

Problemas de Secundaria y los nietos juegan (Problemas Comentados XXXIII)

José Antonio Rupérez Padrón y Manuel García Déniz (Club Matemático¹)

Resumen

Se presentan, como siempre, las soluciones a problemas planteados en anteriores artículos siguiendo las fases: comprender (datos, objetivos, relaciones, representación), pensar (estrategias posibles), ejecutar (las estrategias) y responder (comprobando los resultados, analizando la solución y respondiendo adecuadamente). Asimismo se presentan otros nuevos, bajo el vínculo de "Problemas de los abuelos" relacionados con algunos juegos cuyas reglas se exponen. Los fundamentos de estos juegos son: solitario con cartas, cuatro en raya, Nim y minas.

Palabras clave

Recursos didácticos. Metodología en la resolución de problemas. Problemas para Primaria y Secundaria. Situaciones problemáticas mediante juegos como el Nim, Minas, 4 en raya y solitarios con cartas.

Abstract

Are presented, as always, the solutions to problems raised in previous articles following phases: understanding (data, goals, relationships, representation), thinking (possible strategies), execute (strategies) and answer (checking the results, analyzing the solution and responding appropriately). We also present new ones, under the link "grandparents problems" related to some games whose rules are set. The foundations of these games are solitaire cards, four in a row, Nim and mines.

Keywords

Teaching resources. Methodology in problem solving. Problems for Elementary School and Secondary. Problem situations through games like Nim, Minas, 4 in a row and solitaire card.

En el último artículo dejamos una propuesta de problemas para Secundaria Obligatoria procedentes de la 19ª edición del Rally Matemático Transalpino Final). Y poco antes del cierre de este número de la revista hemos recibido el siguiente correo del buen amigo Pepe Vidal, miembro del Seminario Newton de Resolución de Problemas que, por cierto, vuelve a iniciar su andadura en este año de 2013 con sede en la Casa Museo de las Matemáticas, en La Laguna.

"Hola. Me he estado entreteniendo un montón con los últimos problemas propuestos. Aquí te envié unas breves notas sobre ellos.

*Sobre el problema **El regalo de cumpleaños***

¹ El Club Matemático está formado por los profesores José Antonio Rupérez Padrón y Manuel García Déniz, jubilados del IES de Canarias-Cabrera Pinto (La Laguna) y del IES Tomás de Iriarte (Santa Cruz de Tenerife), respectivamente. jaruperez@gmail.com / mgarciadeniz@gmail.com



a A le faltan 17 para el juego.

a B le faltan 13,

a C le faltan 21.

Si C da 17 a A y 13 a B ya tienen para dos juegos, luego a C le quedarían 7.

C tiene por tanto $17+13+7=37€$ que son 21 menos que el juego.

El juego cuesta $37+21=58$

A tiene 17 menos, es decir 41 y B tiene 13 menos, es decir 45.

Otra.

B tiene 8 más que C y A tiene 4 más que C y 4 menos que B

Como antes C tiene 37, por tanto A tiene 41 y B 45.

Otra.

X: precio

$$X=A+17$$

$$X=B+13$$

$$X=C+21$$

$$A+B+C=2X+7$$

Sobre el problema **El código de Toni**

Es 792 pero sólo en el caso de que los números de dos cifras a los que nos referimos no repitan cifra, pues en ese caso el problema no tiene solución.

Sobre el problema anterior de **La cara escondida del cubo**

Yo creo que con la información de a) y b) sería suficiente para resolver el problema pues alrededor del doble círculo están el cuadrado, círculo y las dos estrellas, si b) lo levanto dejando el doble círculo arriba observo que a la derecha de la estrella 8p queda la estrella 4p, y a la derecha de círculo está cuadrado, si sigo girando a la izquierda de círculo debe estar estrella 4p, pues si estuviese estrella 8p, ocurriría que a la derecha de E4p estaría círculo lo que contradice a).

Lo dicho, me lo he pasado pipa resolviendo los problemas. Gracias por las propuestas.

Un saludo, Pepe.”

Vamos a comentar su resolución:

El regalo de cumpleaños

Los trillizos Aldo, Giovanni y Giacomo han decidido regalar a su mejor amigo, para su cumpleaños, el videojuego que desea desde hace tiempo. Sin embargo, ninguno de los trillizos tiene en su propia hucha el dinero suficiente para comprar el videojuego: a Aldo le faltan 17 euros, a Giovanni 13 euros y a Giacomo 21 euros.

Ellos deciden juntar sus ahorros y descubren así que, no sólo pueden regalar el videojuego a su amigo, sino que también pueden comprarse otro igual y tener todavía un sobrante de 7 euros.

¿Sabéis decir cuánto cuesta el videojuego y cuántos euros tenía cada trillizo en su propia hucha?

Fase I. Comprender

Datos

A Aldo le faltan 17 euros, a Giovanni 13 euros y a Giacomo 21 euros.

Si simbolizamos como V el precio de un videojuego y representamos los ahorros de cada uno con su nombre, tendremos: Aldo = $V - 17$; Giovanni = $V - 13$; Giacomo = $V - 21$.

Evidentemente: Giacomo < Aldo < Giovanni < V .

Y también: Aldo + Giovanni + Giacomo = $3V - (17 + 13 + 21)$.

Y, por supuesto: $V > 21$ (lo que le falta a Giacomo en su hucha).

Objetivo

Precio de un videojuego; valor de los ahorros de cada hermano.

Relación

Juntando los ahorros de los tres pueden comprar dos videojuegos y sobran 7 euros.

Procediendo igual que con los datos, tenemos: Aldo + Giovanni + Giacomo = $2V + 7$.

Diagrama

Podemos representar cada elemento de manera figurativa para el modelo de **balanza/equilibrio**:



Figura 1



O bien, utilizar los diagramas de Venn para el modelo **partes/todo**:

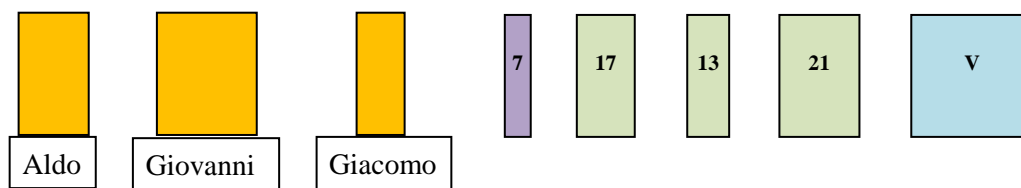


Figura 2

Fase II. Pensar

Estrategias

Ensayo y Error, con ayuda de una **herramienta lógica** (tabla).

Organización de la información, mediante **aritmética** o mediante **álgebra**.

Fase III. Ejecutar

a) **Ensayo y Error**, con ayuda de una **herramienta lógica** (tabla).

Hacer un ensayo para el precio del videojuego con un valor superior a 21 euros (por ejemplo 30 euros) y calcular, a partir del mismo, los ahorros de cada hermano y el valor de la compra realizada para comprobar si es o no correcto el ensayo. A partir de ahí seguir haciendo ensayos dirigidos hasta obtener el valor correcto. Utilizar una tabla como la siguiente:

Precio del videojuego	Ahorros de Aldo (A)	Ahorros de Giovanni (Go)	Ahorros de Giacomo (Ga)	Total de ahorros	Valor de la compra	Ensayo correcto
V	V - 13	V - 17	V - 21	A + Go + Ga	2 x V + 7	NO/SÍ
30	30-17=13	30-13=17	30-21=9	39	2x30 + 7 = 67	NO
40	23	27	19	69	87	NO
...
50	33	37	29	99	107	NO
55	38	42	34	114	117	NO
58	58-17= 41	58-13= 45	58-21= 37	123	2x58 + 7 =123	SÍ

Tabla 1

De la lectura de la tabla se obtiene que el precio del videojuego es de 58 euros y que Aldo tenía en su hucha 41 euros, Giovanni tenía 45 y Giacomo 37.

b) **Organización de la información**, mediante **aritmética**.

Confeccionar el diagrama partes/todo:

Comenzaremos por representar las dos compras hipotéticas: 3 videojuegos o 2 videojuegos.

A continuación representaremos, en paralelo, lo que conocemos de los ahorros de los tres hermanos. Para ello utilizaremos el código gráfico indicado en la fase de **comprender**:

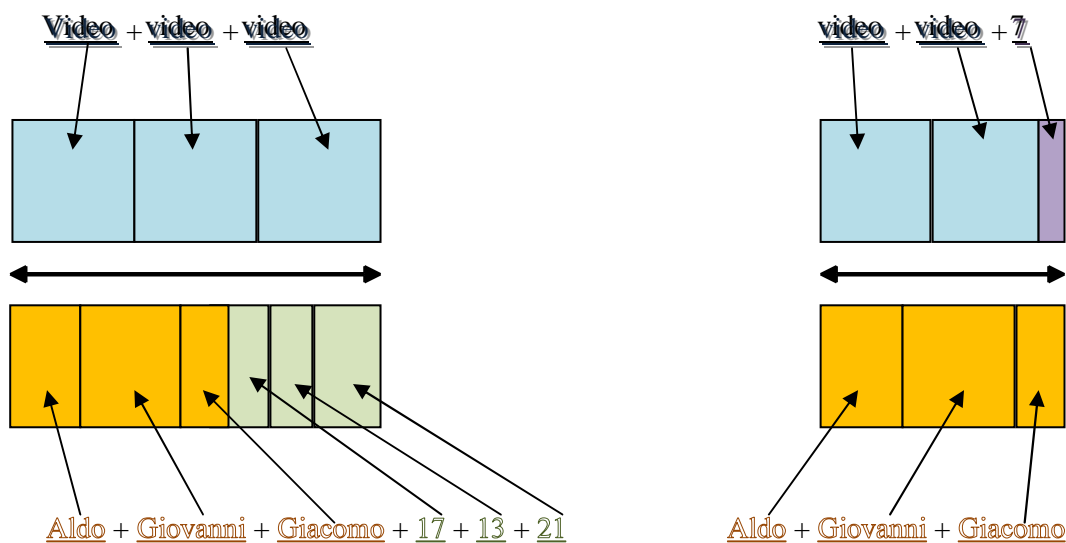


Figura 3

Los diagramas de la derecha son equivalentes a sus respectivos de la izquierda y representan a las igualdades iniciales del problema:

$$\text{Aldo} + \text{Giovanni} + \text{Giacomo} = 3V - (17 + 13 + 21)$$

$$\text{Aldo} + \text{Giovanni} + \text{Giacomo} = 2V + 7$$

Si a los diagramas de la izquierda les eliminamos (“restamos”) los diagramas de la derecha obtenemos el diagrama que resuelve el programa, es decir, el diagrama que contiene un solo video.

Al comparar ambos diagramas (el costo de tres videojuegos o de dos videojuegos) podemos preguntarnos cuánto costará comprar un solo videojuego. Obviamente, la diferencia entre ambos costes, la diferencia entre los diagramas superiores es la misma que entre los diagramas inferiores. O sea: $1V + 7 = 17 + 13 + 21 - 7 = 51$ euros. Por tanto un videojuego cuesta $51 + 7 = 58$ euros.

Falta calcular ahora el contenido en euros de la hucha de cada uno de los trillizos, es decir: 41, 45 y 37 euros.

c) Organización de la información, mediante álgebra.

A partir del mismo diagrama utilizar etiquetas algebraicas. Hacemos x el precio del videojuego, $x - 17$, $x - 13$, $x - 21$ los ahorros en euros de los trillizos y $2x + 7$ el importe en euros para igualar la suma de los ahorros, llegando así a la ecuación:

$$(x - 17) + (x - 13) + (x - 21) = 2x + 7$$

de la cual se obtiene $3x - 51 = 2x + 7$ y de ahí $x = 58$, precio en euros del videojuego.

Calcular finalmente el contenido en euros de la hucha de cada uno de los trillizos: $58 - 17 = 41$; $58 - 13 = 45$; $58 - 21 = 37$.



En cualquiera de los tres casos nos encontramos la misma solución.

Solución:

El precio del videojuego es de 58 euros y Aldo tenía en su hucha 41 euros, Giovanni tenía 45 y Giacomo 37

Fase IV. Responder

Comprobación

La compra de dos videojuegos: $2 \times 58 = 116$; $116 + 7 = 123$.

Suma de ahorros = $41 + 45 + 37 = 123$.

Análisis

En ninguno de los tres casos hay duda, la solución es única y coherente.

Respuesta:

Precio de un videojuego 58 euros; ahorros de los trillizos, 41 euros de Aldo, 45 euros de Giovanni y 37 euros de Giacomo.

La espiral

Leonardo forma rectángulos juntando cuadrados. Ha comenzado con dos pequeños cuadrados, uno de los cuales tiene un vértice en el punto A, después ha continuado adosando un cuadrado a la derecha, después uno debajo, después uno a la izquierda, después uno encima, después de nuevo uno a la derecha y así sucesivamente.

En la figura está representado el rectángulo formado por los primeros siete cuadrados, que tiene un vértice en el punto B.

Leonardo ha dibujado a continuación un cuarto de circunferencia en el interior de cada uno de los siete cuadrados; cada cuarto de circunferencia une dos vértices opuestos de un cuadrado y tiene el centro en otro vértice del mismo cuadrado.

Los primeros siete cuartos de circunferencia forman una “espiral” que va desde A hasta B.

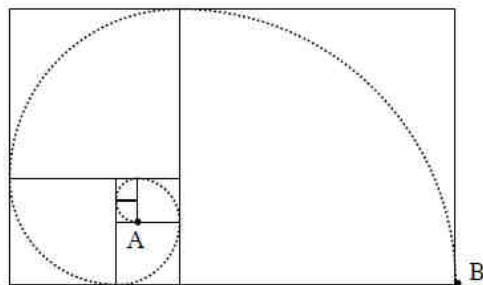


Figura 4

El perímetro del rectángulo formado por los primeros siete cuadrados mide 136 cm.

¿Cuál es la longitud de la espiral desde A hasta B? Escribid la medida utilizando π o con una aproximación al milímetro.

Fase I. Comprender

Datos

Siete cuadrados que forma un rectángulo de perímetro 136 cm.

Una espiral formada por cuartos de circunferencias inscritas en los siete cuadrados.

Objetivo

Calcular la longitud de la espiral.

Relación

Las medidas de los lados de los cuadrados forman una sucesión de Fibonacci. Si tomamos como unidad el lado del cuadrado más pequeño, los lados de los siete cuadrados tienen las medidas 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13 (sumando dos términos consecutivos de la sucesión se obtiene el siguiente).

Lo podemos ver en la figura: cada cuadrado tiene adosados a su lado los dos cuadrados anteriores.

Diagrama

La figura del propio problema.

Fase II. Pensar

Estrategias

Organizar la información.

Podemos organizar aritméticamente o bien algebraicamente.

Fase III. Ejecutar

Organizando mediante la aritmética:

El rectángulo de la figura tiene un ancho equivalente al término séptimo de la sucesión, es decir, 13 unidades; el largo del rectángulo es equivalente a la suma de los términos sexto y séptimo (octavo término, no presente) y vale $8 + 13 = 21$.

El perímetro, por tanto, es $2 \times (13 + 21) = 2 \times 34 = 68$ unidades.

Si la medida real de ese perímetro es 136 cm, entonces el valor del lado del cuadrado unidad viene dado por $136 : 68 = 2$ cm.

Organizando mediante el álgebra:

Si llamamos x al lado del cuadrado unidad (el primero de la sucesión), serán $x, x, 2x, 3x, 5x, 8x, 13x$, las medidas de los lados de los siete cuadrados de la figura.



Siendo el ancho del rectángulo total $13x$, el largo $21x$ y el perímetro 136 cm, podemos plantear la siguiente ecuación

$$2(21x + 13x) = 136$$

que reducida da $2(34x) = 136$, después $68x = 136$ y tiene como solución $x = 136/68 = 2$.

En cualquiera de los dos casos, falta ahora calcular las longitudes de los siete cuartos de circunferencia y sumarlas.

Como la circunferencia completa mide $2\pi r$, siendo el radio el lado de cada cuadrado, tenemos que un cuarto vale $2\pi r/4$, es decir, $\pi r/2$.

Arco	Radio	Longitud
1°	2	π
2°	2	π
3°	4	2π
4°	6	3π
5°	10	5π
6°	16	8π
7°	26	13π

Tabla 2

Solución

Siendo la suma total: $\pi + \pi + 2\pi + 3\pi + 5\pi + 8\pi + 13\pi = 33\pi$ cm.

Si queremos una aproximación hasta el milímetro usaremos como valor de $\pi = 3,141$. Y entonces obtendremos los valores aproximados del perímetro como $103,7$ cm (por exceso) o también $103,6$ cm (por defecto).

Fase IV. Responder

Comprobación

La revisión de los cálculos, la comprobación de la solución de la ecuación e, incluso la verificación visual de los tamaños relativos de la espiral y el perímetro del rectángulo.

Análisis

La solución es única.

Respuesta:

La longitud de la espiral desde A hasta B es 33π o $103,7$ cm o $103,6$ cm o las medidas 1037 mm o 1036 mm.

El Código de Toni

Toni ha elegido un código para la combinación de su maleta.

Este código es un número de tres cifras todas diferentes entre sí y ninguna es igual a 0. Si se suman todos los números de dos cifras que se pueden formar con las tres cifras del código y después se multiplica la suma así obtenida por dos, se encuentra exactamente el código.

¿Cuál es el código de Toni?

Fase I. Comprender

Datos

Código de tres cifras. Ninguna es cero.

Objetivo

Averiguar el código.

Relación

Si se suman todos los números de dos cifras que se pueden formar con las tres cifras del código y después se multiplica la suma así obtenida por dos, se encuentra exactamente el código.

Diagrama

Diagrama de producto cartesiano para la búsqueda de todas las combinaciones de tres números tomados de dos en dos.

Fase II. Pensar

Estrategias

Organizar la información, utilizando el lenguaje algebraico como organizador.

Ensayo y error.

Eliminar (como auxiliar).

Fase III. Ejecutar

Organizando mediante álgebra:

Llamaremos abc al número del código buscado.

Mediante combinatoria buscar todos los números de dos cifras distintas que se pueden formar con las tres cifras del código.



	a	b	c
a		ab	ac
b	ba		bc
c	ca	cb	

Tabla 3

Representemos en escritura polinómica el código y todos los números de dos cifras encontrados:

$$100a + 10b + c$$

$$(10a + b), (10a + c), (10b + a), (10b + c), (10c + a), (10c + b)$$

Hagamos lo mismo para la suma de todos esos números:

$$(10a + b) + (10a + c) + (10b + a) + (10b + c) + (10c + a) + (10c + b) = 22(a + b + c)$$

Planteemos ahora la ecuación dada por la relación del problema:

$$2 \cdot 22(a + b + c) = 100a + 10b + c$$

Que reducida nos lleva a:

$$44(a + b + c) = 100a + 10b + c$$

Se trata de una ecuación con tres incógnitas cuya solución, con a, b, c números naturales menores que 10, debemos estudiar detenidamente.

Puesto que el segundo miembro de la ecuación es el código, se deduce que el código es múltiplo de 44 y, al ser todas las cifras distintas entre sí y diferentes de cero, por tanto $a + b + c$ es mayor o igual a 6.

Los múltiplos de 44 a considerar comienzan en $44 \times 6 = 264$. A partir de él tendremos: 264, 302, 352, 396, 440, 484, 528, 572, 616, 660, 704, 748, 792, 836, 880, 924, 968. Paramos al llegar al último posible con tres cifras.

Teniendo en cuenta que no puede haber cifras repetidas ni ceros, debemos eliminar los que no cumplan esta condición. Nos quedan: 264, 352, 396, 528, 572, 748, 792, 836, 924, 968.

Usaremos la tabla 4 para verificar si esos números cumplen con la relación:

abc	a + b + c	44 (a + b + c)		
264	12	528	$264 \neq 528$	No
352	10	440	$352 \neq 440$	No
396	18	792	$396 \neq 792$	No
528	15	660	$528 \neq 660$	No
572	14	616	$572 \neq 616$	No
748	19	836	$748 \neq 836$	No
792	18	792	$792 = 792$	Sí
836	17	748	$836 \neq 748$	No
924	15	660	$924 \neq 660$	No
968	23	1012	$968 \neq 1012$	No

Tabla 4

Y encontramos así el único que satisface la relación que es, consiguientemente, el código de Toni.

Mediante ensayo y error:

Aunque es muy largo el proceso se puede llegar a la misma conclusión a través de numerosas tentativas organizadas (preferiblemente con ayuda de la calculadora). Una de las primeras cosas es elegir tres cifras al azar y formar las parejas posibles, sumarlas y analizar el resultado a la vista de la relación.

Veamos un par de ejemplos:

a) partiendo de 123

$$12- 13- 21- 23- 31- 32; (12 + 21) + (13 + 31) + (23 + 32) = 33 + 44 + 55 = 132; 2 \times 132 = 264$$

b) partiendo de 438

$$43- 48- 34- 38- 83- 84; (38 + 83) + (34 + 43) + (48 + 84) = 121 + 77 + 132 = 330; 2 \times 330 = 660$$

La suma se asocia de la manera expuesta con la intención de que los alumnos observen dos cosas importantes que facilitarán la continuación. Si no lo observan tendrán que hacer el proceso completo (repartándose la tarea, por ejemplo).

Si se observa adecuadamente se pueden convencer poco a poco que el número buscado es par, puesto que es múltiplo de 4, y, además, como también es múltiplo de 11, como consecuencia es múltiplo de 44.

Ahora queda investigar sólo los múltiplos de 44 con tres cifras distintas no nulas comprendidos entre 264 y 999 (extremos incluidos): 264 ; 352 ; 396 ; 528 ; 572 ; 748 ; 792 ; 836 ; 924 ; 968 .



Para estos diez números, controlar la condición de Toni. Para los dos ejemplos precedentes se ve que la condición no está satisfecha: $123 \neq 264$ (y así no lo será tampoco para 132, 213, 231, 312, 321) y $438 \neq 660$.

Solución

Sólo el número **792** satisface la condición.

Fase IV. Responder

Comprobación

Dado que los números de dos cifras que se pueden formar a partir del código 792 son 27, 29, 72, 79, 92 y 97, tendremos que:

$$(27 + 72) + (29 + 92) + (79 + 97) = 99 + 121 + 176 = 396 \quad 2 \times 396 = 792$$

Análisis

Sólo hay una solución. No valen las permutaciones 729, 279, 297, 927 y 972, al no cumplir la relación.

Respuesta:

El código de Toni es 792.

Les recordamos la advertencia hecha en el anterior artículo acerca de los problemas del RMT.

Los gestores del Rally advierten que dichos problemas están protegidos por derechos de autor. Para su utilización en clase, se ruega indicar la procedencia del problema con la formula "©ARMT" o informar de la dirección de la página web.

Para su utilización comercial, se ruega contactar con los coordinadores internacionales a partir del sitio Internet de la Asociación del Rally Matemático Transalpino (www.armtint.org).

Se nos ha ocurrido proponer en este artículo algunos sencillos problemas referidos a juegos muy conocidos. Sería una conexión entre nuestras dos secciones de la revista. No es la primera vez que proponemos algún problema relacionado con juegos en esta sección o en la sección paralela, ni tampoco la primera (ni la última) en la que volvemos a los *problemas de los abuelos*.

Cartas rojas y cartas negras (solitario de cartas)

Mario ha aprendido a jugar solitarios. En este caso, con un mazo de cartas rojas y cartas negras.

Las reglas del juego son éstas:

- se comienza disponiendo sobre la mesa 6 cartas rojas y 6 cartas negras;
- en cada movimiento, se pueden quitar de la mesa o una carta o dos cartas juntas, pero con estas condiciones:

- si se quita una sola carta roja, se deben colocar sobre la mesa otras dos rojas, cogiéndolas del mazo;
- si se quitan dos cartas rojas juntas, se debe colocar sobre la mesa una carta negra, cogiéndola del mazo;
- si se quita una sola carta negra, se debe colocar otra negra sobre la mesa, cogiéndola del mazo;
- si se quitan dos cartas negras juntas, no se debe colocar ninguna sobre la mesa;
- el juego termina cuando no quedan más cartas sobre la mesa.

Mario querría terminar el solitario con el menor número posible de movimientos.

Indicad el número y la secuencia de movimientos que debe hacer Mario para finalizar el solitario lo más rápidamente posible.

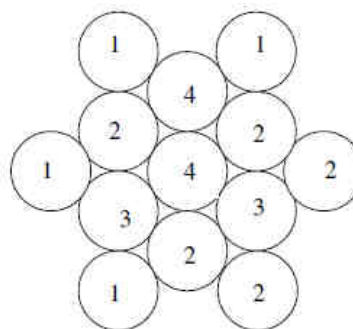
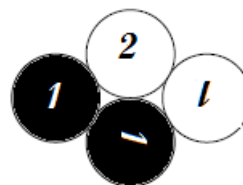
Blanco o Gris (Buscaminas)

Andrea ha encontrado unas fichas de *damas con números* y ha puesto juntas fichas blancas y fichas negras de la manera que veis en la figura.

Andrea se da cuenta de que hay escrito en cada una el número de fichas negras que la tocan.

Después, ha puesto juntas de la misma manera un número mayor de fichas, siempre blancas y negras y ha escrito también sobre cada ficha el número de fichas negras que la tocan.

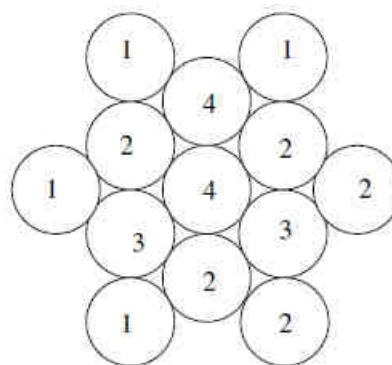
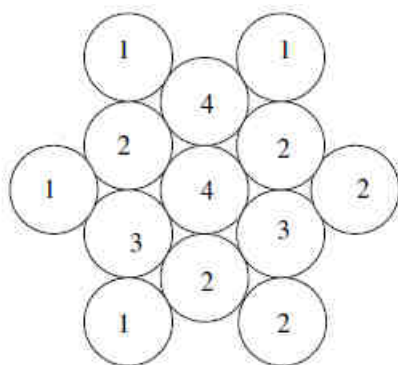
He aquí las fichas que ha colocado juntas: sobre ellas se ven sólo los números que ha escrito, pero no se distinguen las fichas negras de las blancas.



Coloread vosotros todas las fichas negras.

Presentad dos soluciones diferentes.

(Utilizad los dos grupos dibujados aquí abajo para colorear las fichas negras de vuestras soluciones)



La última carta (Nim)

Un juego tiene las siguientes reglas: dos jugadores toman por turnos una, dos o tres cartas de un mazo que inicialmente contiene 20. El jugador que toma la última carta pierde.

Lucía y Andrea deciden jugar una partida. Andrea dice a Lucía: «¿Quieres comenzar tú?».

Andrea, que es muy fuerte en este tipo de juegos de estrategia, dice a Lucía: «Reflexiona bien, ¡tú puedes ganar seguro!».

Lucía se da cuenta de poder elegir entre:

- dejar empezar a Andrea
- empezar tomando una carta
- empezar tomando dos cartas
- empezar tomando tres cartas.

Si vosotros estuviésteis en el lugar de Lucía, ¿qué elegiríais hacer?

Explicad por qué y con qué jugadas podrá ganar Lucía.

Cuatro en línea (alineamiento)

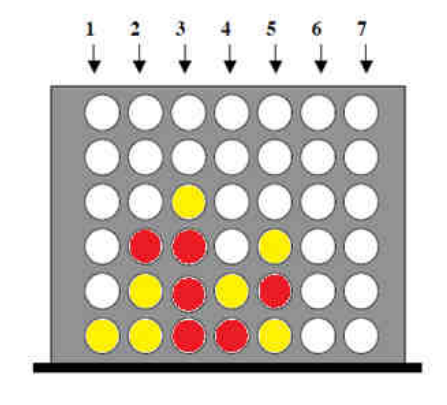
Pablo y Lucía juegan una partida a «Cuatro en línea». En este juego cada uno, en su turno, deja deslizarse una ficha en una de las columnas numeradas de 1 a 7. La ficha va por tanto a colocarse en la fila abajo o sobre otra ficha ya insertada.

El ganador es aquel que primero alinea cuatro fichas de su color horizontalmente, verticalmente o en diagonal.

Pablo ha comenzado el juego y ha colocado ya siete fichas amarillas; ha insertado la última en la columna 3 para impedir a Lucía alinear verticalmente cuatro fichas rojas.

Ahora le toca a Lucía insertar su séptima ficha.

Lucía dice a Pablo: *¡has perdido! ¡Yo estoy seguro de ganarte cuando inserte mi octava o mi novena ficha!*



¿En qué columna debe Lucía insertar su séptima ficha para estar seguro de ganar?

Explicad cómo podrá ganar con su octava o con su novena ficha.

Son muy sencillos y todos ellos nos permiten utilizar el juego (modelización) para analizar las jugadas y estudiar las estrategias ganadoras. ¡Ánimo! Jueguen con los chicos.

Y quedamos así hasta la próxima entrega. Pero seguimos insistiendo: resuelvan los problemas, utilicenlos con los alumnos y, sobre todo, aporten sus comentarios a la revista, sus soluciones e, incluso, nuevas propuestas. O, simplemente, cuéntenos lo sucedido en el transcurso de la clase en que probaron el problema. Eso nos alegraría mucho y también al resto de lectores. Aplíquense...

Como siempre, aguardamos sus noticias a la espera de la próxima edición de la revista.



Un saludo afectuoso del **Club Matemático**.