



I CEMACYC

I Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe

6 al 8 noviembre. 2013

i.cemacyc.org

Santo Domingo, República Dominicana



El papel de la geometría en el currículo de enseñanza primaria y media

Hugo **Barrantes** Campos
Escuela de Matemática,
Universidad de Costa Rica
Costa Rica
habarran@gmail.com

Resumen

En mayo de 2012 fueron aprobados en Costa Rica nuevos programas de estudio en Matemáticas para la Educación General Básica. Tales programas representan un salto cualitativo en relación con los programas anteriores, tanto en la metodología que propone como en los temas a estudiar. Los cambios en contenidos son particularmente profundos en el área de Estadística y Probabilidad, pero son importantes también, así como en el enfoque, en el área de Geometría.

Aquí se describe y analiza el papel que la Geometría desempeña en el nuevo currículo de matemáticas para la Educación Primaria y Media costarricense.

Palabras clave: educación, matemática, currículum, geometría.

Introducción

Los programas de estudio de Matemáticas para la Educación Primaria y Media vigentes en Costa Rica hasta el año 2012, eran esencialmente los redactados en 1995 con modificaciones posteriores, más que todo de forma; la última de ellas realizada en 2005.

Esos programas cumplieron un ciclo y jugaron un papel positivo, aunque según Ruiz (2013) “no lograron materializar la mayoría de sus propósitos planteados abstractamente y más aún poseían graves debilidades”. (p. 17) .

Hacia finales del año 2010, a solicitud del Ministro de Educación Pública, una comisión especial inició la redacción de nuevos programas de matemáticas. Como resultado, el Consejo

Superior de Educación aprobó, en mayo de 2012, un nuevo programa de estudio de matemáticas. Este es un programa integral propuesto para toda la Enseñanza Primaria y Media costarricense.

El sistema educativo costarricense preuniversitario

La educación preuniversitaria costarricense está a cargo del Ministerio de Educación Pública. Existe además una entidad llamada Consejo Superior de Educación quien define la política educativa y promueve y aprueba cambios en los programas de estudio.

Este sistema educativo cuenta con un nivel de Educación Preescolar y luego cuatro ciclos educativos: I Ciclo, II Ciclo, III Ciclo y Ciclo Diversificado. Los ciclos I, II y III constan de tres años cada uno y conforman lo que se llama Educación General Básica, el Ciclo Diversificado tiene dos años en su modalidad académica y tres años en su modalidad técnica. Los ciclos I y II (6 años en total) constituyen la Enseñanza Primaria y los ciclos III y Diversificado corresponden a la Enseñanza Secundaria. Al final de la Enseñanza Secundaria los estudiantes presentan pruebas nacionales finales para obtener el Bachillerato, que es requisito para ingresar a la educación superior. (MEP, 2013).

Los programas vigentes hasta el año 2012

Los programas de Matemáticas que estuvieron en vigencia en Costa Rica hasta 2012, fueron puestos en operación en el año 2005, aunque se trataba de una reforma a los que habían sido redactados en 1995. Eran en realidad dos programas desarticulados entre sí, uno para la Enseñanza Primaria en dos documentos (MEP, 2005a, 2005b) y otro para la Enseñanza Secundaria, también en dos documentos (MEP, 2005c, 2005d).

Cada uno de estos documentos consta de dos partes: una fundamentación y la malla curricular. La malla curricular está estructurada por años y temas o áreas y consta de cinco columnas: objetivos, contenidos, procedimientos, valores y actitudes, aprendizajes por evaluar. La siguiente tabla ilustra esta estructura.

Tabla 1

Programa de Matemáticas, Costa Rica, 2005. Quinto año, geometría.

Objetivos	Contenidos	Procedimientos	Valores y actitudes	Aprendizajes por evaluar
1- Construir experimentalmente las fórmulas de los diferentes paralelogramos, del trapecio y del triángulo, a partir del área del rectángulo.	Concepto de área de los paralelogramos, trapecio y triángulo. Fórmulas de áreas de paralelogramos, trapecio y triángulo.	Construcción experimental del concepto de área de una figura geométrica, utilizando diferentes estrategias. Descomposición de figuras de paralelogramos, trapecios y triángulos, y composición en rectángulos. Utilización de diferentes estrategias en la elaboración de las fórmulas para el cálculo del área de	Ejercitación de habilidades de observación, análisis y síntesis. Respeto por los puntos de vista de las otras personas. Respeto por el medio ambiente, al utilizar material reciclable.	Construcción de las fórmulas para el cálculo de los diferentes paralelogramos, del trapecio y del triángulo, mediante diferentes estrategias.

Objetivos	Contenidos	Procedimientos	Valores y actitudes	Aprendizajes por evaluar
		paralelogramos, trapecio y triángulo, a partir de la fórmula del área del rectángulo.		
2- Aplicar los conceptos de área y perímetro de triángulos y cuadriláteros, en la resolución de ejercicios y problemas.	Resolución de ejercicios y problemas en los que, para su solución, se requiera del cálculo del área de triángulos y cuadriláteros, excepto el trapecoide.	Identificación de situaciones del entorno en las que se requiere del cálculo del área de triángulos y cuadriláteros. Cálculo de áreas de objetos de su entorno, utilizando fórmulas. Interpretación de enunciados que involucran el cálculo de áreas y perímetros de triángulos y cuadriláteros. Resolución de problemas en los cuales se aplican las fórmulas de área de triángulo y la de cuadriláteros, excepto el trapecoide. Cálculo de áreas de figuras que se pueden descomponer en triángulos, trapecios y paralelogramos.	Compañerismo en los trabajos de aula, al compartir materiales. Perseverancia en la búsqueda de diferentes estrategias y nuevas alternativas para la solución de problemas. Seguridad en sus habilidades.	Aplicación de las fórmulas de área de triángulo y de los cuadriláteros, excepto el trapecoide, en la resolución de ejercicios y problemas.

Fuente: MEP (2005b). *Programa de estudio. Segundo Ciclo. Matemáticas*. Costa Rica: Autor.

Se puede observar repeticiones e inconsistencias en lo expresado en las columnas; esto obedece a un tipo de visión básicamente conductista que lleva a cierta manera de proceder durante las lecciones y la evaluación.

Diversos estudios señalan deficiencias en los programas de 1995 y sus reformas (por ejemplo, Murillo, 2003 y Chaves, 2009). Ruiz (2013) expresa apropiadamente que:

Exhibían una fuerte inconsistencia entre lo enunciado en los fundamentos teóricos (declaración constructivista abstracta) y lo planteado realmente en la malla curricular (un enfoque conductista). El enfoque con que se tratan los programas específicos de estudio, la malla curricular, es el de los “objetivos programados”, a los que de manera individual y aislada se les asigna procedimientos, metodología y evaluación; esto empuja a un tratamiento desconectado entre sus objetivos, distorsiona la evaluación pues ésta se ve tremendamente condicionada (cada objetivo debe tener un ítem de evaluación), y no favorece trabajar el planeamiento y el desarrollo en el aula con base en problemas. Dichos programas no permitían desarrollar un enfoque integrador y constructivo de los contenidos y habilidades deseadas. (p. 17).

Los nuevos programas

El programa anterior presentaba una discontinuidad enorme entre el sexto año (final de la Enseñanza Primaria) y el séptimo año (inicio de la Enseñanza Media), lo que provocaba no pocas dificultades. Los programas aprobados en 2012 fueron concebidos de manera integral. Es decir, se tomó en cuenta el sistema educativo desde primer año hasta undécimo o duodécimo (según la modalidad) como una unidad integrada. Esto implica varias cosas, entre ellas, que la fundamentación de estos nuevos programas rige para todos los ciclos educativos, en contraposición con los anteriores que tenían una fundamentación diferenciada para primaria y para secundaria. También significa que el paso de un ciclo a otro no sea brusco; de hecho, el séptimo año es en parte propedéutico con el objetivo de suavizar el paso de la primaria a la secundaria.

Por otra parte, estos programas establecen la resolución de problemas como estrategia metodológica. Se privilegia la contextualización activa como medio para que el estudiante adquiera los conocimientos y habilidades que establece el programa. Al respecto se establece:

Aquí se adoptan cinco ejes disciplinares que atraviesan de forma transversal el plan de estudios y fortalecen el currículo:

- La resolución de problemas como estrategia metodológica principal.
- La contextualización activa como un componente pedagógico especial.
- El uso inteligente y visionario de tecnologías digitales.
- La potenciación de actitudes y creencias positivas en torno a las Matemáticas.
- El uso de la historia de las Matemáticas.

Los dos primeros ejes se asumen como articuladores, con lo que se quiere decir que no sólo permean todos los programas sino que sirven para vertebrar y articular los otros ejes y las diferentes actividades que supone la implementación del mismo.

La resolución de problemas corresponde a la necesidad de asumir estándares cuya conveniencia para la Educación Matemática ha sido ampliamente comprobada en la escala internacional. La contextualización que se propone busca fortalecer un papel estudiantil activo y comprometido con su aprendizaje, recalando la identificación, uso y diseño de modelos matemáticos adecuados para cada nivel educativo. Se da una asociación entre estos dos ejes que obedece precisamente al enfoque principal de este currículo: la resolución de problemas en contextos reales. Y es consistente con la selección y conceptualización del proceso matemático *Plantear y resolver problemas*. (MEP, 2012, p. 17).

Estos programas contienen dos partes. En la primera se expone la fundamentación teórica y se hacen señalamientos sobre diversos elementos tales como ejes, gestión y planeamiento didáctico, metodología y evaluación. La segunda parte son los planes de estudio. Estos planes están organizados por cinco áreas matemáticas: *Números, Geometría, Medidas, Relaciones y Álgebra y Estadística y Probabilidad*, cada una con diferente peso según años y ciclos. La siguiente figura muestra el peso relativo de las áreas a través del currículum.

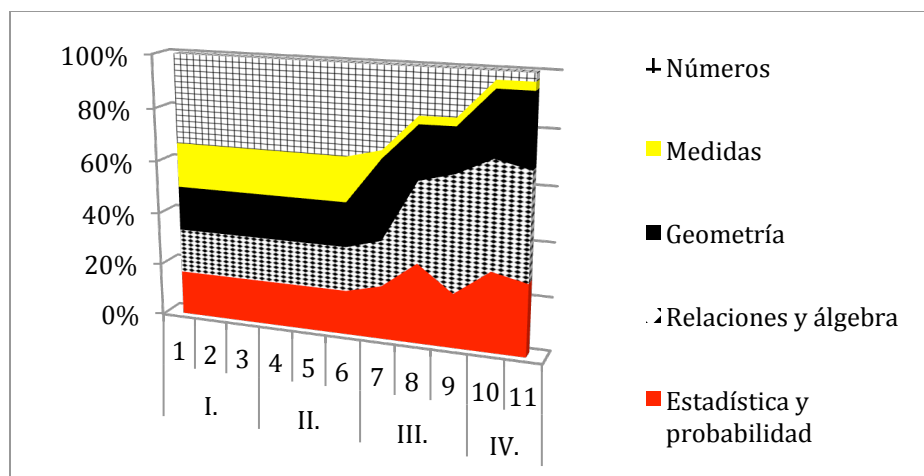


Figura 1. Las cinco áreas matemáticas en los cuatro ciclos educativos (MEP, 2012, p. 49).

Por otra parte, se establece que los conocimientos matemáticos son la base de los programas; sin embargo, se pretende el desarrollo de mayores capacidades las cuales se asumen como centrales. El programa denomina como habilidades específicas aquellas capacidades de corto plazo asociadas a las áreas matemáticas. Las habilidades generales son la generalización de las específicas a lo largo de un ciclo educativo. Finalmente, como una perspectiva general, se considera la competencia matemática. (MEP, 2012)

Los planes de estudios están estructurados en orden jerárquico por ciclos, áreas y años. Para cada ciclo se presenta una introducción al mismo y para cada área se proporciona una introducción, el propósito del área en ese ciclo, una lista de habilidades generales (las que se espera obtener al final del ciclo en esa área), una tabla con tres columnas: conocimientos, habilidades específicas e indicaciones puntuales, organizada por año y, finalmente, una lista de indicaciones metodológicas y de evaluación. Las indicaciones puntuales son de diversa índole y se refieren a cuestiones metodológicas, de enfoque, profundidad, entre otros, con los que se debe tratar los conocimientos y habilidades específicas con las que están relacionadas. Lo anterior se esquematiza en la siguiente tabla.

Tabla 2

Estructura de cada ciclo educativo.

	Estructura	Secciones de cada área
Ciclo educativo	Introducción.	<ul style="list-style-type: none"> • Introducción. • Propósito de la enseñanza. • Habilidades generales. • Conocimientos, habilidades específicas e indicaciones puntuales por año. • Indicaciones metodológicas. • Indicaciones de evaluación.
	<i>Números.</i>	
	<i>Medidas.</i>	
	<i>Geometría.</i>	
	<i>Relaciones y Álgebra.</i>	
	<i>Estadística y Probabilidad.</i>	

Fuente: MEP (2012) Programas de estudio de Matemáticas. Costa Rica: autor.

La siguiente figura muestra la forma en que se presentan los conocimientos, habilidades específicas e indicaciones puntuales e ilustra el significado de estas últimas.

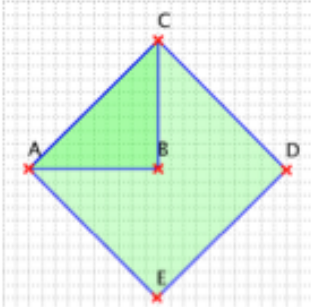
9º Año		
Conocimientos	Habilidades específicas	Indicaciones puntuales
<p>Números reales</p> <ul style="list-style-type: none"> Números irracionales Concepto de número real Representaciones Comparación Relaciones de orden Recta numérica 	<p>1. Identificar números irracionales en diversos contextos.</p>	<p>▲ Para introducir los números racionales se puede comenzar con el siguiente problema.</p> <p>😊 Suponga que en la siguiente figura el segmento BC mide 1 m, ¿cuánto mide el área del cuadrado ACDE?</p>  <p>▲ La discusión llevará de manera natural a concluir que el área es 2 m², viendo que el cuadrado está constituido por cuatro triángulos congruentes de área 0,5 m². Si no se conoce el teorema de Pitágoras, no se sabrá de antemano cuánto es x, la medida del lado del cuadrado, pero debido a que el área es 2 y el lado es x entonces $x^2 = 2$.</p> <p>A continuación se pregunta al grupo qué tipo de número es x y éste deberá concluir que no es un número entero puesto que no hay un entero que multiplicado consigo mismo dé 2.</p> <p>¿Será un racional? Esta posibilidad puede descartarse realizando una demostración, que servirá además para repasar conceptos de teoría de números.</p> <p>Finalmente se concluye que los números como x que no son racionales se llaman irracionales, que x se denota por $\sqrt{2}$. Se indica que π es otro número irracional y que hay muchos otros.</p> <p>📖 Se puede ilustrar, por medio de reseñas históricas, que el surgimiento de este tipo de números aparece en la solución de problemas en los que los números racionales no son suficientes.</p>
	<p>2. Identificar números con expansión decimal infinita no periódica.</p>	<p>▲ Lo que se desea es mostrar números decimales diferentes a los números naturales, enteros y racionales.</p> <p>⚙️ Es importante considerar el reconocimiento de patrones de construcción que generen números decimales con expansión infinita no periódica, por ejemplo: "0,1010010001..." (cada vez agregar un cero más antes de escribir 1)". Esto permite establecer conexiones con el área de Relaciones y Álgebra.</p>

Figura 2. Ilustración del formato de la malla curricular de los programas de estudio de Matemáticas, Costa Rica, 2012.

Consideraciones acerca de la geometría en el currículum preuniversitario

Tradicionalmente el término geometría en el currículum elemental estaba relacionado con el estudio de figuras planas y el de algunos sólidos. Tal estudio se hacía de manera sintética, en el caso del estudio de sólidos básicamente se reducía a fórmulas para calcular sus volúmenes y, en algunos casos, su área superficial.

En la década de los años 60 del siglo XX se introdujo en las escuelas la *Matemática Moderna* y con ella el formalismo a través de la teoría de conjuntos. La enseñanza de la

matemática se vio reducida a un sistema de reglas y símbolos, esto limitó el estudio de la Geometría Elemental en su dimensión de intuición espacial en aras del rigor lógico.

En la década de los años 80 (siglo XX), la situación se revertió. Hubo un retorno hacia contenidos de tipo más tradicionales; sin embargo, el restablecimiento de la geometría euclidiana clásica ha sido difícil. Esta se presenta a los estudiantes como un producto pulido, ya elaborado. Esto no encaja con el supuesto de que los estudiantes participen activamente en el desarrollo de su conocimiento matemático. (ICMI, 2001). En general esto provoca que los conocimientos geométricos que se imparten quedan reducidos a la memorización de resultados y fórmulas.

La situación descrita, que se vivió en muchos países fue también una realidad en Costa Rica. Esto se refleja en los planes de estudio de la Educación General Básica y el Ciclo Diversificado que rigieron incluso hasta el año 2012.

Hacia finales de los años 80 del siglo XX, se presentaron en el mundo nuevas tendencias acerca del papel de la geometría en el currículum escolar. Estas tendencias giran en torno tanto al enfoque con que deben abordarse los conocimientos geométricos en la enseñanza aprendizaje, como en la introducción de contenidos.

Según Camacho y Morales (1994), en el Simposio La enseñanza de la Matemática a debate, celebrado en Madrid en 1984:

Santaló propone una serie de postulados fundamentales que deben presidir los contenidos de Geometría en la Enseñanza Media, con los cuales nos identificamos:

1. La geometría debe ser una ayuda para comprender el mundo exterior.
2. La presentación axiomática de la geometría no es posible en la Enseñanza Media.
3. Hay que educar en la solución de problemas geométricos.
4. El aprendizaje muchas veces no es lineal, sino que opera a saltos.
5. Vincular la Geometría con la Aritmética y el Álgebra
6. No olvidar la Geometría del Espacio.
7. Aprovechar todos los conocimientos de los alumnos. (p. 87)

En Singapur el programa incluye el estudio de conceptos no tradicionales en Geometría tales como simetría axial y teselados (en cuarto grado), representaciones planas de sólidos (sexto grado), homotecias (segundo de secundaria), resolución de problemas utilizando coordenadas (cuarto de secundaria). (Ministerio de Educación de Singapur, 2006a y 2006b).

Van de Walle (2007) enuncia algunas consideraciones relacionadas con la importancia de la geometría en el currículum escolar y proporciona algunas ideas sobre el papel que esta debe jugar. Señala que las semejanzas y diferencias de las figuras pueden determinarse mediante propiedades geométricas; las figuras pueden moverse en el plano y en el espacio y tales movimientos pueden expresarse como traslaciones, rotaciones reflexiones; también, las figuras, pueden describirse en términos de su localización y por lo tanto pueden usarse sistemas de coordenadas; pueden verse desde diferentes perspectivas y esto ayuda a comprender relaciones entre la geometría bidimensional y tridimensional. Estas observaciones tienen implicaciones importantes puesto que deberían plasmarse en el currículum de modo que se desarrolle en los estudiantes el sentido espacial, considerado como una habilidad para visualizar figuras y relaciones entre ellas. Este sentido, en particular, incluye el sentirse cómodo con descripciones

geométricas de objetos y su posición; esto permite, entre otras cosas, apreciar el arte, la naturaleza y la arquitectura y facilita la descripción y análisis de lo que nos rodea.

Los estándares para Geometría que establece el *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM) de los Estados Unidos, para los programas de enseñanza de preescolar al grado 12 son (NCTM, 2000):

- Analizar características y propiedades de las figuras geométricas en dos (y tres) dimensiones y desarrollar argumentos matemáticos acerca de relaciones geométricas.
- Localizar y describir relaciones espaciales utilizando geometría de coordenadas y otros sistemas de representación.
- Aplicar transformaciones y utilizar simetrías para analizar situaciones matemáticas.
- Utilizar visualización, razonamiento espacial y modelación geométrica para resolver problemas.

En cuanto al primero de estos estándares, se establece que los niños están inclinados de modo natural a observar y describir figuras, en principio es importante la identificación de figuras. Posteriormente se pueden enfocar en propiedades y atributos de las figuras. En grados superiores los estudiantes podrán observar y discutir acerca de los componentes de las figuras. En la enseñanza media, los estudiantes aprenderán a utilizar el razonamiento deductivo a elaborar conjeturas y verificarlas.

Sobre el estándar relacionado con la localización y descripción de relaciones espaciales, se espera se espera que en los primeros niveles aprendan conceptos relacionados con la posición, luego pueden utilizar cuadrículas para localizar objetos. En la secundaria, el plano coordenado puede ser útil para descubrir y analizar propiedades de las figuras.

En lo que concierne al tercer estándar, los niños pueden explorar movimientos tales como deslizamientos, giros y reflexiones (mediante espejos). Posteriormente podrán investigar los efectos de las transformaciones y comenzar a describirlas matemáticamente. En los últimos niveles los estudiantes aprenderán múltiples maneras de expresar las transformaciones.

Para el último estándar, al comienzo, los niños desarrollarán habilidades de visualización mediante experiencias con objetos. Luego podrán analizar figuras, descomponerlas y ensamblarlas y describir atributos que no pueden ser vistos pero que pueden ser inferidos. Un aspecto de la visualización involucra movimientos entre figuras de dos y tres dimensiones y sus representaciones. En los últimos niveles los estudiantes podrán visualizar y trazar secciones planas en sólidos geométricos.

De los párrafos anteriores se deduce que lo que se propone es que la geometría en el currículum escolar no debe ser ya una colección de definiciones y teoremas sino más bien debe servir como una herramienta útil para interpretar nuestro entorno.

La geometría en el currículo costarricense hasta el 2012

Aunque en diversas partes del mundo ya se estaba proponiendo otro enfoque y otros contenidos para geometría en la escuela primaria y secundaria, en Costa Rica siguió prevaleciendo la manera más tradicional, tanto en el programa de 1995 como en sus sucesivas revisiones, incluida la última de 1985.

En esta versión, para la enseñanza primaria, se enuncia que:

Se debe tomar en cuenta que el estudio de este tema se divide en dos áreas principales: La primera, se vincula con el análisis de la forma, y la segunda, se relaciona con el estudio de la medición.

Se aborda el análisis de la forma y de sus características, teniendo en cuenta que si el niño y la niña inician el reconocimiento de líneas y planos, y entran en contacto con ellos de manera más objetiva, irá entendiendo sus propiedades. Esto le permitirá integrar explicaciones y reflexiones que refuercen y complementen su conocimiento matemático.

Una actividad importante para el desarrollo del pensamiento del niño y la niña es la clasificación, la cual se pone en juego al observar e identificar las propiedades que tienen los objetos.

Al iniciar el trabajo con figuras geométricas, el educando reconstruye en gran parte el proceso evolutivo de la historia de la matemática, desde un proceso de visualización de objetos, hasta la construcción y reconstrucción de conceptos. (MEP, 2005a, p. 71)

Luego agrega que:

En el primer y segundo ciclos de Educación General Básica el estudio de las figuras geométricas que se propone resulta muy apropiado para ayudar a la formación del conocimiento matemático del alumno. El proceso de abstracción que se realiza a través de observar los elementos que se encuentran en su entorno (objetos) y relacionarlos con modelos (figuras), le facilitarán la aprehensión de las propiedades y características que poseen dichas figuras. (MEP, 2005a, p. 72).

Lo que no dice el programa es mediante qué procesos o metodología logrará el estudiante pasar de la observación de las figuras a la aprehensión de sus propiedades y características. Esto tampoco queda claro al observar la malla curricular (tal como se ilustra en la tabla 1, arriba) en la que se puede observar un modelo puramente conductista que no ayuda al estudiante en la adquisición de conocimientos y, mucho menos, en establecer conexiones apropiadas.

Por otra parte, no hay variación en los contenidos. Se sigue lo clásico (MEP, 2005a, 2005b):

- Diferencias y semejanzas de los cuerpos geométricos; estudio de líneas y segmentos (rectas, curvas, quebradas, mixtas, cerradas, abiertas, horizontales, verticales, inclinadas) en I, II y III año.
- Reconocimiento de las figuras básicas, estudio de sus características y aplicación en ejercicios y problemas; cálculo de perímetros y áreas, en II y III año.
- Ángulos (medición y clasificación) en III año.
- Polígonos (reconocimiento, cálculo de perímetros) en III y IV año.
- Estudio del triángulo (elementos: lado, ángulo, altura, etc., clasificación según sus ángulos y sus lados); estudio de cuadriláteros (elementos y clasificación); perímetros y áreas en IV y V año.
- Circunferencia (elementos, longitud, área); área y perímetro de polígonos; identificación de características básicas de los cuerpos geométricos en VI año.

Se observa la ausencia total de las coordenadas, las transformaciones, la simetría. Por otra parte, el estudio de sólidos aparece solamente en el I año a nivel de observación y en VI año mediante la identificación de sus características básicas. Se trata, en este último caso, de

describir oralmente, identificar, comparar y clasificar objetos con formas de pirámide, prisma, cono y cilindro.

Para el III ciclo de la EGB y el Ciclo Diversificado, este programa establece que

En los temas de Geometría se debe combinar la intuición, la experimentación y la lógica. Se usarán las construcciones para que, a partir de ellas, se caractericen las figuras y se formulen deducciones lógicas, sin que eso signifique que se hará una presentación axiomática-deductiva - rigurosa. Los aspectos experimentales o intuitivos de la geometría, requieren del uso de material concreto, con características de operatoriedad y flexibilidad para que, a través del análisis y la síntesis de situaciones, el joven logre construir conocimiento abstracto.

...

Las construcciones geométricas no deben verse como un fin en sí mismas, sino que su papel primordial consiste en facilitarle al estudiante la caracterización de las figuras y la identificación de sus propiedades. (MEP, 2005c, p. 51).

El tono del discurso es muy general y vago y no ayuda al docente a entender qué es lo que se propone como estrategia metodológica. Esto tampoco se evidencia en la malla curricular.

Los contenidos de geometría para la enseñanza media eran (MEP, 2005c, 2005d):

- En VII año: puntos, rectas, segmentos (colinealidad, coplanaridad, perpendicularidad, paralelismo, concurrencia); ángulos (medida, clasificación, determinados por una transversal a dos paralelas); triángulos (teoremas sobre las medidas de los ángulos, desigualdad triangular, rectas notables); cuadriláteros (suma de las medidas de sus ángulos, características y propiedades).
- En VIII: simetría axial, congruencia, semejanza, teorema de Thales.
- En IX año: Teorema de Pitágoras y sus derivados, fórmula de Herón, conceptos básicos de trigonometría.
- En X año: no hay geometría.
- En XI año: círculo y circunferencia (diversos elementos, cuerdas, relaciones métricas entre diversos ángulos, áreas y perímetros de anillos, coronas, sectores circulares); polígonos regulares inscritos y circunscritos (diversas relaciones); fórmulas para calcular áreas y volúmenes de prismas, cilindros, pirámide, cono y esfera.

Sigue ausente aquí las coordenadas y transformaciones aunque se incluye la simetría axial. Los cuerpos sólidos se incluyen al final y solo se refiere al cálculo de áreas y volúmenes. Los temas son tratados de manera sintética como se ha hecho tradicionalmente.

La geometría en los nuevos programas

Con los nuevos programas, el papel de la geometría en el currículum sufre un gran cambio, tanto en el enfoque como en sus contenidos. Estos cambios obedecieron a una modernización del currículum en esa área y, más importante, a una visión del papel de la geometría más acorde con lo que los mismos programas proponen como supuestos del papel de la matemática en el currículum escolar. Al respecto, los programas enuncian:

Se considera la Geometría como organizadora de los fenómenos del espacio y la forma, y en particular se ven los objetos geométricos como patrones o modelos de muchos fenómenos de

lo real. Es decir, no se privilegia una aproximación a la Geometría basada en el estudio de objetos ideales y abstractos, sino más bien una que asuma la relación geométrica con los entornos espaciales. Esto busca fortalecer una mayor visualización en la Geometría: establecer contactos estrechos entre representaciones visuales y las formas geométricas. Se apela de esta forma a la construcción de los aprendizajes geométricos en fases crecientes que van desde lo intuitivo, manipulable, pictórico y visual hacia las representaciones más generales y abstractas. Se refuerza la necesidad de ascender por medio de distintos niveles en los aprendizajes geométricos. (MEP, 2012, p. 52).

De este modo, se pretende una mayor presencia del “sentido espacial”, entendido este como la identificación, visualización y manipulación de las formas en el espacio. Por otra parte, se introduce la geometría de coordenadas y analítica de manera gradual, adecuada a los distintos niveles cognitivos. Además, se estudia la simetría axial y se introducen transformaciones en el plano (traslaciones y rotaciones). La introducción de estos tópicos permite establecer conexiones entre la Geometría y el Álgebra. Aunque estas ideas están presentes a lo largo de la malla curricular en todos los ciclos, dadas las diferencias de los estudiantes en cada nivel educativo, el programa enfatiza algunos de los aspectos en los diversos ciclo. En la siguiente tabla se proporcionan las líneas generales de cada ciclo así como algunas indicaciones metodológicas que se sugieren.

Tabla 3

Lineamientos generales y asuntos metodológicos para el área de Geometría, por ciclo.

Ciclo	Lineamientos
I	<ul style="list-style-type: none"> • Desarrollar la visualización (ubicar y reconocer figuras geométricas en el entorno). • Manipular y describir figuras geométricas (especialmente triángulo, rectángulo, círculo, cajas, cubos, esfera). • Trazado de esas figuras a mano alzada o con ayuda de instrumentos. • Reproducción de figuras (con patrones, calcando, con papel cuadriculado, etc.) • Describir relaciones entre figuras geométricas. • El movimiento se puede introducir por medio de croquis sencillos que consignent inicio y final de un recorrido, y cambio en la posición de objetos. • Desarrollar un vocabulario geométrico elemental.
II	<ul style="list-style-type: none"> • Se profundiza en ubicación espacial y visualización del formas geométricas en el plano y en el espacio. • Se amplía la identificación y el estudio de propiedades de los elementos que componen las figuras. • Dar relieve a las propiedades y relaciones que identifican las figuras (número de lados, relaciones de posición, métrica, etc.). • Aumentar el vocabulario geométrico. • Calculo de perímetros y áreas (figuras poligonales y circulares). • Introducción de simetrías, giros y traslaciones. • Conectar con el área de <i>Medidas</i> (perímetros, áreas) • Conexión especial con <i>Relaciones y Álgebra</i> en el manejo de puntos y figuras sencillas en el plano.
III	<ul style="list-style-type: none"> • Se busca un enfoque más formal de los conceptos y propiedades aprendidas intuitivamente en la Primaria. • Se sigue con el tratamiento del sentido espacial, mediante la visualización y

	<p>aplicación de características y propiedades de figuras geométricas tridimensionales.</p> <ul style="list-style-type: none"> • El tema de semejanzas y congruencias se introduce a partir de homotecias. • Se introduce el estudio básico de la trigonometría con problemas en contextos reales. • Se profundiza la conexión entre <i>Geometría y Relaciones y Álgebra</i>.
Diversificado	<ul style="list-style-type: none"> • Estudio y representación de figuras geométricas en el plano mediante coordenadas. • Se promoverá el desarrollo de habilidades relacionadas estrechamente con el sentido espacial (visualización, ubicación y movimiento). • Se estudian transformaciones en el plano.

Fuente: MEP (2012) Programas de estudio de Matemáticas. Costa Rica: autor.

Uno de los aspectos que enfatiza el programa en general, y que se evidencia de manera especial en el área de *Geometría*, es el uso de las tecnologías digitales como herramienta útil en el proceso de enseñanza aprendizaje. Al respecto se menciona:

El tratamiento del movimiento en Geometría había sido difícil de incorporar en los programas escolares por las limitaciones para el trazado y su presentación gráfica. Con las tecnologías digitales esto cambió radicalmente. La presencia de software diverso de geometría dinámica y de representación geométrica desde hace bastantes años permite aproximarse a los fenómenos geométricos incluyendo esta propiedad esencial. Pero es más que eso: la tecnología permite replantear la lógica del plan de estudios y de muchos de sus contenidos en la Geometría y en otras áreas. Este sentido dinámico se puede introducir en congruencias, semejanzas y simetría lineal o rotacional de objetos que se transforman, lo que permite conexiones estrechas con el pensamiento funcional. Un tratamiento con coordenadas que se apoya en el uso de tecnologías permite oportunidades muy ricas para la representación múltiple de sus objetos geométricos, una de las características importantes de las Matemáticas. (MEP, 2012, p. 52).

Todos los lineamientos mencionados, tanto generales como específicos de cada ciclo, se plasman, de manera apropiada, en la malla curricular. Las habilidades específicas que enuncian el programa están relacionadas de manera coherente con lo que se propone en la fundamentación teórica, los ejes y planteamientos metodológicos.

El programa mantiene buena parte de los temas clásicos que se estudian en la geometría escolar, pero muchos de ellos se estudian bajo un enfoque diferente, dirigido a desarrollar la competencia matemática. También se reconoce que la geometría sintética sigue siendo clave en cuanto a la generación de capacidades de razonamiento y prueba; esto se puede observar en la malla curricular.

Por otra parte, toma en consideración, en buena medida, las nuevas tendencias sobre el papel de la Geometría en el currículum escolar. Esto se puede ver explícitamente en las diversas habilidades que se proponen para los ciclos educativos. A continuación se reseñan habilidades relacionadas con esta tendencias que aparecen en el programa, dejamos de lado aquellos temas clásicos que en el programa son tratados de manera sintética.

Ubicación y visualización espacial, geometría del espacio

Las habilidades específicas relacionadas con ubicación y visualización espacial y en general, geometría del espacio, están presentes en todos los años, desde el I al XI. A continuación se hace referencia, de manera resumida a las habilidades relacionadas con esto en cada uno de los años (MEP, 2012).

En I año: Distinguir el interior, el exterior y el borde referidos a líneas cerradas tanto en el entorno como en dibujos y trazos elaborados por el estudiante o por otras personas. Identificar figuras planas en cuerpos sólidos; esto se refiere a identificar, por ejemplo, un rectángulo como una cara de una caja, etc. Identificar objetos con forma de “caja” (paralelepípedo recto de base rectangular).

II año: Identificar en dibujos y en el entorno posiciones de líneas rectas: horizontal, vertical, oblicua (metodología: observar objetos en objetos de tres dimensiones como cajas y visualizar las posiciones). Componer y descomponer figuras utilizando cuadriláteros y triángulos. Identificar objetos que tengan forma de caja o forma esférica. Clasificar objetos según su forma; a este nivel solo cajas, esferas, otros (los que no son ni cajas ni esferas).

III año: Visualizar el paralelismo y la perpendicularidad entre rectas y segmentos en dibujos y objetos del entorno. Ubicar personas u objetos a partir de un punto de referencia. Reconocer el radio y diámetro de esferas. Reconocer cuáles cajas corresponden a cubos. Reconocer los elementos de cajas y cubos (caras y aristas). Reconocer diferencias y semejanzas entre cajas y cubos. Plantear problemas con base en imágenes de cuerpos sólidos.

IV año: Reconocer en dibujos u objetos del entorno polígonos regulares e irregulares. Identificar cubos y prismas rectangulares en objetos del entorno. Identificar segmentos paralelos y perpendiculares en conexión con prismas rectangulares. Identificar planos en conexión con las caras de los prismas rectangulares. Aplicar el concepto de paralelismo y perpendicularidad de planos en conexión con prismas rectangulares. Identificar diversos cuadriláteros en conexión con cubos y prismas en general.

V año: Reconocer figuras simples dentro de una más compleja. Reconocer prismas y algunos de sus elementos y propiedades (caras, bases, altura). Reconocer cilindros y algunos de sus elementos y propiedades (bases, superficie lateral, eje, altura, radio y diámetro de la base).

VI año: Clasificar cuerpos sólidos por su forma. Calcular el volumen de los cuerpos sólidos simples: cubo, prisma, cilindro, cono, pirámide y esfera.

VII año: Reconocer en figuras tridimensionales diversos elementos como caras, aristas, vértices. Establecer relaciones entre los diversos elementos de figuras tridimensionales: vértices, caras y aristas, rectas y segmentos paralelos o perpendiculares, planos paralelos y perpendiculares. Utilizar software de geometría dinámica para la visualización y la verificación de propiedades geométricas.

VIII año: Identificar diversos elementos de pirámides y prismas recto. Determinar qué figuras se obtienen mediante secciones planas de una pirámide recta de base cuadrada, rectangular o triangular. Determinar qué figuras se obtienen mediante secciones planas de un prisma recto de base cuadrada, rectangular o triangular.

IX año: Identificar y calcular la apotema de pirámides rectas cuya base sea un cuadrado o un triángulo equilátero. Calcular el área lateral y el área total de una pirámide recta de base cuadrada, rectangular o triangular. Calcular el área lateral y el área total de un prisma recto de base cuadrada, rectangular o triangular.

X año: Identificar el radio y el diámetro de una esfera. Identificar la superficie lateral, las bases, la altura, el radio y el diámetro de un cilindro circular recto. Determinar qué figuras se obtienen mediante secciones planas de una esfera o un cilindro y características métricas de ellas. Reconocer elipses en diferentes contextos.

XI año: Identificar la superficie lateral, la base, la altura, el radio y el diámetro de la base y el vértice de un cono circular recto. Determinar qué figuras se obtienen mediante secciones planas de un cono circular recto y características métricas de ellas. Reconocer elipses, parábolas e hipérbolas en diferentes contextos. Plantear y resolver problemas que involucren secciones de un cono mediante planos paralelos a la base.

Geometría analítica, coordenadas

Se da un papel destacado al uso de coordenadas. Se enuncian habilidades específicas directamente relacionadas con esta temática en varios de los niveles educativos. Por otra parte, en el área de *Relaciones y Álgebra* también se consideran coordenadas extensivamente. Los años y habilidades específicas que explícitamente se refieren a geometría analítica o uso de coordenadas en el área de Geometría se resumen a continuación (MEP, 2012).

V año: Representar puntos y figuras utilizando coordenadas en el primer cuadrante.

VII año: Representar puntos y figuras geométricas en un plano con un sistema de ejes cartesianos. Determinar algebraicamente el punto medio de un segmento. Ubicar puntos en el interior y en el exterior de figuras cerradas en un plano con un sistema de ejes cartesianos.

VIII año: Trazar en un plano cartesiano la figura que se obtiene al someter un polígono dado a una *homotecia*. Reconocer pares de figuras homotéticas en el plano de coordenadas.

IX año: Encontrar la distancia entre dos puntos en el plano cartesiano, aplicando el teorema de Pitágoras.

X año: Representar algebraicamente una circunferencia dado su centro y su radio. Resolver problemas relacionados con la circunferencia y sus representaciones. Determinar gráfica y algebraicamente si un punto se ubica en el interior o en el exterior de una circunferencia. Determinar si una recta dada es secante, tangente o exterior a una circunferencia. Representar gráfica y algebraicamente rectas secantes, tangentes y exteriores a una circunferencia. Analizar geométrica y algebraicamente la posición relativa entre rectas en el plano desde el punto de vista del paralelismo y la perpendicularidad. Estimar perímetros y áreas de figuras planas no poligonales utilizando un sistema de coordenadas rectangulares.

XI año: Trazar figuras simétricas utilizando un sistema de ejes coordenados en el plano. Trazar en un plano cartesiano la figura que se obtiene al someter una figura a una traslación, rotación u homotecia o combinaciones de ellas. Determinar el punto imagen de puntos dados mediante una transformación.

Simetrías, transformaciones en el plano

La simetría y transformaciones en el plano aparecen en varios de los niveles educativos de manera explícita. Este es un tema en el que metodológicamente se solicita que se conecte con el uso de coordenadas y, también, con la visualización y ubicación. Los años y habilidades que se proponen se resumen en lo que sigue (MEP, 2012).

IV año: Identificar los ejes de simetría de una figura. Ubicar un punto homólogo a otro respecto a una recta. Trazar una figura simétrica a otra respecto a una recta. Estimar la distancia de un punto al eje de simetría.

V año: Reconocer figuras que se obtienen mediante traslación de otras.

VI año: Reconocer, reproducir y trazar figuras simétricas. Plantear problemas referidos a la simetría de figuras y a su reproducción.

VIII año: Reconocer puntos, ángulos y lados homólogos de un polígono y el polígono que resulta al aplicar una homotecia. Construir una figura semejante a una figura dada sometiéndola a una homotecia de razón menor o mayor que 1. Construir una figura congruente a una figura dada sometiéndola a una homotecia de razón igual a 1. La idea con estas dos últimas habilidades es que se introduzca el estudio de la semejanza y la congruencia mediante las homotecias.

X año: Aplicar traslaciones a una circunferencia.

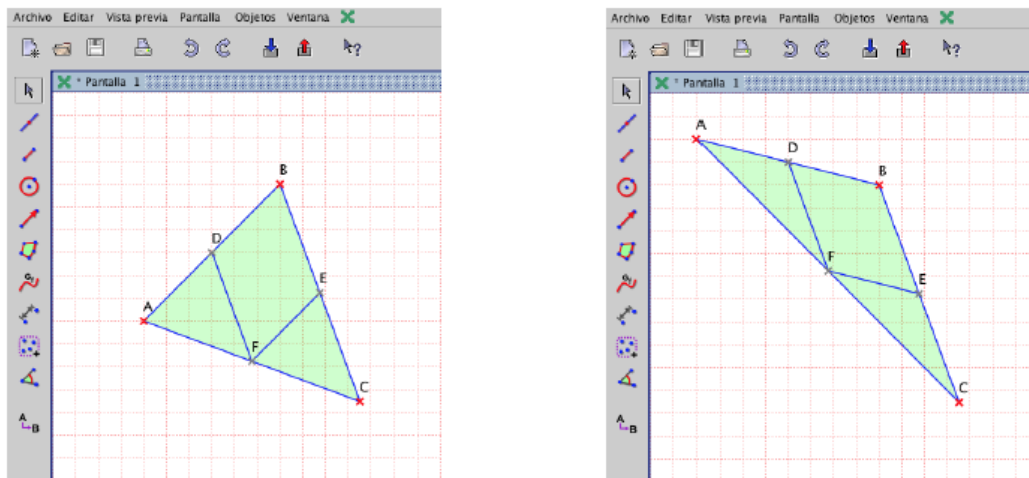
XI año: Determinar ejes de simetría y elementos homólogos en figuras simétricas. Resolver problemas relacionados con la simetría axial. Aplicar los concepto de traslación, homotecia, reflexión y rotación. Identificar elementos de las figuras geométricas que aparecen invariantes bajo reflexiones o rotaciones. Trazar la imagen de una figura dada cuando se somete a una reflexión, rotación, homotecia o traslación. Resolver problemas relacionados con diversas transformaciones en el plano. Utilizar software de geometría dinámica para el análisis de las propiedades de las traslaciones, homotecias, reflexiones y rotaciones. Plantear ejercicios o problemas que involucren alguna transformación o transformaciones de figuras en el plano.

Indicaciones puntuales y metodológicas

Uno de los componentes importante de los programas son las indicaciones puntuales que aparecen como una columna en la malla curricular (vea la figura 2). Otro son las indicaciones metodológicas y de evaluación que se proporcionan por área y ciclo. Estos componentes junto con la lista de contenidos y la indicaciones puntuales forman un todo interrelacionado que deberá permitir que el programa se ejecute de manera apropiada. En estas indicaciones se establece la manera de relacionar los diferentes temas, la forma en que se puede desarrollar las habilidades propuestas, el tipo de problemas que se puede utilizar para la adquisición de los conocimientos y habilidades. En el caso de Geometría, las indicaciones mencionadas son muy importantes para que el docente comprenda qué es lo que se pretende en relación con los nuevos temas y con el nuevo tratamiento de algunos de los temas clásicos. Por otra parte, el programa promueve el uso de las tecnología digitales, algunas de habilidades específicas se refieren a eso; pero es en las indicaciones donde mejor se evidencia el papel que se le da a dicha herramienta en el aprendizaje de la geometría.

Por ejemplo, entre las indicaciones metodológicas para el tercer ciclo aparece la siguiente:

El uso de software de geometría dinámica es muy valioso. Se sabe que al dibujar cualquier figura geométrica en la pizarra, ésta es estática. A través de este recurso se puede trazar cualquier figura y cambiarla con sólo “arrastrar” o mover uno de los elementos que la componen. Esto permite que la visualización sea enriquecedora y que se trabajen procesos como la generalización y la modelización. Las figuras siguientes fueron generadas por un software, se dibujó un triángulo arbitrario y se marcaron los puntos medios de los lados, luego se trazaron los dos segmentos interiores que ahí se observan. Arrastrando los vértices se obtiene la figura de la derecha o cualquier otra. Observando parece que los dos triángulos ADF y FEC son congruentes; esta es una conjetura que pueden hacer las y los estudiantes para luego demostrarla. (MEP, 2012, pp. 319-320).



Este ejemplo ilustra el sentido de las indicaciones metodológicas y, en este caso, el tipo de uso de la herramienta tecnológica que propone el programa.

Conclusión

La enseñanza de la geometría ha estado presente tradicionalmente en los currículos escolares, en mayor o menor medida. Hasta mediados del siglo XX ocupó un papel importante y su estudio estuvo centrado en la geometría euclidiana mediante un enfoque sintético; se hace referencia a la formas y propiedades de las figuras en dos o tres dimensiones, estas son rígidas (no cambian de forma y tamaño), por otra parte se asocia también a la medida a través de la longitud, área y volumen. Con el advenimiento de la *Matemática Moderna*, en la década de los años 60 del siglo XX, la Geometría perdió preponderancia en el currículum escolar. Tras el fracaso de esta visión de la Matemática en la escuela, hacia finales de los 80 del siglo XX, se propone nuevamente un lugar importante para la Geometría. Este lugar no solamente se refería a volver a implementar contenidos de geometría sino a darles otro enfoque y a incluir otros contenidos.

Estos vaivenes se reflejaron en los programas escolares costarricenses; sin embargo, el enfoque sintético de la geometría euclidiana siguió prevaleciendo hasta la aprobación de nuevos programas de estudio en el año 2012.

Estos nuevos programas dan a la Geometría un papel muy importante y, por otra parte, incorporan, en buena medida, las ideas novedosas en cuanto al papel de la geometría en el currículum de la Educación General Básica y el Ciclo Diversificado. Promueven la resolución de problemas como estrategia didáctica, en el área de geometría esto es importante porque permite al estudiante experimentar, conjeturar, comunicar sus ideas y utilizar lenguaje geométrico adecuado a su nivel. Fomentan el sentido de ubicación y el sentido espacial a través de problemas y actividades que desarrollan habilidades específicas relacionadas con esto. Introduce el uso de coordenadas como una manera alternativa de explorar propiedades de las figuras geométricas, así como visualizar relaciones y determinar áreas de figuras complejas. También introduce el estudio de la simetrías y las transformaciones en el plano, lo cual proporciona un sentido dinámico a la geometría. Finalmente, este sentido dinámico, así como la exploración de propiedades, relaciones geométricas y medidas, se potencia con el uso de software apropiado; el uso inteligente y visionario de las tecnologías digitales es, precisamente, uno de los cinco ejes curriculares que propone el programa.

El síntesis, en estos nuevos programas de estudio costarricenses, la geometría ocupa un lugar preponderante, se la dota de nuevos contenidos además de algunos de los contenidos clásicos y se actualiza su enfoque en aras de un aprendizaje más motivador y útil para los estudiantes.

Referencias y bibliografía

- Camacho, M. y Morales, A. (1994). Algunas características del curriculum de geometría en la enseñanza secundaria obligatoria. Sugerencias didácticas. *Revista Interuniversitaria de Formación del Profesorado*, 21, 83-94. Recuperado de dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/117839.pdf
- Chaves, E. (2009). Análisis de los fundamentos teóricos y metodológicos de los programas de estudio de matemáticas. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 5, 29-67.
- ICMI (2001). *Perspectives en l'Ensenyament de la Geometria pel segle XXI. Documento de discusión para un estudio ICMI PMME-UNISON*. Recuperado de <http://www.euclides.org/menu/articles/article2.htm>
- Ministerio de Educación Pública de Costa Rica. (2005a). *Programa de estudio de Matemática, I ciclo*. San José: autor.
- Ministerio de Educación Pública de Costa Rica. (2005b). *Programa de estudio de Matemática, II ciclo*. San José: autor.
- Ministerio de Educación Pública de Costa Rica. (2005c). *Programa de estudio de Matemática, III ciclo*. San José: autor.
- Ministerio de Educación Pública de Costa Rica. (2005d). *Programa de estudio de Matemática, Ciclo Diversificado*. San José: autor.
- Ministerio de Educación Pública de Costa Rica. (2012). *Programas de estudio de Matemáticas*. San José: autor.
- Ministerio de Educación Pública de Costa Rica (2013). Sitio web oficial. <http://www.mep.go.cr/CSE/informacion.aspx>
- Ministerio de Educación de Singapur (2006a). *Secondary Mathematics Syllabuses*. Singapur: Autor.
- Ministerio de Educación de Singapur (2006b). *Mathematics Syllabus Primary*. Singapur: Autor.
- Murillo, M. (2003). Los programas de Matemática en la enseñanza secundaria: lo que los profesores opinan. *Revista Uniciencia*, 20 (1), 19-26.
- NCTM (2003). *Principios y estándares para la Educación Matemática*. Granada: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.
- Ruiz, A. (2013). La reforma de la Educación Matemática en Costa Rica. Perspectiva de la praxis. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, número especial, 7-111.
- Van de Walle, J. (2007). *Elementary and Middle School Mathematics*. Boston: Pearson.