Geometría dinámica y los tres famosos problemas geométricos griegos de la antigüedad

Óscar Gómez
Fundación Universitaria Konrad Lorenz
oscare.gomezr@konradlorenz.edu.co

La intención de la conferencia es hacer un paralelo entre, por una parte, dos aspectos de la geometría dinámica –su desempeño como herramienta empleada por un usuario y su funcionamiento interno– y, por otra, los dos aspectos del problema griego –las soluciones "lineales" y la imposibilidad de solución rigurosa. Algunas soluciones propuestas con construcciones como la cisoide y la cuadratriz siguen la filosofía de la geometría dinámica, esto es, más de dos mil años antes de la invención del computador, los griegos habían desarrollado el concepto de lo que hoy conocemos como geometría dinámica.

Antecedentes y un poco de historia

Aunque las matemáticas existían antes de los griegos, es un lugar común afirmar que, en algún sentido, comenzaron con ellos. Y este "sentido" es lo que le ha dado su estatus de conocimiento ideal y lo que la ha proyectado desde ese lejano pasado hasta nuestros días. Es en el seno de la cultura griega, no pudiendo ser en ninguna otra, donde ocurrió la génesis de los problemas que nos ocupan. La siguiente cita de Morris Kline (1972/2012) nos pone en contexto:

> Una de las grandes contribuciones de los griegos al concepto de matemática fue el reconocimiento consciente y el énfasis en el hecho de que los entes matemáticos: números y figuras geométricas, son abstracciones, ideas de la mente claramente distinguidas de los objetos o de las pinturas. (p. 54)

Los tres famosos problemas de la geometría griega se refieren a construcciones de tales entes abstractos, por lo tanto lo que se buscaba era un algoritmo de construcción que obedeciera las reglas del juego, esto es, construcciones que se limitaran al empleo de la regla y el compás euclidianos. Una observación de Kline (1953, citado en Sánchez, 1994) arroja luz sobre este hecho:

> Esta restricción a la línea recta y a los círculos, libremente aceptada y arbitraria, estuvo motivada por el deseo de conservar la simplicidad en la geometría y por

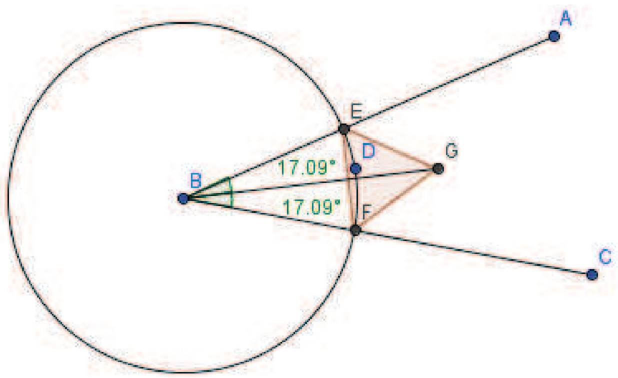
Gómez, Ó. (2013). Geometría dinámica y los tres famosos problemas geométricos griegos de la antigüedad. En P. Perry (Ed.), *Memorias del 21º Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones* (pp. 109-116). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

tanto apelaba a la estética. Algunos griegos, especialmente Platón, tenían otras razones de igual peso, para imponer la restricción. La introducción de instrumentos más complicados que podrían ser adecuados para la solución de los problemas de construcción requerían destreza manual, la que en su opinión, era indigna de un pensador. Platón opinaba que empleando instrumentos complicados "la bondad de la geometría es desechada y destruida, pues nuevamente la reduciríamos al mundo de los sentidos en lugar de elevarla e infundirle las imágenes eternas e incorpóreas del pensamiento". (p. 11)

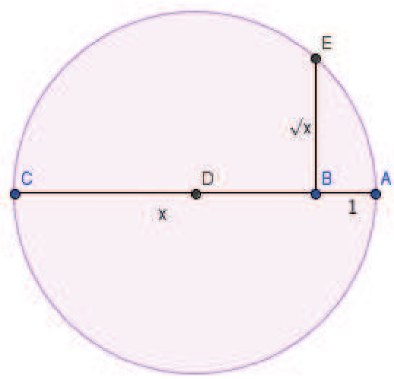
Construcciones conocidas

Los griegos demostraron muchas propiedades acerca de las áreas de figuras planas (e.g., que triángulos de bases y alturas iguales tienen la misma área), sin emplear para ello fórmulas que permitieran "medir" tales áreas sino mediante ingeniosas construcciones que permitían "ver" tal igualdad. En tal contexto surge el problema de "cuadrar" una figura, lo que consiste en dibujar, con regla y compás euclidianos, un cuadrado de área igual a la de la figura dada.

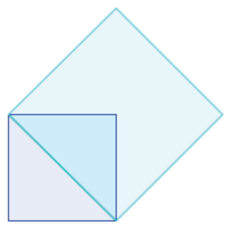
Los griegos sabían…



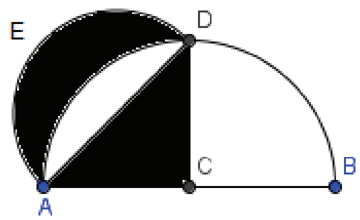
cómo bisecar un ángulo (construcción que aparece en los *Elementos* de Euclides



cómo extraer una raíz cuadrada

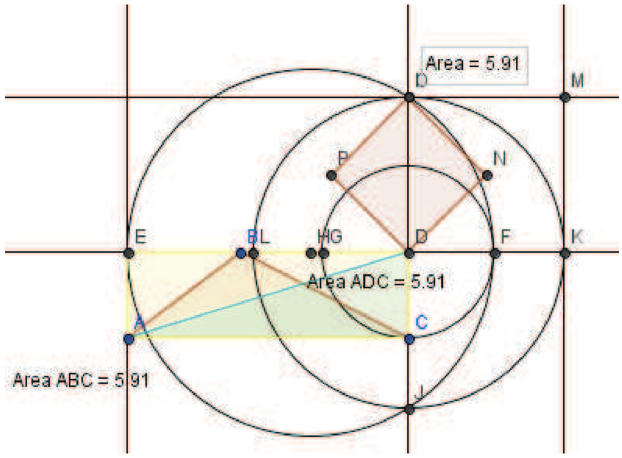


cómo duplicar un cuadrado



cómo cuadrar lúnulas

cómo cuadrar un triángulo con regla y compás



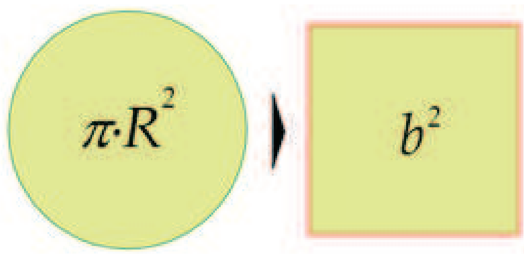
Hipócrates de Quíos demostró (la demostración tarda un minuto) que la lúnula AED y el triángulo ADC tienen la misma área. Hipócrates logró además cuadrar otros dos tipos de lúnulas. Esta demostración constituyó un paso enorme al mostrar que era posible cuadrar figuras cuyo perímetro no está constituido por segmentos de recta (por un proceso de triangulación, cuadratura de triángulos y empleando el teorema de Pitágoras los griegos lograban cuadrar cualquier polígono).

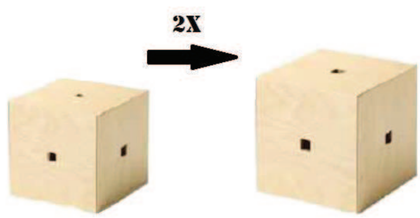
TRES RETOS GEOMÉTRICOS

Los resultados obtenidos hasta ese entonces permitieron pensar que era posible lograr resolver problemas que, de manera natural, llevaban un paso adelante lo ya conseguido.

Cuadrar el círculo

Problema relacionado con los de cuadrar polígonos y figuras de borde no recto, como las lúnulas de Hipócrates. Algebraicamente equivale a construir con regla y compás un segmento de longitud igual a π.

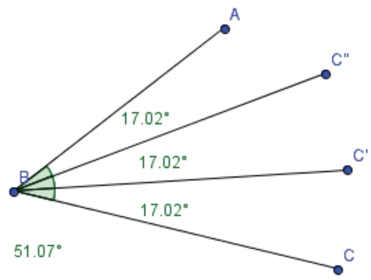




Duplicar el cubo

Este problema, que equivale desde el punto de vista algebraico a construir con regla y compás la raíz cúbica de 2, extiende el problema ya resuelto de calcular la raíz cuadrada de cualquier número.

Trisecar un ángulo



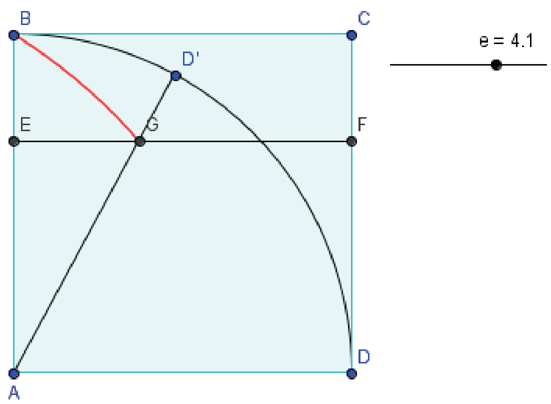
Soluciones

Las soluciones se clasificaron en *planas* cuando se basaban en el uso de la regla y el compás exclusivamente, *sólidas* cuando acudían al empleo de secciones cónicas y *lineales* cuando requerían el empleo de curvas más elaboradas como cuadratrices, concoides, cisoides, etc. (Sánchez, 1994).

Soluciones lineales implementadas en GeoGebra

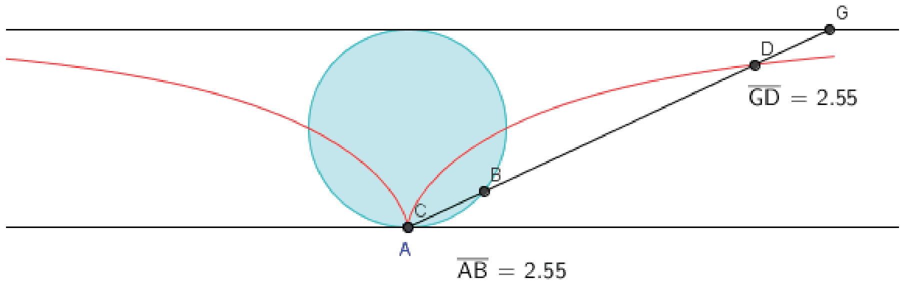
Cuadratriz de Hipias

Esta curva es generada por la intersección de las rectas EF y AD' mientras se desplazan de manera uniforme, EF de la posición BC a la AD y AD' de la posición AB a la AD. Esta curva, generada a partir de la combinación de dos movimientos simultáneos, uno de giro y otro de traslación, exige para su cabal comprensión un medio dinámico que permita ver realmente los movimientos que la generan. Es por ello que un texto como el presente es incapaz de mostrar, con todo detalle, la totalidad de la idea que pretende representar.



Esta curva, que en principio fue ideada para resolver el problema de la trisección del ángulo, también sirve para resolver el problema de la cuadratura del círculo ya que la posición límite del punto G (cuando EF y AD'coinciden con AD, el punto G no está definido y por tanto su posición se determina mediante el cálculo de un límite) es tal que $AG = 2AD/\pi$, y por tanto la curva permite la construcción de π.

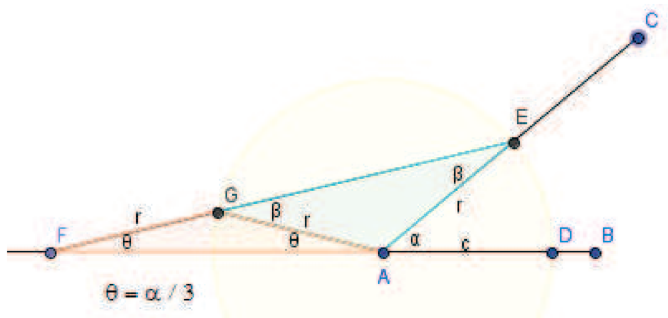
Cisoide de Diocles



De igual manera, esta curva se genera mediante el movimiento de giro del segmento AG. El punto D se determina mediante la exigencia de que la distancia GD sea igual a AB, donde B es el punto de intersección de la recta con la circunferencia.

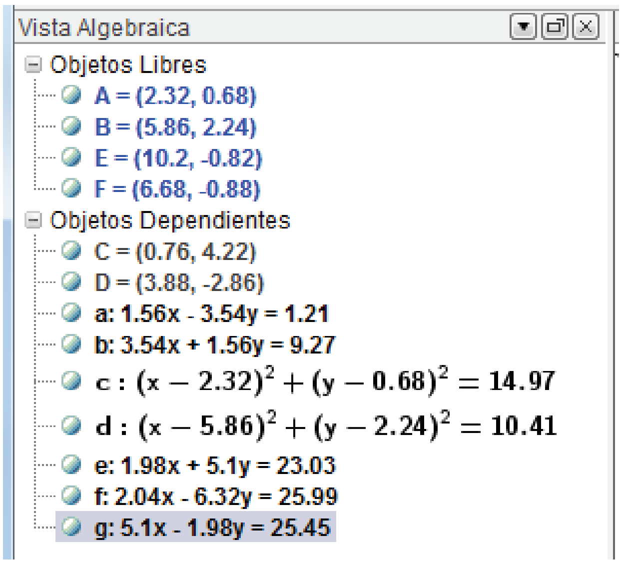
Trisección del ángulo por Arquímedes

Arquímedes logra la trisección del ángulo violando una de las restricciones al empleo de la regla, la cual dice que esta solo sirve para trazar o prolongar rectas pero que no es posible emplearla para trasladar distancias.



Imposibilidad de las soluciones (Courant, 1941/2002)

La invención por parte de Fermat y Descartes de la geometría analítica permite que se inicie el proceso que conducirá finalmente a la solución negativa del problema. En el marco de la geometría analítica tanto las rectas como las circunferencias se representan por ecuaciones. Los puntos de intersección de rectas y circunferencias se determinan mediante la solución de sistemas de tales ecuaciones. Comenzando en el campo de los racionales, las soluciones de tales sistemas pueden quedar fuera de él. Sin embargo, estas soluciones estarán contenidas en otro campo y las ecuaciones con coeficientes en este nuevo campo también podrán tener soluciones fuera de él, pero que estarán contenidas en un tercer campo. Este proceso de extensión de campos da lugar a una cadena de campos bien definida. Al traducir los problemas de la geometría al álgebra es posible determinar, según la naturaleza de las raíces involucradas, si estas son construibles, lo que equivale a poder establecer la resolubilidad del problema. Este proceso de representación de rectas y circunferencias mediante ecuaciones lo realizan internamente los paquetes de geometría dinámica. En particular, GeoGebra permite mediante la opción "vista algebraica" ir viendo, paso a paso, la equivalencia entre la construcción geométrica y su almacenamiento y procesamiento interno mediante ecuaciones.



Vista algebraica típica de una construcción en GeoGebra, donde se evidencia la relación entre las figuras geométricas de la opción vista gráfica y su almacenamiento interno, empleando coordenadas para los puntos y ecuaciones para las rectas y circunferencias.

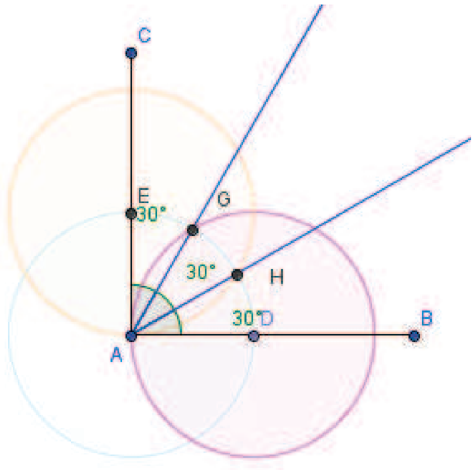
No es posible duplicar el cubo

Este problema que en su traducción algebraica equivale a determinar si es posible construir con regla y compás un segmento de longitud igual a $\sqrt[3]{2}$ tiene respuesta negativa: no es posible realizar tal construcción y por lo tanto se concluye que nunca se logrará la construcción pedida.

En general, no es posible trisecar el ángulo

La solución para este problema, a diferencia del anterior, es parcial, esto es, la construcción pedida es posible en el caso de algunos ángulos particulares, pero es posible demostrar su imposibilidad en otros, como es el caso de un ángulo de 60°.

Trisección del ángulo de 90°



No es posible cuadrar el círculo

Este problema equivale a establecer si π es un número algebraico o trascendente. La segunda posibilidad implicaría la imposibilidad de realizar la construcción pedida. En 1882, Ferdinand Lindemann demostró que en efecto, como se temía, π es trascendente y por lo tanto el problema es irresoluble.

CONCLUSIONES

Las herramientas informáticas actuales enfocadas al trabajo matemático han traído a nuestra área un elemento que antes era exclusivo de otras áreas del conocimiento: el laboratorio de experimentación. A diferencia de lo que ocurría en el pasado hoy podemos emplear efectivamente la cuadratriz de Hipias para trisecar un ángulo. Podemos con un simple movimiento de ratón modificar la configuración empleada para extraer la raíz cuadrada de 2 y emplearla para calcular las de muchos otros números. Podemos ver la idea de trisección de Arquímedes en acción.

Es probable que hayamos llegado a un momento en el que las necesidades pedagógicas y las posibilidades tecnológicas nos estén exigiendo el abandono del texto matemático clásico. Textos como el presente que son incapaces de reflejar el "dinamismo" natural del trabajo matemático probablemente estén próximos a desaparecer para dar lugar al texto interactivo en el cual las ideas matemáticas encuentren un mejor y más apropiado vehículo de transmisión y creación.

REFERENCIAS

Courant, R. (2002). *¿Qué son las matemáticas*? *Conceptos y métodos fundamentales* (Martín Manrique Mansour, Tr.). México D.F, México: Fondo de Cultura Económica (primera edición en inglés, 1941).

Kline, M. (2012). *El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días* (Versión de Alfonso Casal, Carlos Fernández, Alejandro Ricardo Garciadiego Dantan, Mariano Martínez y Juan Tarrés. Coordinación y revisión de Jesús Hernández). Madrid, España: Alianza Editorial (primera edición en inglés, 1972).

Sánchez, C.H. (1994). *Los tres famosos problemas de la geometría griega y su historia en Colombia*. Bogotá, Colombia: Universidad Nacional de Colombia.