de representación en la resolu-

ción de problemas. Reconoce el papel de lo procedimental como técnicas para la solución de problemas y no como centro del proceso de enseñanza–aprendizaje. Llega a dar una definición propia de sistema de representación y a describir el papel que ellos pueden jugar, junto con la importancia de las conexiones. Define los sistemas de representación como (G1 - Soporte Mapa 9, p.1):

formas distintas de analizar un mismo objeto matemático y por tanto permiten que el estudiante comprenda un concepto en toda su complejidad. Al establecer conexiones entre las representaciones el estudiante adquiere un dominio conceptual amplio, que le permite estar en capacidad de identificar las características propias de la función cuadrática en cada representación y su significado en los otros sistemas; así como también identificar de acuerdo con un ejercicio o problema específico cuál es el sistema de representación que más se ajusta a las condiciones establecidas.

Por otra parte, el grupo insiste en que las diversas maneras de mirar la función cuadrática deben ser utilizadas en las ocasiones o situaciones que generen la resolución eficiente de un problema específico y en la importancia de la aplicación de procedimientos en cambio de aplicar fórmulas preestablecidas para pasar de una forma simbólica a otra. El grupo describe su experiencia en el esquema de interacción de la siguiente manera (Martínez y Garay, 1999):

El trabajo nos permitió ver y explorar conexiones dentro del mapa, para comprender la complejidad del tema. Permitted crear una herramienta donde se puede observar la profundidad con que se aborda el tema. Y aún hay fallas en el mapa.

CONCLUSIONES

El problema que dio lugar a este estudio tenía que ver con la contrastación de una hipótesis que surgió a lo largo de la realización de varios programas de formación permanente de profesores realizados por nosotros. Nosotros percibimos que, cuando los profesores se enfrentan al problema de analizar un concepto matemático desde la perspectiva del análisis didáctico (análisis de contenido, análisis de instrucción y análisis cognitivo) con la ayuda de los sistemas de representación y los mapas conceptuales como eje organizador, los primeros, y como herramienta de representación, los segundos, entonces los profesores se hacen paulatinamente más conscientes de la complejidad

del contenido matemático en cuestión y de la problemática de su enseñanza y aprendizaje. Resultaba evidente que, para aproximarse a esta hipótesis, era necesario darle un significado al término “consciencia de la complejidad”, significado éste que permitiera una aproximación sistemática y objetiva a las actuaciones de los profesores, único medio de exploración disponible. Para explorar sistemáticamente esta hipótesis, se diseñó un esquema de interacción basado en dichas herramientas didácticas y se recolectó información por parte de los grupos de profesores. Esta información fue presentada en forma de mapas conceptuales. Para analizarla, se diseñó un instrumento de codificación que, basado en un análisis conceptual de los mapas conceptuales, los sistemas de representación, la función cuadrática y las concepciones de los profesores, permitió caracterizar las producciones de los diferentes grupos. Esta caracterización, junto con el análisis de la evolución de cada uno de los grupos (basada, adicionalmente, en los textos producidos por ellos y en el registro de su interacción con los investigadores), corroboró la hipótesis inicial. Las producciones de los diferentes grupos muestran una evolución a lo largo de los tres meses de trabajo. Mientras que hay grupos que avanzan rápidamente, hay otros que logran producciones sofisticadas, pero después de bastante esfuerzo. Por otro lado, hay grupos que lograron una evolución menos desarrollada, a pesar de haber trabajado juiciosamente en el proyecto. El análisis intragrupal insinúa que el conocimiento previo de los profesores, los aportes de los investigadores en las asesorías, el conocimiento de las producciones de los otros grupos y la posibilidad de trabajar e interactuar en grupo son factores que afectan la evolución de las producciones de los profesores. Por lo tanto, no es posible afirmar, como era de esperarse, que las herramientas didácticas propuestas puedan, por sí mismas, afectar las concepciones de los profesores. La evolución en las producciones de los profesores es producto de una experiencia de trabajo e interacción en la que ellos pudieron poner en juego sus concepciones previas y en la que ellos enfrentaron retos que los llevaron a reestructurarlas y desarrollarlas. Aunque tenemos información parcial (de profesores que participaron en programas anteriores) sobre la permanencia de estas reestructuraciones, no podemos afirmar con seguridad que los efectos observados en este estudio permanezcan en el tiempo.

El estudio muestra una manera sistemática de abordar la problemática de la evaluación del impacto de programas de formación permanente de profesores. Esto se debe a que partimos de lo que podrían ser unos objetivos de un programa de este tipo y diseñamos, implantamos y evaluamos una serie de instrumentos que permiten explorar la medida en que estos objetivos se pueden lograr. Consideramos que éste debe ser un aspecto central de la evaluación de impacto de programas de formación permanente de profesores.

Una característica adicional de esta manera de evaluar el impacto consiste en que la evaluación proporciona información relevante para la mejora de los programas que se evalúan. En este caso particular, comprobamos, por ejemplo, la importancia del trabajo en grupo y de la socialización permanente de las producciones de los profesores.

La exploración de las concepciones de los profesores involucra una problemática compleja. En muchas ocasiones esta exploración tiende a estar descrita en términos puramente cognitivos que involucran modelos que no permiten hacer observaciones y análisis sistemáticos. La manera como nos hemos aproximado a esta problemática resuelve, al menos parcialmente, esta situación. Al abordar las concepciones de los profesores a partir de sus producciones y al escoger un cierto tipo de producciones (los mapas conceptuales), hemos podido diseñar una estrategia operacional para indagar de manera sistemática y objetiva las concepciones de los profesores sobre la función cuadrática. Somos conscientes de que esta aproximación operacional ofrece una “ventana parcial” a las concepciones de los profesores que no permite observar muchas características y facetas de estas concepciones.

Aunque este estudio se centró en una “exploración dinámica” de las concepciones de los profesores y, por lo tanto, se interesó primordialmente en la evolución de sus producciones, también nos aporta información sobre las concepciones “iniciales” de los profesores. En particular, se observa que aquellos profesores que no han tenido contacto previo con los mapas conceptuales, los sistemas de representación y el análisis didáctico, tienden a tener una visión esencialmente procedimental y simbólica del objeto matemático en cuestión. Ellos ven la ecuación cuadrática y los esquemas de manipulación simbólica (fórmula cuadrática, completación de cuadrados, factorización, etcétera) como el centro de la descripción de la “cuestión cuadrática”. Como se observó en otro estudio (Gómez y Carulla, 1999b) esto es, al menos parcialmente, consecuencia de la manera como los libros de texto presentan el tema³, y esto, a su vez, es consecuencia de las directivas nacionales que existieron durante un buen tiempo. Por consiguiente, no debe sorprender que los estudiantes tengan también esta visión parcial del tema matemático en cuestión.

Las producciones de los profesores se agrupan en un conjunto bastante reducido de mapas conceptuales, dentro de un espectro bastante amplio de posibilidades (ver figura 4). Los resultados insinúan unos “camino típicos” de evolución de las producciones de los profesores. No podemos afirmar que éste sea el caso para otros profesores y otros esquemas de interacción. No obstante, la caracterización de las producciones propuesta en este estudio

3. Y, también, del conocimiento inicial de los profesores.

puede ser una guía para exploraciones futuras de las concepciones de los profesores.

El instrumento de codificación que utilizamos basa su potencia en el hecho de que analiza los mapas conceptuales teniendo en cuenta tanto su estructura, como su contenido. El análisis de producciones de profesores (o estudiantes) sobre otro tema matemático podría, con base en un análisis de contenido detallado, identificar nuevos atributos para ese tema que permitan diseñar un nuevo instrumento con las características similares a las del que utilizamos en este estudio.

Consideramos que ésta es, en todo caso, una aproximación parcial a la problemática de las concepciones de los profesores sobre la función cuadrática. Si se desea profundizar sobre el tema, es necesario diseñar instrumentos de recolección, codificación y análisis que permitan explorar otros aspectos de estas concepciones e inducir nuevas formas de triangular los resultados de los análisis.

Los resultados del estudio sugieren que las herramientas didácticas y el esquema de interacción propuesto afectan las concepciones de los profesores. Sin embargo, no es posible concluir, a partir de estos resultados, que la práctica docente del profesores haya sido afectada⁴. Para ello, es necesario estudiar esta práctica e intentar explorar las posibles conexiones entre ella y las concepciones de los profesores. Adicionalmente, tampoco es posible hacer afirmaciones sobre la formación matemática de los estudiantes. Esto requeriría, de nuevo, otro proyecto de investigación.

REFERENCIAS

- Balacheff, N. (1996). *Conception, connaissance et concept. Documento no publicado*. Grenoble: Laboratoire Leibniz.
- Carulla, C., Gómez, P. (1999). Sistemas de representación y mapas conceptuales como herramientas para la construcción de modelos pedagógicos en matemáticas [On-line]. <http://ued.uniandes.edu.co/servidor/ued/proyectos/CuadraticasIDEP/html/SRyMCenMatematicas.html>.
- Goldin, G. A., Janvier, C. (1998). Representations and the psychology of mathematics education. *Journal of Mathematical Behavior*. 17 (1), pp. 1-4.
- Gómez, P., Carulla, C. (1999a). La enseñanza de la función cuadrática en las matemáticas escolares del Distrito Capital [On-line]. <http://ued.uniandes.edu.co/servidor/ued/proyectos/CuadraticasIDEP/html/RepCuadAnInst.html>.

4. Aunque comprobamos claramente que el esquema de interacción preparó y motivó a los profesores para diseñar actividades de clase sobre el tema.

- Gómez, P., Carulla, C. (1999b). Mapas conceptuales, sistemas de representación y concepciones de los profesores sobre la función cuadrática [On-line]. <http://ued.uniandes.edu.co/servidor/ued/proyectos/CuadraticasIDEP/html/ConcProfFunCuad.html>.
- González, J.L. (1995). *El campo conceptual de los números naturales relativos*. Tesis doctoral no publicada. Universidad de Granada, Granada.
- Hiebert, J., Carpenter, T.P. (1992). Learning and teaching with understanding. En Grouws, D.A. (Ed.). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. New York: Macmillan, pp. 65-97.
- Kaput, J.J. (1992). Technology and Mathematics Education. En Grouws, D.A. (Ed.). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. New York: Macmillan, pp. 515-556.
- Lanzing, J. W. A. (1998). Everything you always wanted to know about... Concept Mapping. <http://utto212.to.utwente.nl/lanzing/EVERYT~1.HTM>. Holanda, pp. 1-29.
- Martínez, C., Garay, L. (1999). *Representaciones de la función cuadrática*. Trabajo presentado en RACE 4. Bogotá, Colombia.
- McGowen, M. (1998). *Cognitive units, concept images, and cognitive collages: An examination of the processes of knowledge construction*. Tesis doctoral no publicada. University of Warwick, Warwick.
- Ruiz, L. (1993). *Concepciones de los alumnos de secundaria sobre la noción de función: análisis epistemológico y didáctico*. Tesis doctoral no publicada. Universidad de Granada, Granada.
- Williams, C. G. (1998). Using concept maps to assess conceptual knowledge of function. *Journal for Research in Mathematics Education*. 29 (4), pp. 414-421.