Trayectoria teórica de una paloma mensajera que vuela hacia su palomar

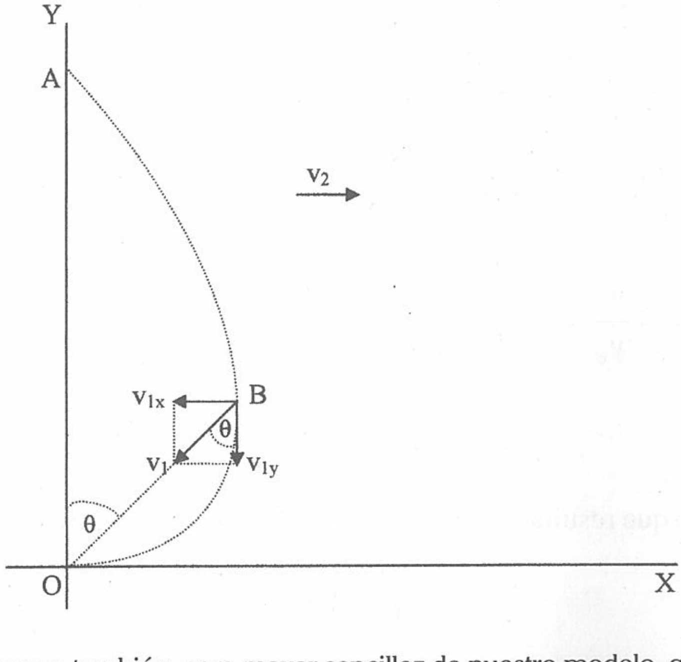
Álvaro Martín González

Supongamos que una paloma mensajera, al ser puesta en libertad, a gran distancia de su palomar, es capaz de detectar en todo momento la dirección en la que éste se encuentra y que vuela directamente hacia él.

En ausencia de viento, con el aire en reposo, o con viento en la dirección del palomar, en uno u otro sentido, la trayectoria de la paloma sería, en este modelo teórico, la recta que la une con él.

Si, por el contrario, hay viento en otra dirección, y suponemos que la velocidad de éste es constante durante todo el vuelo, la trayectoria ya no sería rectilínea.

El viento desviará continuamente al ave, cuya velocidad, en cada instante, será la suma vectorial de la suya respecto al aire (v_1) más la del viento (v_2).



Supongamos también, para mayor sencillez de nuestro modelo, que la dirección del viento es perpendicular a la línea que une el punto A de partida (suelta) con el palomar O. Tomaremos el eje OY sobre esa línea, y por lo tanto el eje OX en la dirección del viento.

La suposición de que el viento es perpendicular a la línea OA no quita generalidad al resultado, pues si no lo fuera, descomponiendo su velocidad en sus componentes rectangulares volveríamos al caso considerado, en el que ahora, la componente según OY del viento, simplemente aumentaría -o disminuiría- la componente en esa dirección de la velocidad de la paloma respecto del suelo.

Al dirigirse en todo momento v_1 hacia el palomar, tendríamos la composición de velocidades indicada en la figura anterior.

Para las componentes cartesianas de la velocidad resultante tendremos:

$$v_x = v_2 - v_1 \, sen\, \theta$$
$$v_y = v_1 \cos\, \theta$$

$$v_y = -\frac{v_1}{\sqrt{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}} = -\frac{yv_1}{\sqrt{x^2+y^2}} \; ; \qquad v_x = v_2 - \frac{v_1 \frac{x}{y}}{\sqrt{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}} = v_2 - \frac{v_1 x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

como $v_y = \frac{dy}{dt}$ y $v_x = \frac{dx}{dt}$, podemos escribir:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dy}\frac{dy}{dt} = \frac{dx}{dy} v_y \quad \text{y de ahí:}$$

$$\frac{dy}{dx} = y' = \frac{v_y}{v_x} = \frac{-y\,v_1}{v_2\sqrt{x^2+y^2} - xv_1} = \frac{-y\,v_1}{xv_2\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} - xv_1}$$

con lo que resulta $y' = \dfrac{-v_1 \frac{y}{x}}{v_2\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} - v_1}$ que constituye la

ecuación diferencial de la trayectoria. Se trata de una ecuación diferencial homogénea. Para integrarla hacemos

$\frac{y}{x} = u$, con lo que será $y = xu$, e $y' = u + xu'$ y queda:

$$x\frac{du}{dx} = \frac{-v_1 u}{v_2\sqrt{1+u^2} - v_1} - u; \qquad \frac{du}{\dfrac{-v_1 u}{v_2\sqrt{1+u^2} - v_1} - u} = \frac{dx}{x}$$

$\frac{v_1}{v_2}\int\frac{du}{u\sqrt{1+u^2}} - \int\frac{du}{u} = \int\frac{dx}{x}$, la primera integral es del tipo $\int\frac{du}{u\sqrt{a^2+u^2}}$ cuya función primitiva es $-\frac{1}{a}\ln\left|\frac{a+\sqrt{a^2+u^2}}{u}\right|$, por lo tanto resulta:

$\frac{v_1}{v_2}\ln\left|\frac{-1+\sqrt{1+u^2}}{u}\right| - \ln u = \ln x + \ln C$, donde ln C representa la constante de integración. Deshaciendo ahora el cambio de variable:

$$\frac{v_1}{v_2}\ln\left|\frac{-1+\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}}{\frac{y}{x}}\right| - \ln\frac{y}{x} = \ln x + \ln C$$

$\frac{v_1}{v_2}\ln\left|\frac{-x+\sqrt{x^2+y^2}}{y}\right| - \ln\frac{y}{x} = \ln x + \ln C$, exto es, $\frac{\left(\frac{-x+\sqrt{x^2+y^2}}{y}\right)^{\frac{v_1}{v_2}}}{\frac{y}{x}} = Cx$

o lo que es lo mismo, $\left(-x+\sqrt{x^2+y^2}\right)^{\frac{v_1}{v_2}} - Cy^{1+\frac{v_1}{v_2}} = 0$

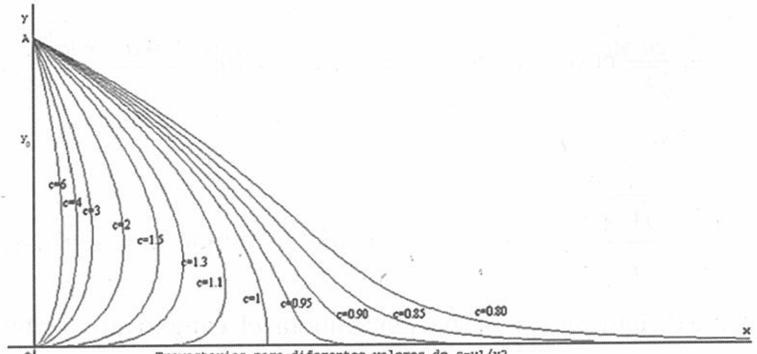
Como esta expresión admite x = 0, imponemos la condición: x = 0, y = y_0 con la finalidad de determinar C.

Así, $y_0^{\frac{v_1}{v_2}} = C\, y_0^{1+\frac{v_1}{v_2}}$ y por tanto $C = 1/y_0$

De este modo tenemos finalmente como ecuación de la trayectoria:

$$y_0\left(-x+\sqrt{x^2+y^2}\right)^{\frac{v_1}{v_2}} - y^{1+\frac{v_1}{v_2}} = 0$$

A continuación se representa la gráfica de la ecuación para diferentes valores de v_1/v_2, y para un valor dado de y_0. (La gráfica se ha dibujado con el programa «Derive5»)



Trayectorias para diferentes valores de c=v1/v2

Se observa que al aumentar la velocidad del viento, v_2, y disminuir por tanto el exponente v_1/v_2 (que en la gráfica viene representado por el parámetro c), la trayectoria se va alejando de la línea AO, que seguiría la paloma en ausencia de viento.

Para c=1, es decir para $v_1 = v_2$, se produce una situación límite. Cuando la paloma alcanza el punto de ordenada y = 0, las componentes de su velocidad son $v_y = 0$ y $v_x = v_1 = v_2$. En esta situación aunque intente acercarse al palomar permanece en reposo respecto a la Tierra. Para valores de c por encima de ése la paloma llega a su destino, pero para valores inferiores, esto es, para v_2 mayor que v_1, se aleja indefinidamente del palomar. Esto se debe a que el máximo valor que puede tomar la componente horizontal de su velocidad (es decir su velocidad respecto del aire en ese momento) es inferior a la velocidad del viento.

Álvaro Martín González es Catedrático de Física y Química de Bachillerato, Doctor en Ciencias-Sección Química y Licenciado en Bellas Artes.
Correo electrónico: alvaromg@ya.com