

ANÁLISIS LINGÜÍSTICO DE ERRORES EN LA SOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE GEOMETRÍA EUCLIDEANA

Marisol Radillo Enríquez

Departamento de Matemáticas, CUCEI, Universidad de Guadalajara
marisol.radillo@red.cucei.udg.mx

México

Resumen. El estudio de los errores en la enseñanza de las matemáticas ha cobrado auge en las últimas décadas, aunque el aspecto lingüístico ha sido relegado. El objetivo de este trabajo consiste en identificar y clasificar los errores relacionados con el uso del lenguaje matemático en la solución de problemas de Geometría Euclídeana. En la primera parte se presenta una reflexión en torno a la importancia didáctica de los errores, lo cual se relaciona con el problema de investigación que se comenta en la segunda parte del artículo. Posteriormente se reporta el análisis de las soluciones a un problema de demostración. Los resultados consisten en una clasificación lingüística de los errores encontrados y su relación con términos del lenguaje matemático; se considera que la complejidad lingüística de algunos de los términos matemáticos representa una dificultad para su traducción al lenguaje matemático y, por ende, tienen repercusiones negativas en la solución del problema.

Palabras clave: análisis de errores, lingüística, geometría, solución de problemas

Abstract. The study of errors in the teaching of mathematics has been increased in recent decades, although the linguistic factor has been relegated. The objective of this study is to identify and classify the errors related to the use of mathematical language in the solution of problems of Euclidean Geometry. The first part presents a reflection on the teaching importance of errors, which is related to the problem of research, discussed in the second part of the article. Then, the analysis of solutions to a problem of demonstration is reported. The results consist of a linguistic classification of errors and its relationship to mathematical language; some terms founded whose linguistic complexity represents a difficulty for its translation into the mathematical language and, therefore, they have a negative impact on the solution of the problem.

Key words: error analysis, linguistics, geometry, problem solving

Introducción

El interés sobre la naturaleza y las consecuencias de los errores que se presentan en el aprendizaje de las matemáticas no es reciente, pues los primeros antecedentes se remontan a principios del siglo XX, durante el auge de la Psicología Experimental (Rico, 1995). En esa época el conductismo predominaba en la enseñanza y el error era considerado como una falla o equivocación, lo cual era inaceptable en el proceso de aprendizaje de los alumnos; por lo tanto los esfuerzos didácticos se orientaron a evitar su aparición en el proceso educativo.

Sin embargo, la revisión histórica del desarrollo del conocimiento científico se encuentra plena de conocimientos que inicialmente fueron rechazados por ser considerados falsos o erróneos, ya que contradecían las teorías establecidas (Kuhn, 2004; Kline, 1985). Al paso del tiempo y a la luz de los nuevos descubrimientos, algunas de las antiguas teorías científicas son ahora catalogadas como errores, mientras que otras han sido ampliadas. Ante esta evidencia se puede concluir que el error es una realidad y una posibilidad permanente en el desarrollo del

conocimiento científico, el cual a su vez es presentado de manera sistematizada en el aprendizaje escolar.

En consideración al desarrollo del conocimiento científico, para los teóricos constructivistas del aprendizaje, los errores no son solo equivocaciones, como se consideraba desde los inicios de la pedagogía empírica, sino “oportunidades de aprendizaje”; los errores no necesariamente revelan un error o deficiencia en el aprendizaje, pues existen evidencias de situaciones en las cuales se aplican conocimientos correctos pero inadecuados para la situación por resolver (Brousseau, 2001; Astolfi, 2003). Bajo esta premisa se recomienda a los profesores diseñar situaciones que partan de los errores detectados para propiciar nuevo aprendizaje, en lugar de tratar de erradicarlos y surgió el interés por la investigación científica de errores.

Las publicaciones especializadas las áreas de la Didáctica y de la Matemática Educativa relacionadas con el análisis de errores, no cuentan con algún trabajo que se centre en el lenguaje matemático (Astolfi, 2003; Brousseau, 2001; Franchi y Hernández, 2004). Si bien las tipologías de errores de Radatz y de Movshovitz (Franchi y Hernández, 2004) incluyen una categoría destinada a “errores relacionados con el lenguaje”, ésta es insuficiente para determinar la influencia que el deficiente conocimiento del lenguaje matemático de los estudiantes ejerce sobre su aprendizaje matemático.

El presente trabajo es un reporte parcial de una investigación cualitativa y no experimental, cuyo objetivo consistió en identificar cuáles son los errores relacionados con el dominio del lenguaje matemático que enfrentan los estudiantes de Geometría Euclidea del Centro Universitario de Ciencias Exactas e Ingenierías (CUCEI) de la Universidad de Guadalajara, México, y cuál es su influencia en la solución de problemas de esta disciplina matemática. Los instrumentos de recolección de datos fueron cuestionarios que incluyeron problemas típicos de la materia, dejando de lado las interacciones de los estudiantes con el profesor y el método didáctico utilizado.

Problematización

El interés de la investigación se centra en los errores relacionados con el uso del lenguaje matemático, ya que el desconocimiento de sus normas por constituye una fuente de dificultades en la solución de problemas, independientemente de los conocimientos y capacidad de razonamiento deductivo del estudiante en cualquier rama de las matemáticas.

Desde la Lingüística, es posible establecer que el lenguaje matemático está conformado por diversos conjuntos de normas o códigos que rigen las diversas formas de representación utilizadas: (a) *Verbal*. Descripción de un objeto o enunciado matemático expresado solo en

palabras, ya sea de manera oral o escrita; (b) *Simbólica*. Descripción de uno o más objetos matemáticos, sus propiedades y/o relaciones, expresada únicamente con la notación matemática tradicional (SIM); (c) *Gráfica*. Imagen de uno o más conceptos matemáticos y las relaciones entre ellos. Suele incluir letras que asignan nombres específicos a los componentes de la figura (GRAF). El pasaje de una forma de representación a otra se denomina proceso de traducción.

Como punto de partida para el análisis de los errores, es necesario separar aquellos relacionados con el lenguaje matemático de aquellos propios de la naturaleza de la disciplina. Se parte del supuesto de que los errores en la solución de problemas de la Geometría Euclidea se clasifican en tres grandes categorías, no excluyentes entre sí: (a) De representación de objetos y enunciados matemáticos, (b) Deductivos, en cuanto a la secuencia de razonamientos necesaria para resolver el problema, y (c) Axiomáticos o de aplicación de la teoría (definiciones, propiedades, axiomas, teoremas, lemas, corolarios, construcciones) en el procedimiento de solución. Cada tipo de error puede tener consecuencias en los otros dos y uno de los propósitos del proyecto consiste en averiguar tales consecuencias.

Posteriormente se centra la atención en los errores de representación para establecer una tipología más detallada sobre aquellas fallas relacionadas con deficiencias en el uso del lenguaje matemático, así como sus repercusiones en el razonamiento deductivo y/o la aplicación de teoría en la resolución del problema (Radillo, 2009). Aunque en la investigación se incluyeron diversos tipos de problemas, por razones de espacio, en este reporte solo se muestran a detalle respuestas a problemas de demostración, por parte de los estudiantes del primer semestre en la universidad.

SopORTE teórico-metodológico

En la Geometría Euclidea, la solución de un problema expresado en palabras requiere su traducción a enunciados simbólicos y/o a la construcción de una figura o esquema que represente los objetos matemáticos involucrados, así como las relaciones entre ellos. Por ejemplo, el planteamiento de una demostración requiere un proceso de traducción de la representación verbal a sus correspondientes representaciones gráfica y simbólica (traducción entre códigos).

En la etapa de comprensión y planteamiento del problema los estudiantes se enfrentan a múltiples dificultades debidas a la polisemia de los términos utilizados, ya que la formulación matemática está permeada por el lenguaje cotidiano. Por ejemplo, el estudiante debe saber que algunas palabras utilizadas en el lenguaje matemático tienen significado diferente en el ámbito cotidiano, pues de lo contrario se puede distorsionar la interpretación del problema, e incluso

en la construcción de un significado matemático (Rojano, 1994; Pimm, 1999; Ardila, 2002; Alcalá, 2002; Palencia y Talavera, 2004; Pochulu, 2004; Del Puerto, Minnaard y Seminara, 2006). Algunas de estas palabras o términos son: lado, grado, recto, mediana, relación, diferencia, potencia, radical, total, producto, media.

Las diferencias no se limitan al significado, sino que se aplican a las reglas gramaticales que rigen la formación de enunciados matemáticos, ya que dichas normas se vinculan con la teoría Matemática. Desde la Lingüística Aplicada, el lenguaje utilizado en la formulación de problemas no es el español cotidiano, sino un Español Especializado de la Geometría Euclidea (EE) (Arntz y Picht, 1995).

Aunque el lenguaje matemático se considera de carácter universal, algunas reglas varían según el autor o fuente bibliográfica consultada. Por ejemplo, en las normas institucionales del CUCEI se establece que la expresión $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ es un “enunciado bien construido”, pero no es correcto escribir $\overline{AB} = \overline{CD}$ ya que se considera que los segmentos son congruentes mientras que sus medidas son iguales. Sin embargo esta segunda expresión es considerada correcta en otros ámbitos, pues la norma para representar segmentos o longitudes es diferente en cada comunidad académica. Por tal motivo, para propósitos del análisis lingüístico, se define el error de manera operativa, como una trasgresión a las normas establecidas para el uso del lenguaje matemático, en este caso de la Academia de Geometría Euclidea del CUCEI.

El soporte teórico fue construido desde la Lingüística, la Lógica Teórica y la Axiomática como disciplinas normativas, por lo que la metodología se centra en una descripción sobria de las diferencias demostrables entre el tipo de texto que se requiere en la resolución de cada problema y las respuestas redactadas por los estudiantes, consideradas éstas como registros lingüísticos y objetivos de su actividad cognitiva al resolver el problema.

Desde esta perspectiva se establecieron los siguientes constructos teóricos para llevar a cabo el análisis lingüístico de las respuestas de los estudiantes:

- ❖ Códigos de las 3 formas de representación, a partir de las partes de la Lingüística aplicables al lenguaje matemático: sintaxis, léxico y morfología y de acuerdo a las normas institucionales del CUCEI (Radillo, 2012).
- ❖ Procesos de traducción o Funciones de mapeo entre códigos.
- ❖ Tipo de texto que requiere la solución de cada tipo de problema: de demostración, construcción a regla y compás, de solución numérica.

Una vez explicitadas las normas lingüísticas, se procedió a diseñar los instrumentos de recolección de datos, que consistieron en cuestionarios integrados tanto por problemas típicos de la materia como por planteamientos de traducción entre pares de códigos de la Geometría (Radillo, 2011). El procedimiento de clasificación de las respuestas a cada problema consiste en analizar las respuestas de los estudiantes y determinar si se quebrantaba alguna regla determinada, ya fuera de representación, deductiva o axiomática, con lo cual se determina una clasificación preliminar de los errores detectados. Posteriormente se centró la atención solamente en los errores de representación, mediante el análisis lingüístico que permitió obtener una clasificación más detallada de los mismos.

Análisis de resultados

Unos de los problemas planteados a los alumnos consiste en demostrar el un: “*Si del vértice del ángulo recto de un triángulo rectángulo se traza una perpendicular a la hipotenusa, la perpendicular es media proporcional entre los dos segmentos de la hipotenusa*”. El problema fue incluido en un cuestionario que contenía más preguntas a 37 alumnos de ingenierías que cursaban Geometría Euclídea con un mismo profesor, durante el segundo mes de clases.

Al analizar las respuestas se encontró que la principal dificultad para resolver este problema fue la traducción del teorema de la representación verbal a la simbólica ($EE \rightarrow SIM$), pues 31 de los 37 estudiantes plantearon la tesis de manera incorrecta o la dejaron en blanco a pesar de haber trazado la figura y/o planteado hipótesis. El término “media proporcional” involucra la noción de “proporción continua”, es decir aquella proporción cuyos términos medios son iguales, por lo que podría considerarse que es un término complejo desde el punto de vista lingüístico; aún así las respuestas equivocadas de los estudiantes están tan alejadas de una proporción, que es posible clasificarlas como errores axiomáticos o de aplicación de teoría.

Sólo un estudiante logró demostrar el teorema, 19 personas no hicieron la demostración y de las 17 cuya respuesta es incorrecta 13 de ellos plantearon la tesis erróneamente. La traducción entre los códigos verbal y gráfico ($EE \rightarrow GRAF$), es decir el dibujo de la figura correspondiente, representó menor dificultad para los estudiantes ya que 22 de ellos hicieron la figura correcta, 4 el caso particular de un triángulo isósceles y 11 personas hicieron una figura equivocada o incompleta.

En la figura 1 se muestran dos formas correctas de representar la tesis y, si bien la figura pareciera un triángulo isósceles, las marcas de los ángulos agudos son diferentes, por lo que se percibe que el estudiante no consideró el caso particular; dado que hizo anotaciones al margen que establecen que el triángulo ABC queda dividido en dos triángulos semejantes, no congruentes, se puede afirmar que no hay errores de aplicación de teoría, pues el estudiante

tiene los conocimientos necesarios para demostrar la tesis. Lamentablemente, este estudiante no logró demostrar la tesis, y esto se consideró un error deductivo puro.

En la figura 2 se aprecian varios tipos de error, ya que la hipótesis y la tesis no corresponden al enunciado condicional del teorema (error de traducción $EE \rightarrow SIM$) y la figura muestra un triángulo isósceles (error de insuficiencia de generalización) lo cual repercute en un error deductivo, al plantear en la hipótesis la igualdad de los ángulos agudos. Si el triángulo rectángulo también es isósceles, la altura correspondiente a la hipotenusa divide al triángulo en otros dos triángulos congruentes entre sí, información que el estudiante dio por cierta, al grado de que la estableció como tesis (error deductivo) y la “demostró” con un teorema de semejanza (error axiomático).

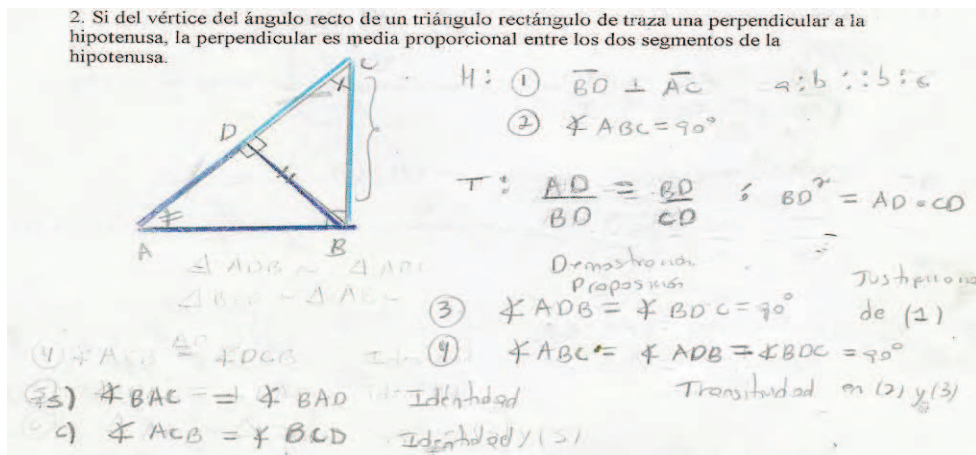


Figura 1. Dos formas correctas de simbolizar la tesis del teorema de la media proporcional; error de deductivo. Alumno 10.

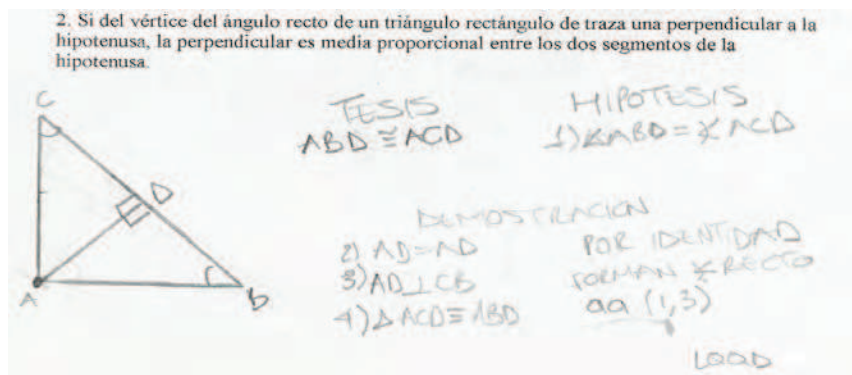


Figura 2. Tesis e hipótesis incorrectas y error de insuficiencia de generalización de la figura, que repercuten en errores deductivos. Alumno 23.

Si el planteamiento de las hipótesis y tesis es incorrecto (traducción $EE \rightarrow SIM + GRAF$), entonces no es posible demostrar el teorema dado. Tal es el caso mostrado en la figuras 3.

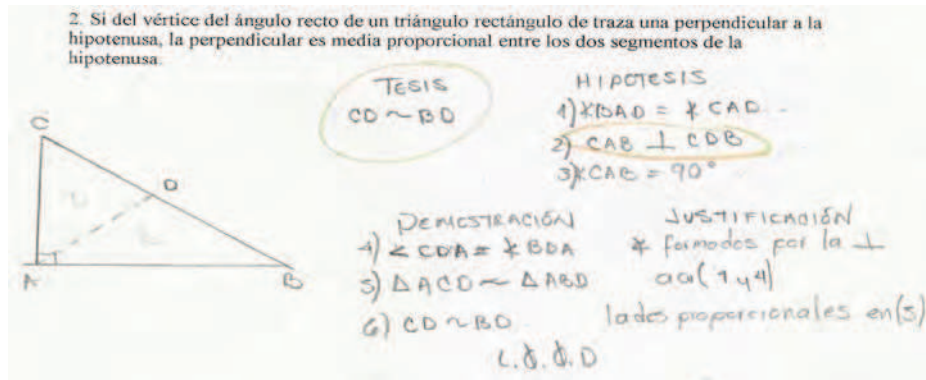


Figura 3. Tesis incorrecta y una hipótesis falsa. Error de representación que ocasiona errores deductivos y axiomáticos. Alumno 34

Conclusiones

Los errores de representación más frecuentes encontrados se relacionan con la sintaxis de la notación algebraica, principalmente en el uso adecuado de los diacríticos que diferencian figuras tales como recta, rayo y segmento, en el pasaje de traducción de la representación verbal de un enunciado a la notación simbólica. En cuanto los procesos de traducción del enunciado verbal a sus correspondientes representaciones gráfica y simbólica, las principales dificultades se relacionan con términos del español especializado de la Geometría Euclidea que involucran términos complejos, como es el caso de la media proporcional en el ejemplo que se reporta.

Un error en la representación gráfica que tiene consecuencias en el resto de la solución del problema es el de la insuficiencia de generalización de una figura y/o las condiciones expresadas en el enunciado del problema, es decir, el trazar solamente un caso particular, $EE \rightarrow GRAF$. En este caso, al dibujar un triángulo isósceles, los estudiantes atribuyen al teorema propiedades particulares (error deductivo y axiomático) y la demostración no es correcta, pues no corresponde a las condiciones generales dadas.

Respecto al código verbal, se detectaron algunos términos complejos del español especializado involucrados en los errores más frecuentes de traducción intercódigos cometidos por los estudiantes, ya que se requiere de varias expresiones en la notación simbólica para describirlos adecuadamente, pues condensan en un sólo término información que en el código simbólico se expresa más ampliamente, y constituyen obstáculos en la traducción entre los códigos del lenguaje matemático. Tal es el caso del término “media proporcional” que se ilustra en este documento.

Se espera que con este reporte se precisen algunos elementos metodológicos básicos para que los profesores de geometría puedan llevar a cabo un análisis lingüístico de las producciones

escritas de los estudiantes de matemáticas, pues los resultados constituyen una potente herramienta para mejorar, tanto el diseño instruccional del curso, como los procesos de evaluación del aprendizaje. Con esta investigación se ha abierto ante todo la posibilidad de utilizar instrumentos de análisis que hasta ahora no habían sido explotados en la Matemática Educativa. Si he logrado al menos intrigar al lector y despertar su curiosidad sobre el gran potencial de estas nuevas herramientas, esta investigación habrá cumplido con creces su principal objetivo.

Referencias bibliográficas

- Alcalá, M. (2002). *La construcción del lenguaje matemático*. Barcelona: Grao.
- Ardila, A. (2002). El lenguaje matemático y el usual, como mediador de la comunicación, en C. Crespo Crespo (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática 15*, 1169-1173. México: Grupo Editorial Iberoamericana
- Arntz, R., y Picht, H. (1995). *Introducción a la terminología*. España: Ediciones Pirámide
- Astolfi, J. P. (2003). *El "error", un medio para enseñar*. 2ª Edición. Sevilla: Diada Editora.
- Brousseau, G. (2001). Les erreurs des élèves en mathématiques. Études dans le cadre de la Théorie des Situations Didactiques. *Petit x*, 57 (1), 5-29
- Del Puerto, S. M., Minnaard, C. L., y Seminara, S. A. (2006). *Análisis de los errores: una valiosa fuente de información acerca del aprendizaje de las matemáticas*. Consultado el 1 de abril de 2007 en <http://www.rieoei.org/deloslectores/1285Puerto.pdf>
- Kuhn, T. (2004). *La estructura de las revoluciones científicas*. México: Fondo de Cultura Económica.
- Franchi, L., Hernández de R, A. I. (2004). Tipología de errores en el área de geometría plana. *Educere, Investigación Arbitrada*, 8 (24), 63-71.
- Kline, M. (1985). *Matemáticas: La pérdida de la certidumbre*. México: Siglo XXI
- Palencia, A., y Talavera, R. (2004). Estrategias innovadoras para la comprensión del lenguaje matemático. *Revista Ciencias de la Educación*, 23 (1), 7-60
- Pimm, D. (1999). *El lenguaje matemático en el aula*. 2ª Edición. Madrid: Morata.
- Pochulu, M. D. (2004). Análisis y categorización de errores en el aprendizaje de la matemática en alumnos que ingresan en la universidad. *Revista Iberoamericana de Educación*, 35 (4), 1-14

- Radillo, M. (2009). *Obstáculos relacionados con las deficiencias en la traducción entre códigos en la solución de problemas de la Geometría Euclidea en el nivel de licenciatura*. Tesis de doctorado no publicada, Universidad de Guadalajara, México.
- Radillo, M. (2012). Los Códigos del lenguaje matemático en la geometría euclidea, en R. Flores (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 25*, 162-170. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.
- Rico, L. (1995). Errores y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas. En J. Kilpatrick, J., Gómez, P., y Rico, L. (Eds.), *Educación matemática* (pp. 69-108). México: Grupo Editorial Iberoamérica.
- Rojano, T. (1994). La matemática escolar como lenguaje. Nuevas perspectivas de investigación y enseñanza. *Enseñanza de las Ciencias*, 12 (1), 45-66