NÚMEROS
Revista de Didáctica de las Matemáticas
http://www.sinewton.org/numeros
ISSN: 1887-1984
Volumen 83, julio de 2013, páginas 187-198

# Juegos y Torneo
# Problemas Comentados XXXIV

**José Antonio Rupérez Padrón y Manuel García Déniz** (Club Matemático[1])

**Resumen** Este artículo, además de resolver ejercicios anteriormente publicados sobre juegos con cartas y fichas, plantea los enunciados de los ejercicios propuestos en la Primera Fase del Torneo para alumnado de 2º de la ESO organizado por la Sociedad Canaria de Profesores de Matemáticas, y que abarcan problemas de lógica, cálculo, geometría o gráficas. Se adelantan algunas de las singulares respuestas de los alumnos.

**Palabras clave** Resolución de ejercicios por tabulación o por razonamiento lógico deductivo. Olimpiadas y Torneos sobre resolución de problemas de Matemáticas. Análisis de respuestas de los alumnos.

**Abstract** This article, in addition to solving exercises published previously on games with cards and chips, raises the statements of the exercises in the first phase of the tournament for students of 2nd ESO organized by the Sociedad Canaria de Profesores de Matemáticas, and covering problems logic, calculus, geometry or graphic. We advance some of the unique student responses.

**Keywords** Resolution of exercises by tabs or deductive logical reasoning. Tournaments and math problem solving. The analysis of student responses.

En el último artículo dejamos una propuesta de problemas para Secundaria Obligatoria procedentes de la 19ª edición del Rally Matemático Transalpino Final). Y poco antes del cierre de este número de la revista hemos recibido el siguiente correo del buen amigo Pepe Vidal, miembro del Seminario Newton de Resolución de Problemas que, por cierto, vuelve a iniciar su andadura en este año de 2013 con sede en la Casa Museo de las Matemáticas, en La Laguna.

---

En el último artículo se nos ocurrió proponer algunos sencillos problemas referidos a juegos muy conocidos, conexión entre nuestras dos secciones de la revista.

Seguro que nuestros sagaces lectores han dado con las soluciones, pero nosotros hemos encontrado las que siguen, y -valga la redundancia y la repetición- seguimos esperando las de ustedes.

[1] **El Club Matemático** está formado por los profesores **José Antonio Rupérez Padrón** y **Manuel García Déniz**, jubilados del IES de Canarias-Cabrera Pinto (La Laguna) y del IES Tomás de Iriarte (Santa Cruz de Tenerife), respectivamente. jaruperez@gmail.com / mgarciadeniz@gmail.com



P R O B L E M A S

## Cartas rojas y cartas negras (solitario de cartas)

Mario ha aprendido a jugar solitarios. En este caso, con un mazo de cartas rojas y cartas negras. Las reglas del juego son éstas:

- se comienza disponiendo sobre la mesa 6 cartas rojas y 6 cartas negras;
- en cada movimiento, se pueden quitar de la mesa o una carta o dos cartas juntas, pero con estas condiciones:
  - si se quita una sola carta roja, se deben colocar sobre la mesa otras dos rojas, cogiéndolas del mazo;
  - si se quitan dos cartas rojas juntas, se debe colocar sobre la mesa una carta negra, cogiéndola del mazo;
  - si se quita una sola carta negra, se debe colocar otra negra sobre la mesa, cogiéndola del mazo;
  - si se quitan dos cartas negras juntas, no se debe colocar ninguna sobre la mesa;
- el juego termina cuando no quedan más cartas sobre la mesa.

Mario querría terminar el solitario con el menor número posible de movimientos.

**Indicad el número y la secuencia de movimientos que debe hacer Mario para finalizar el solitario lo más rápidamente posible.**

Resulta interesante que los alumnos hagan cualquier solitario real o virtual con cartas, para que comprendan las reglas del juego y las apliquen.

Después se les presenta el que figura en el problema, con seis cartas rojas y seis cartas negras.

Para la comprensión de las reglas es aconsejable realizar una tabla con las jugadas permitidas.

| Cartas tomadas | | Cartas devueltas |
|---|---|---|
| **Una** ROJA | → | **Dos** ROJAS |
| **Dos** ROJAS | → | **Una** NEGRA |
| **Una** NEGRA | → | **Una** NEGRA |
| **Dos** NEGRAS | → | Ninguna |

Ahora sería bueno jugar un par de veces para dominar las reglas y entender las dificultades del juego.

Lo primero es darse cuenta que, para poder acabar el solitario, es necesario eliminar todas las cartas rojas procurando que sobre la mesa quede un número par de cartas negras, que podríamos eliminar después de dos en dos.

Partiendo de 6 cartas negras y 6 cartas rojas sobre la mesa, las seis cartas negras se pueden eliminar rápidamente en tres jugadas. Basta con sacarlas de la mesa de dos en dos. Según las reglas no se devuelve ninguna a la mesa.

Si las cartas rojas se eliminaran de dos en dos, se deberían devolver a la mesa tres cartas negras. De ellas sólo dos podrían después ser eliminadas con una jugada permitida, pero quedaría una carta negra que haría que no pudiera acabarse el solitario.

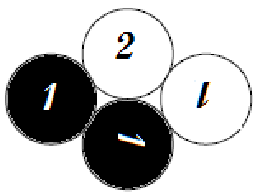
La estrategia no es esa. Habrá que cambiarla. Cuatro cartas rojas pueden ser eliminadas en tres jugadas. Las otras dos necesitan cinco jugadas más. Veamos cómo:

| Cartas antes | Jugada | Cartas tomadas | | Cartas devueltas | Cartas después |
|---|---|---|---|---|---|
| RRRRRR<br>NNNNNN | 1ª | NN | → | Ninguna | RRRRRR<br>NNNN |
| RRRRRR<br>NNNN | 2ª | NN | → | Ninguna | RRRRRR<br>NN |
| RRRRRR<br>NN | 3ª | NN | → | Ninguna | RRRRRR |
| RRRRRR | 4ª | RR | → | N | RRRR<br>N |
| RRRR<br>N | 5ª | RR | → | N | RR<br>NN |
| RR<br>NN | 6ª | NN | → | Ninguna | RR |
| RR | 7ª | R | → | RR | RRR |
| RRR | 8ª | R | → | RR | RRRR |
| RRRR | 9ª | RR | → | N | RR<br>N |
| RR<br>N | 10ª | RR | → | N | NN |
| NN | 11ª | NN | → | Ninguna | Ninguna |

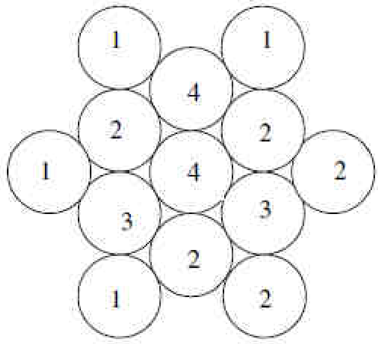
Solución: **El número mínimo de jugadas para terminar el solitario es 11.**

## Blanco o gris (buscaminas)

Andrea ha encontrado unas fichas de ***damas con números*** y ha puesto juntas fichas blancas y fichas negras de la manera que veis en la figura.
Andrea se da cuenta de que hay escrito en cada una el número de fichas negras que la tocan.



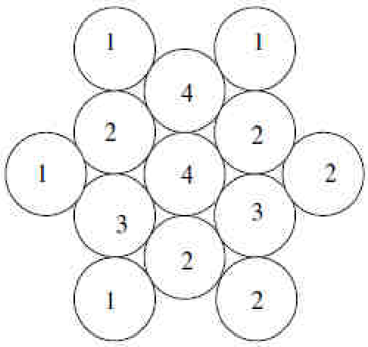
Después, ha puesto juntas de la misma manera un número mayor de fichas, siempre blancas y negras y ha escrito también sobre cada ficha el número de fichas negras que la tocan.
He aquí las fichas que ha colocado juntas: sobre ellas se ven sólo los números que ha escrito, pero no se distinguen las fichas negras de las blancas.

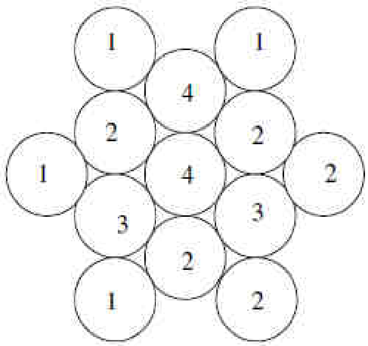



**Coloread vosotros todas las fichas negras.**

**Presentad dos soluciones diferentes.**

(Utilizad los dos grupos dibujados aquí abajo para colorear las fichas negras de vuestras soluciones)




Como ya se indica en el título del problema, éste está relacionado con el juego del Buscaminas. Para resolverlo bastará con utilizar la Lógica y el razonamiento, usando exclusión y deducción, mediante el uso de alguna estrategia, como pueden ser Organizar la Información y Ensayo y Error.

Lo más simple es utilizar la información que nos indica que algunas fichas son de color obligatorio.

Para entendernos, tendremos en cuenta que hay cuatro columnas de círculos que denominaremos, de izquierda a derecha, como C1 (un círculo, marcado con 1), C2 (cuatro círculos marcados, de arriba hacia abajo con 1, 2, 3, 1), C3 (tres círculos, marcados 4, 4, 2), C4 (cuatro círculos, marcados 1, 2, 3, 2) y C5 (un círculo, marcado 2). Como se aprecia la estructura es muy simétrica desde ese punto de vista. No ocurre así con los números que aparecen en cada círculo.

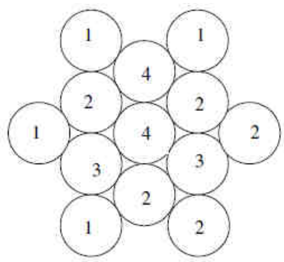



**Figura 1**

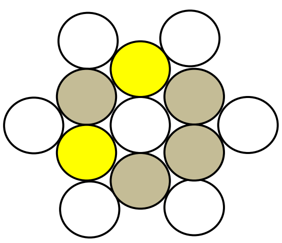


**Figura 2**

También podemos referirnos a la estructura hexagonal que presenta: un círculo central marcado 4; seis círculos formando un anillo intermedio y marcados 4, 2, 3, 2, 3, 2; otros seis círculos que forman un anillo exterior y marcados 1, 2, 2, 1, 1, 1.

Haciendo uso de la Organización de la Información vemos que las dos fichas del anillo exterior marcadas con un 2 imponen el color gris de las fichas 2, 3 y 2 que las tocan.

La ficha 1 de la parte inferior de C2 impone el blanco a la ficha 3 que está sobre ella. La ficha 1 de C1 impone el gris a la 2 que la toca. Y, finalmente, la ficha 4 central, ya rodeada por cuatro grises, impone el blanco a la ficha 4 que está sobre ella. Así, el color de las seis fichas que rodean a la ficha 4 central es un color impuesto.

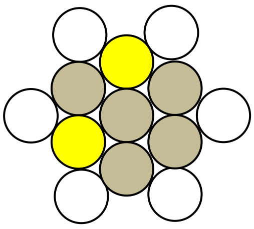


**Figura 5**

Ahora nos toca analizar el color que deben tener las que aún no están coloreadas, es decir, la ficha central marcada 4 y las fichas del anillo exterior marcadas 1, 2, 2, 1, 1, 1.

Haciendo Ensayo y Error, vamos a suponer que la ficha central 4 es de color gris.

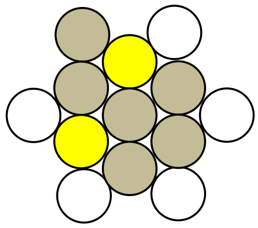


**Figura 6**

En ese caso, todas las fichas de las columnas C3, C4 y C5 satisfacen los números que tienen inscritos, excepto la marcada con 4 y coloreada de blanco, que debe tocar una más de color gris. Ha de ser la ficha superior de la columna C2, marcada con 1. Y así, que da satisfecha también inscripción 2 de la ficha de la misma columna que la está tocando.

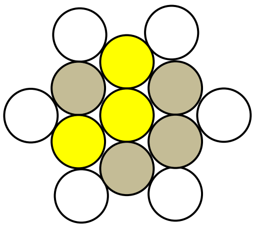


**Figura 5**

Tenemos, pues, una solución. Las otras fichas quedarán en blanco.

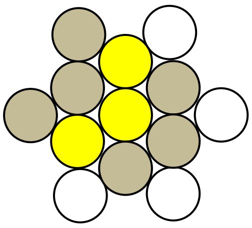


**Figura 5**

Ahora realizaremos el Ensayo y Error suponiendo que la ficha central 4 es de color blanco.

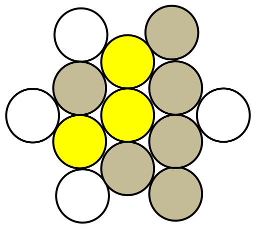


**Figura 7**

En este caso, lo primero que observamos es que las dos fichas que ocupan los extremos de la columna C4 deben colorearse de gris para satisfacer los números de las fichas que ocupan la parte central de esa columna.

Ahora observamos que para satisfacer el número 4 de la ficha superior de la columna C3 debemos colorear de gris la ficha marcada con 1 de la parte superior de C2. Y también, para satisfacer las fichas marcadas 3 y 2 de la columna C2, deberemos colorear de gris la ficha de C1.

Con lo cual tenemos otra solución. También aquí, las otras fichas quedan en blanco.

Hay dos soluciones diferentes:

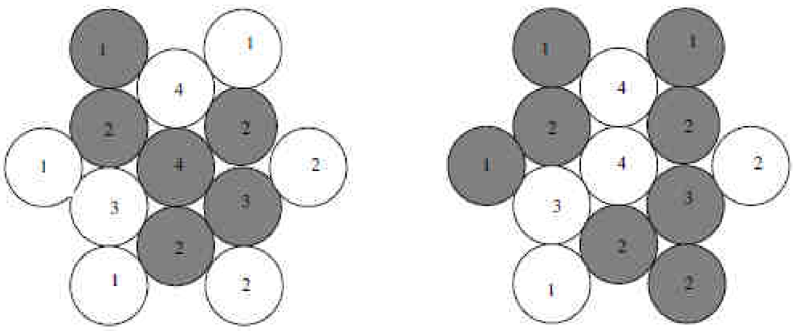


**Figura 8**

## La última carta (Nim)

Un juego tiene las siguientes reglas: dos jugadores toman por turnos una, dos o tres cartas de un mazo que inicialmente contiene 20. El jugador que toma la última carta pierde.
Lucía y Andrea deciden jugar una partida.
Andrea dice a Lucía: «¿Quieres comenzar tú?».
Andrea, que es muy fuerte en este tipo de juegos de estrategia, dice a Lucía: «Reflexiona bien, ¡tú puedes ganar seguro!».
Lucia se da cuenta de poder elegir entre:

- dejar empezar a Andrea
- empezar tomando una carta
- empezar tomando dos cartas
- empezar tomando tres cartas

**Si vosotros estuvieseis en el lugar de Lucía, ¿qué elegiríais hacer?**

**Explicad por qué y con qué jugadas podrá ganar Lucía.**

Cada jugador tiene tres opciones para hacer su jugada. Si se quiere hacer un inventario detallado de todas las posibilidades de desarrollo de la partida resultará una tarea agotadora, ya que serían demasiado numerosas.

**Figura 9**

Pensemos en que el resultado de la partida se decide en las últimas jugadas, cuando quedan pocas cartas. Es más fácil analizar la situación en ese caso, y después utilizar la estrategia de Ir Hacia Atrás hasta llegar a la situación de partida con el mazo de 20 cartas.

La última jugada es aquella en que se deja una carta al oponente. En ese momento hemos ganado.

Para dejar esa última carta, previamente habremos debido jugar así:

a) Si había 2 cartas, cogemos 1.
b) Si había 3 cartas, cogemos 2.
c) Si había 4 cartas, cogemos 3.

**Figura 10**

Para que ello suceda deberíamos dejar 5 cartas en la jugada anterior y así podremos llegar con seguridad a 4, a 3, o a 2 cartas, ya que nuestro oponente habrá de retirar 1, 2 o 3 del mazo.

Ahora seguiremos hacia atrás. Para poder dejar 5 cartas al oponente, es necesario haber dejado antes 9 cartas, para que así el oponente deba coger 1, 2 o 3 y nosotros, a continuación, coger 3, 2 o 1, respectivamente.

A continuación, estudiar la repetitividad del análisis y comprobar que hay un patrón con una diferencia de 4 cartas entre jugada y jugada: 9, 5, 1.

Podemos deducir entonces que las anteriores jugadas han de partir de 13 y 17 cartas dejadas al oponente.

Como se parte de un mazo de 20 cartas y debemos llegar a dejar 17 cartas al oponente, para ganar debemos iniciar nosotros y coger 3 cartas.

De no empezar nosotros, nuestro oponente puede elegir 3 cartas y dejarnos 17 a nosotros, que ya sabemos que es una situación perdedora.

Respuesta: Lucía debe comenzar en primer lugar tomando 3 cartas para dejar 17 y después dejar a Andrea sucesivamente **13, 9, 5, 1** cartas, tomando el complemento a 4 de lo que ella haga.

## Cuatro en línea (alineamiento)

Pablo y Lucía juegan una partida a «Cuatro en línea». En este juego cada uno, en su turno, deja deslizar una ficha en una de las columnas numeradas de 1 a 7. La ficha va por tanto a colocarse en la fila abajo o sobre otra ficha ya insertada.
El ganador es aquel que primero alinea cuatro fichas de su color horizontalmente, verticalmente o en diagonal.
Pablo ha comenzado el juego y ha colocado ya siete fichas amarillas; ha insertado la última en la columna 3 para impedir a Lucía alinear verticalmente cuatro fichas rojas.
Ahora le toca a Lucía insertar su séptima ficha.
Lucía dice a Pablo: *¡has perdido!¡Yo estoy seguro de ganarte cuando inserte mi octava o mi novena ficha!*

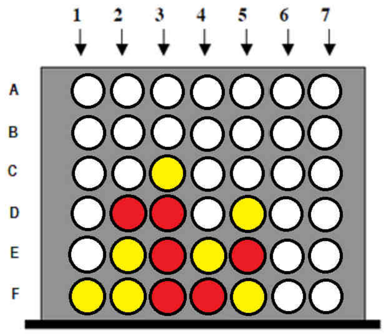


**Figura 11**

**¿En qué columna debe Lucía insertar su séptima ficha para estar seguro de ganar?**

**Explicad cómo podrá ganar con su octava o con su novena ficha.**

El problema plantea que ya se han realizado 13 jugadas, habiendo empezado Lucía. Una cuestión interesante sería determinar el orden en que se realizaron las jugadas o, mejor, en qué momento se equivocó al jugar el jugador que pierda.

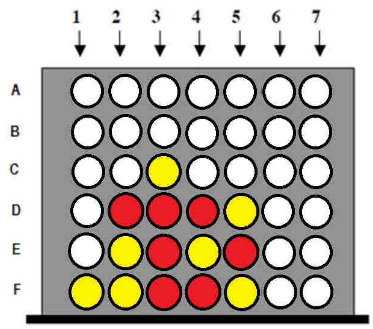


**Figura 13**

Pablo juega con las fichas amarillas y ha insertado siete fichas. Lucía juega con las fichas rojas y ha insertado ya seis fichas. Trece jugadas en total

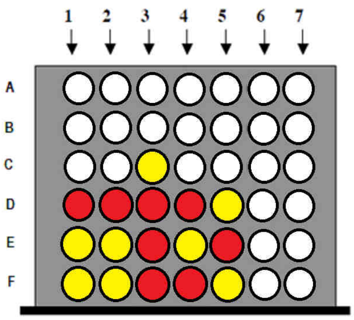


**Figura 14**

Pero veamos que pasa en la jugada actual, la nº 14. Le toca jugar a Lucía y vemos que ya existe un alineamiento de tres fichas rojas en diagonal y que, colocando su ficha roja en la celdilla D 4 (**Fig. 12**), Lucía realiza otro alineamiento horizontal de tres fichas rojas en la tercera fila

Si Pablo inserta su octava ficha amarilla en la primera columna (E1), Lucía colocará su octava inmediatamente encima, en

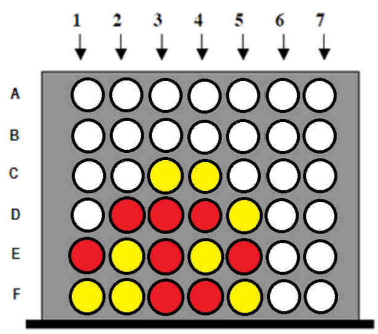


**Figura 13**

la misma columna (D1) (**Fig. 13**), y realizará el alineamiento de cuatro en la fila D1-D2-D3-D4, con lo cual gana.

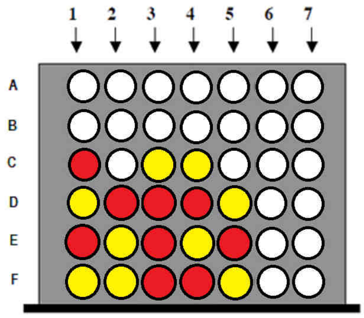



Figura 15

Si Pablo quiere evitar perder de la manera rápida anterior, buscará insertar su octava ficha en otra parte, por ejemplo en C4; entonces Lucía pone la suya en la celdilla E1 (**Fig. 14**). De momento no pasa nada.

A continuación, si Pablo inserta su novena ficha en D1, sobre la de Lucía, para impedir la alineación horizontal, Lucía colocará su novena ficha sobre la de Pablo en C1 (**Fig. 15**), y llevará a cabo un alineamiento de cuatro en la diagonal C1-D2-E3-F4 y gana.

Si Pablo no pone su novena ficha en D1, sobre la de Lucía, entonces ésta podrá colocar su novena ficha en D1, y así completar el alineamiento horizontal. Supongamos que Pablo juega B4. Entonces sucederá lo siguiente (**Fig. 16**):

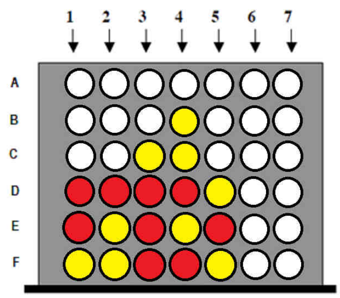



Figura 16

**Respuesta**: **Lucía ha de situar su 7ª ficha en D4 y, después, según como juegue Pablo, la 8ª ficha de Lucía deberá situarla en E1 o la 9ª ficha en la C1 o en D1**.

Creo que problemas como estos permiten, a través de juegos sencillos, poner en marcha maneras de pensar que nuestros alumnos tienen de manera intuitiva, darles estructura y recursos simples para ver cómo el pensamiento lógico y las estrategias de resolución de problemas hacen surgir pequeñas estrategias ganadoras de una manera divertida.

## La XXIX edición del Torneo

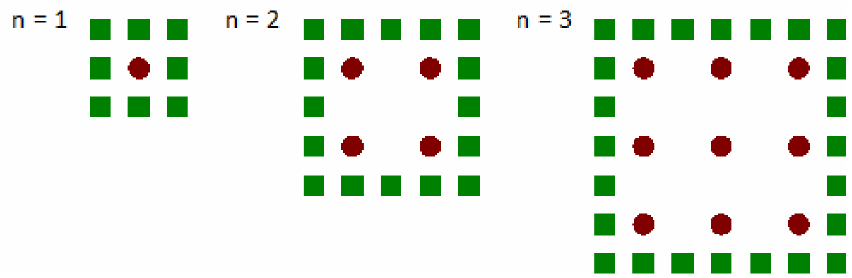
Y ahora exponemos los problemas planteados en la primera fase del Torneo de Matemáticas que celebra la Sociedad Canaria Isaac Newton de Profesores de Matemáticas, que ya va por su XXIX edición, con algunos comentarios extraídos de las respuestas de los alumnos, cosa que ya hemos hecho en otras ocasiones y que nos sigue pareciendo interesante por las aportaciones al conocimiento de la forma de pensar, de los niveles de conocimientos, de los propios errores y virtudes de los alumnos, de cómo enseñamos, etc.

## Problema nº 1. Parque Jurásico

En el mundo de los animales extintos se encuentran el Pegaso y el Dinosaurio. El Pegaso miente los lunes, martes y miércoles, y el Dinosaurio miente los jueves, viernes y sábados. En todas las demás ocasiones ambos animales dicen la verdad. Un día ambos animales extintos mantuvieron la siguiente conversación:
Ayer me toco mentir - dijo el Pegaso
También a mí me toco mentir - contestó el Dinosaurio
¿En qué día de la semana estaban?

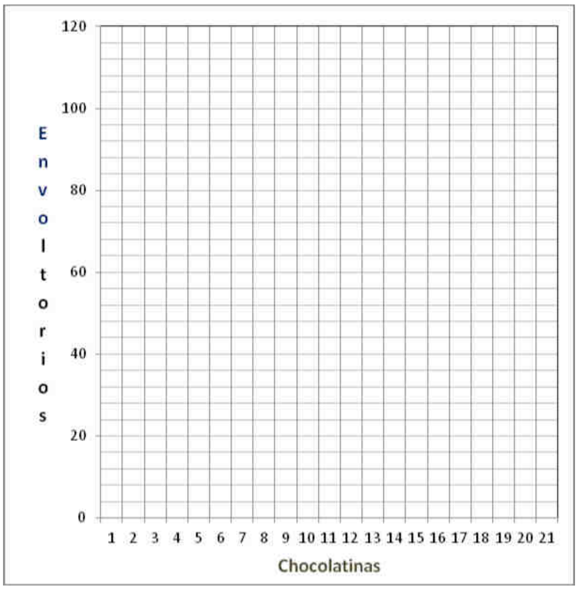
## Problema nº 2. Manzanos y coníferas

Un agricultor planta manzanos siguiendo un patrón cuadrado. Para proteger sus árboles contra el viento, planta coníferas alrededor de la huerta.
A continuación puedes ver un diagrama de esta situación donde n es el número de filas de manzanos plantados, ● es un manzano y ■ es una conífera:
¿Cuál debe ser el número de manzanos, que debe plantar el agricultor, para que haya igual número de manzanos que de coníferas?




## Problema nº 3. La promoción de las chocolatinas

Mario ha llegado a reunir 71 envases de chocolatinas de una marca que está promocionándose y cambia 8 envoltorios por una nueva chocolatina.
Rellena la tabla y representa, en el siguiente sistema de dos ejes, cómo va evolucionando el número de envoltorios según va cambiándolos por chocolatinas. Ten en cuenta que parte de 71 envoltorios y ninguna chocolatina; luego cambia 8 envoltorios por una chocolatina, se la come y cambia otros ocho envoltorios por otra chocolatina y se la come. Y así sigue, de una en una, hasta que no le quedan suficientes envoltorios para otro cambio.

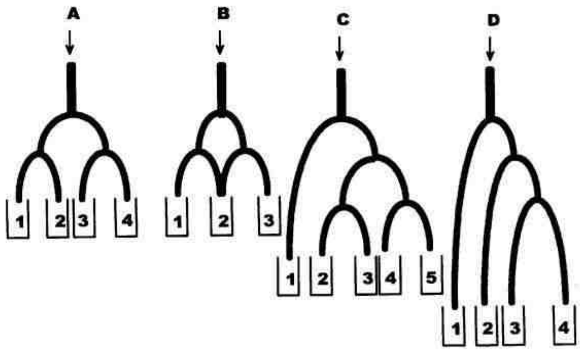



| Chocolatinas | Envoltorios |
|---|---|
| 1 | |
| 2 | |
| 3 | |
| 4 | |
| 5 | |
| 6 | |
| 7 | |
| 8 | |
| 9 | |
| 10 | |
| 11 | |
| 12 | |
| 13 | |
| 14 | |
| 15 | |
| 16 | |
| 17 | |
| 18 | |
| 19 | |
| 20 | |

Al final, ¿cuántas chocolatinas se come gratuitamente? ¿Con cuántos envoltorios se queda sin cambiar, si no compra chocolatinas?

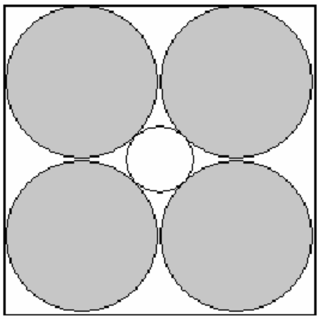
Número de chocolatinas finales:
Número de envoltorios que le sobran:
Explica aquí cómo has resuelto el ejercicio.
Chocolatinas
Envoltorios

## Problema nº 4. Muchas bolas




Imagínate que disponemos de 1000 bolas iguales y del mismo peso. Las introducimos una tras otra por la entrada de cada uno de los siguientes dispositivos.
¿Cuántas crees que probablemente se depositarán en cada cajetín? ¿Por qué?

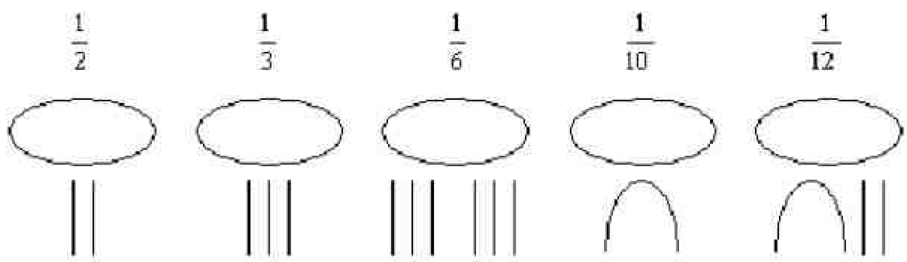
## Problema nº 5. Cinco fichas



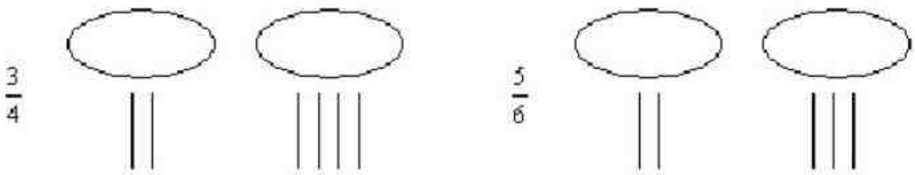
Cuatro fichas circulares iguales se tocan entre sí, tal y como se ve en la figura. Averigua el radio de la mayor ficha con forma circular que puede colocarse en el hueco que dejan las cuatro.

## Problema nº 6. Fracciones egipcias

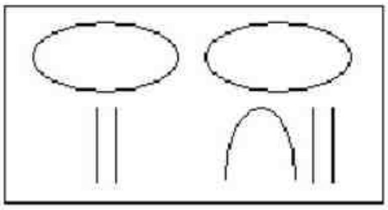
En Egipto se usaban fracciones con numerador igual a la unidad, que se representaban así:

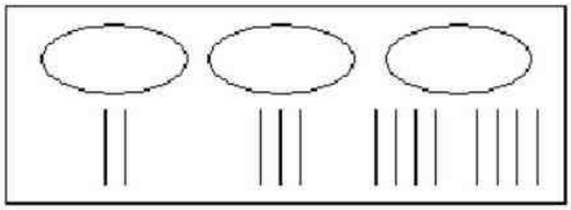



Las fracciones con numerador distinto de la unidad las expresaban como suma de fracciones del tipo anterior:



a) ¿Qué fracciones son las siguientes?





b) ¿Cómo escribían los egipcios las fracciones siguientes? $\frac{4}{7}$ $\frac{5}{8}$ $\frac{5}{9}$

c) ¿Podrías indicar una manera de expresar cualquier fracción como suma de fracciones egipcias diferentes?

Estos problemas han sido propuestos a los alumnos de 2º de E.S.O. de las Islas Canarias. Queremos que nuestros lectores los intenten resolver. Sus soluciones las veremos en el próximo número de la revista, con las aportadas por los alumnos y comentaremos los resultados del Torneo.

Estos chicos lo afrontan con una tremenda naturalidad. Después de resolverlos con todo el esfuerzo y la seriedad del mundo, dan, a veces, sus opiniones sin cortarse en absoluto. Otras veces tratan de justificarse al no encontrar una solución. Y, en ocasiones, expresan simplemente su opinión personal sobre lo que leen.

Veamos algunas opiniones de estos alumnos sobre los problemas de este Torneo. Están entresacados de las pruebas sin saber quiénes son sus autores y sólo con el fin de ver la disparidad en la formación de estos alumnos y sus pensamientos sobre matemáticas.

Sobre el primer problema **Parque Jurásico**: "Todo eso suponiendo que el pegaso hubiera existido a la vez que los dinosaurios, que ambos animales supieran hablar y que tuvieran noción de los días y los llamaran como nosotros (lo cual me parece bastante improbable)."

Para el segundo **Manzanos y coníferas**: "Siempre hay más coníferas porque están alrededor de los manzanos y porque tienen dos filas más de altura y otras dos de ancho".

Acerca del tercero **La promoción de las chocolatinas**: "Número de chocolatinas finales: ninguna, porque las cambia y se las come, así todo el tiempo. Pero se comió 8 chocolatinas."

Para el cuarto **Muchas bolas**: "Si seguimos el dibujo, caerán hacia el lado más hundido; no muy segura de dicha respuesta voy a exponer otra idea manteniéndome en mis 13 años de edad y mi nula experiencia en la materia de física, creo que podría decir que en el ejemplo C y D caerían por la zona más "en caída" puesto que la fuerza de gravedad la atraería de una manera más fácil diría yo, pero exacto no sabría decir, teniendo en cuenta que esto es probabilidad y jamás se acierta con seguridad."

Para el quinto, el de geometría **Cinco fichas**, hemos seleccionado varios:

- "Ésta que está colocada".
- "Solución más breve: se coge una regla, se mide su diámetro y luego se divide entre 2 (pero ésta no es la verdadera solución)".

- “Creo que este problema sin ningún dato no se puede hallar. Porque sin ninguna cifra, de ninguna de las partes, no sé cuánto mide el cuadrado ni nada”.

Sobre el sexto **Fracciones egipcias**, respecto a la última pregunta “¿Podría indicar una manera de expresar cualquier fracción como suma de fracciones egipcias diferentes?”:

- “No, ya que sería muy complicado para los egipcios resolver esas fracciones”.
- “No, yo creo que no sea posible si son egipcias”.
- “Yo no podría ya que más o menos no me sale, pero si me lo explican seguro”.

Y quedamos así hasta la próxima entrega. Pero seguimos insistiendo: resuelvan los problemas, utilícenlos con los alumnos y, sobre todo, aporten sus comentarios a la revista, sus soluciones e, incluso, nuevas propuestas. O, simplemente, cuéntennos lo sucedido en el transcurso de la clase en que probaron el problema. Eso nos alegraría mucho y también al resto de lectores. No se dejen ir…

Como siempre, aguardamos sus noticias a la espera de la próxima edición de la revista.

NÚMEROS
Revista de Didáctica de las Matemáticas

Un saludo afectuoso del **Club Matemático.**