Del puzzle de la estrella a la incomensurabilidad y los radicales

Pablo Flores Martínez

Resumen

En este artículo se presenta el Puzzle de la Estrella, que consiste en un cuadrado dividido en *36* piezas de tres formas, cuadrados, triángulos rectángulos isósceles, y rombos de ángulos de *45º*. El juego tiene dos características principales de las que extraemos ventajas matemáticas. Como los puzzles de piezas con *45º* permiten fáciles duplicaciones de áreas, entre sus piezas aparecen longitudes y áreas irracionales, con un factor $\sqrt{2}$, por lo que las actividades, de construcción y estudio de figuras, supone un trabajo con irracionales cuadráticos del tipo $a+b\sqrt{2}$. El juego habitual con el puzzle consiste en introducir todas sus piezas en su caja cuadrada. Pero las dimensiones de la caja y de las piezas hacen que no valga cualquier posición. Esta cualidad facilita que el alumno experimente la inconmensurabilidad, que puede relacionar con la irracionalidad gracias a la apreciación anterior. En el artículo explotamos estas cualidades haciendo propuestas para el aula de matemáticas.

Abstract

In this article I will introduce the Puzzle of the Star, which is a square divided into 36 pieces that have three different shapes: squares, isosceles triangles and 45º rhombuses. This puzzle has two main characteristics from which we obtain mathematical advantages that are exploited by presenting a sequence of activities useful for teaching.

Since puzzles that have pieces of 45º allow us to do easy area duplications, we find among its pieces irrational areas and lengths, with a factor $\sqrt{2}$, so that the different activities: the construction and study of the figures, imply working with irrational quadratics like $a+b\sqrt{2}$. The usual game with this puzzle entails keeping all its pieces in its square box, but because of the special measures of the box and the pieces not all the positions are correct. This characteristic helps the students realize the incommensurability, which they can then relate to irrationality thanks to the previous appreciation.

Introducción

No sé si por disposición propia o por las costumbres familiares, el caso es que durante mi infancia dediqué muchas horas de juego a las tareas manuales (recortar papeles, completar puzzles y construcciones, etc.). En mi adolescencia se continuó esta disposición, acrecentada al incluir nuevos elementos más complicados (doblado de papel, puzzles de alambre, construcciones, mecano, etc.). Todas estas tareas tenían una intención meramente lúdica. Al cabo del tiempo he observado que estas experiencias lúdicas han influido en la forma en que me relaciono con el espacio geométrico, colaborando a que haya desarrollado ampliamente lo que se está definiendo como «sentido espacial» (Alsina y otros, 1997).

En un momento que no puedo precisar en el tiempo, aparece en mi casa el puzzle que traigo a colación en esta comunicación: El *puzzle de la estrella*. Apenas ha cambiado su aspecto desde entonces (los años 60). El puzzle es uno de los «juguetes de mi padre». Lo tenía en su mesa y se entretenía con él en combinar colores y formas. De tal manera lo disfrutaba y jaleaba que también se compró en las casas de otros familiares, en las que estaba al alcance de todos; es estético, de piezas fáciles de manejar, y aunque tiene alguna dificultad volver a meterlo en la caja, hasta los niños llegan a aprender a hacerlo.

Como tantos otros juguetes (especialmente los puzzles de alambre - ver Flores 2002a- pero también el puzzle de medios hexágonos regulares), al encontrarlo en las tiendas me sentí tentado y lo compré. Lo que no podía sospechar es que ese encuentro sería tan provechoso, ya que me ha llevado a estudiarlo y descubrir su interés didáctico para la enseñanza de las matemáticas, o al menos para favorecer de manera lúdica el desarrollo del sentido espacial. En este artículo presentaré el puzzle y posteriormente mostraré cómo puede colaborar en la enseñanza de un tópico que resulta difícil afrontar en situaciones manipulativas, los irracionales cuadráticos, que en este caso aparecen ligados a longitudes y áreas. El puzzle puede emplearse también para el estudio de regularidades, como las combinaciones de colores (con los correspondientes estudios de frontera, equivalencia de formas, ideas combinatorias, etc.), las simetrías, las teselaciones, los frisos, etc.., todo ello de una forma manipulativa, y encaminado a resolver un problema lúdico fácilmente comprensible: colocar adecuadamente las piezas en su caja.

El puzzle de la estrella

El puzzle de la estrella consiste en un cuadrado dividido en piezas de tres formas: cuadrados, triángulos rectángulos isósceles cuyos catetos son iguales al lado del cuadrado (medios cuadrados), y rombos de ángulos de 45º y lados iguales al cuadrado. En total hay 36 piezas: 16 rombos, 4 cuadrados y 16 triángulos (aunque podrían dividirse los cuadrados en triángulos sin que cambiase la estructura geométrica, pasando a tener 40 piezas). Lo he llamado el puzzle de la estrella ya que suele aparecer en el centro una estrella, formada por ocho rombos, a la que rodean las otras piezas, encajadas todas en una caja cuadrada, tal como aparece en la **figura 1**.

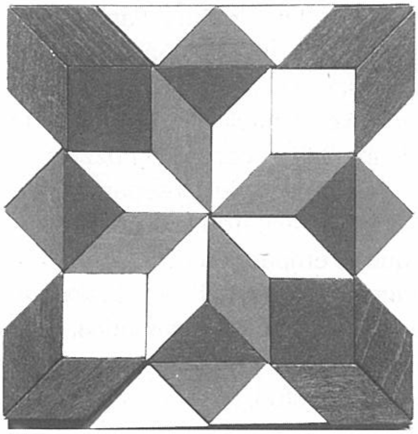

Figura 1

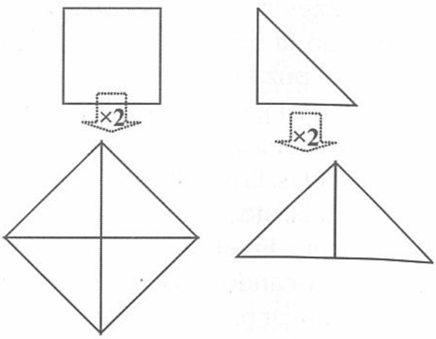

Figura 2

Los polígonos cuyos ángulos son de 45º y de 90º, pueden combinarse con cierta facilidad para *rellenar el plano*. Las piezas del TANGRAM tienen ángulos obtenidos por sumas de los ángulos de 90º y 45º, lo que permite una gran cantidad de formas. Además, tal como mostré con el puzzle de la pajarita (Flores, 2002b), éstos puzzles que combinan triángulos rectángulos isósceles y cuadrados permiten *duplicar áreas*, ya que introducen lados cuya longitud es $\sqrt{2}$ veces la longitud del otro. En la **figura 2** observamos cómo se pueden obtener el triángulo y el cuadrado de área doble.

Las piezas tienen lados con sólo dos *longitudes* distintas: [**u**] (lados del cuadrado, del rombo y catetos del triángulo) y [**v**]$=\sqrt{2}$[**u**] (hipotenusa del triángulo rectángulo). Los cuadrados tienen *superficie* doble que los triángulos. Sin embargo no es tan evidente la relación entre la superficie de éstos y los rombos.

Vamos a prescindir de los colores de las piezas ya que pueden cambiar, aunque suelen presentarse con cinco colores (**a, b, c, d** y **e**), distribuidos de la misma forma: 8 rombos de color **a,** 4 rombos y 4 triángulos de color **b,** 4 rombos de color **c,** 2 cuadrados y 8 triángulos de color **d y** 2 cuadrados y 4 triángulos de color **e**.

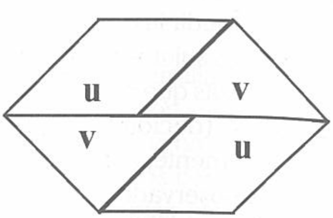

Figura 3

En la página web del magnífico The Puzzle Musseum (http://puzzlemuseum.com) se define un *puzzle* como un problema que tiene uno o más objetivos específicos, ideado con el propósito fundamental de ejercitar el ingenio y/o la paciencia. En concreto un *puzzle mecánico* es un objeto físico formado por una o varias