Trayectorias Hipotéticas de Aprendizaje en la Formación Inicial de Profesores de Matemáticas de Secundaria[1]

Pedro Gómez - Universidad de Granada

José Luis Lupiáñez - Universidad de Granada

La noción de trayectoria hipotética de aprendizaje ha despertado recientemente interés en la literatura de investigación en educación matemática. Sin embargo, el papel que esta noción puede jugar en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria no es claro. En este capítulo, revisamos las diferentes interpretaciones de esta noción y proponemos una adaptación de la misma con la que el futuro profesor de matemáticas de secundaria puede recoger y organizar información para el diseño de unidades didácticas.

Trayectorias Hipotéticas de Aprendizaje

En 1995, Martin Simon introdujo la noción de *trayectoria hipotética de aprendizaje* como parte de su modelo del ciclo de enseñanza de las matemáticas (Simon, 1995). Este modelo, como el título de su artículo indica, era su propuesta para "reconstruir la pedagogía de las matemáticas desde una perspectiva constructivista" y abordaba una de las paradojas que se introdujeron con el movimiento de la reforma de las matemáticas: la tensión entre una visión constructivista del aprendizaje que requiere que la instrucción tenga en cuenta y se adapte a las actuaciones de los escolares, y una idea tradicional de la planificación de esa instrucción que se basa en la búsqueda de unos objetivos predeterminados y en el diseño de unas tareas para lograrlos. La Figura 1 presenta los principales elementos del ciclo de enseñanza de las matemáticas, incluyendo aquellos que componen la trayectoria hipotética de aprendizaje.

[1] Este trabajo ha recibido el apoyo del Proyecto BSO2002-02799 del Ministerio de Ciencia y Tecnología.

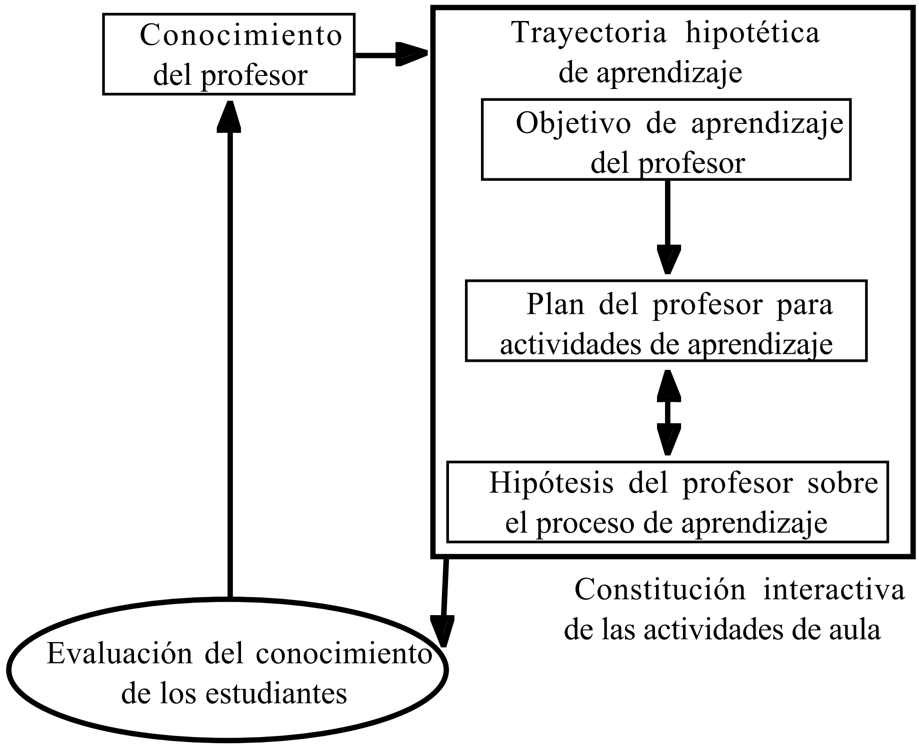

Figura 1. Ciclo de la enseñanza de las matemáticas abreviado (Simon, 1995, p. 136)

Simon y Tzur (2004, p. 93) identifican las principales características de la noción de trayectoria hipotética de aprendizaje de la siguiente manera:

> Una trayectoria hipotética de aprendizaje (THA) consiste en los objetivos para el aprendizaje de los estudiantes, las tareas matemáticas que se usarán para promover el aprendizaje de los estudiantes, y las hipótesis acerca del proceso de aprendizaje de los estudiantes (Simon, 1995). Mientras que el objetivo del profesor para el aprendizaje de los estudiantes proporciona una dirección para las otras componentes, la selección de las tareas de aprendizaje y las hipótesis acerca del proceso de aprendizaje de los estudiantes son interdependientes. Las tareas se seleccionan con base en hipótesis acerca del proceso de aprendizaje; las hipótesis sobre el proceso de aprendizaje se basan en las tareas propuestas. Este constructo se fundamenta en los siguientes supuestos:
>
> 1. La construcción de una trayectoria hipotética de aprendizaje se basa en la comprensión del conocimiento actual de los estudiantes que recibirán la instrucción.
>
> 2. Una trayectoria hipotética de aprendizaje es el vehículo para planificar el aprendizaje de unos conceptos matemáticos concretos.

> 3. Las tareas matemáticas proporcionan las herramientas para promover el aprendizaje de unos conceptos matemáticos concretos y, por lo tanto, son un elemento clave del proceso de instrucción.
>
> 4. Dada la naturaleza hipotética e inherentemente incierta de este proceso, el profesor se verá obligado a modificar sistemáticamente cada aspecto de la trayectoria hipotética de aprendizaje.

El interés por este constructo se ha reconocido recientemente con la aparición de un número de *Mathematics Thinking and Learning* dedicado a su discusión (Clements & Sarama, 2004). Steffe (2004) resalta la relevancia de esta noción dentro de la educación matemática de la siguiente manera (p. 130):

> La construcción de trayectorias de aprendizaje de los niños es uno de los desafíos más urgentes a los que se enfrenta actualmente la educación matemática. Es también uno de los problemas más apasionantes porque es allí donde podemos construir nuestra comprensión de las matemáticas de los niños y cómo nosotros, como profesores, podemos influir en esas matemáticas.

No obstante, y aunque los diversos investigadores reconocen los tres elementos centrales de la trayectoria hipotética de aprendizaje (objetivos de aprendizaje, tareas matemáticas e hipótesis sobre el proceso de aprendizaje), y aceptan los cuatro supuestos mencionados arriba, cada quien interpreta y usa la noción con propósitos y de maneras diferentes.

Se perciben dos usos claramente diferenciados: como herramienta de investigación y como herramienta para la planificación. Los trabajos de Steffe (2004), Lesh y Yoon (2004) y Clements, Wilson y Sarama (2004) son trabajos esencialmente de investigación en los que se explora la trayectoria hipotética de aprendizaje para temas concretos. Por otro lado, los trabajos de Gravemeijer (2004) y Simon y Tzur (2004), aunque exploran también trayectorias hipotéticas de aprendizaje, se preocupan con mayor énfasis por su uso en la planificación del profesor. Finalmente, el trabajo de Battista (2004) se centra en la evaluación. En todos los trabajos, se desarrollan ejemplos de trayectorias hipotéticas de aprendizaje en temas concretos. Para ello, los investigadores asumen el papel de profesores en aulas concretas. Aunque hay profesores que participan en algunos de los proyectos, ellos no son quienes producen los resultados de las exploraciones. De hecho, algunos de estos trabajos, como el de Steffe (2004) y el de Gravemeijer (2004), ven la construcción de trayectorias hipotéticas de aprendizaje como un trabajo *del* investigador, cuyos resultados pueden *apoyar* el trabajo del profesor.

Una de las principales diferencias en la interpretación de la noción entre estos investigadores tiene que ver con el nivel de concreción con el que la usan: desde la planificación de varias sesiones de clase, hasta el trabajo con actividades específicas en una parte de una sesión de clase. Por ejemplo, Gravemeijer

(2004) indica que su propuesta de *teorías locales de instrucción* es "la descripción y fundamentación para la ruta de aprendizaje prevista en su relación con una colección de actividades de instrucción para un tema" (p. 107). Steffe (2004) y Lesh y Yoon (2004) también utilizan la noción para describir el aprendizaje de los escolares a lo largo de varias sesiones en las que se trabaja en un tema. Por su parte, Simon y Tzur (2004) ven la trayectoria hipotética de aprendizaje como una herramienta para la planificación de actividades de instrucción en el día a día de un aula. Finalmente, Baroody, Cibulskis, Lai y Li (2004) sugieren que la noción de trayectoria hipotética de aprendizaje se puede utilizar para promover el "desarrollo micro-conceptual" (p. 234), siendo ésta la actividad central de la instrucción en el aula.

¿Qué relación hay entre la actividad diaria del profesor y la noción de trayectoria hipotética de aprendizaje? En este punto encontramos ciertas discordancias en las propuestas de algunos de los investigadores a los que hemos hecho referencia. Por un lado, una de las características centrales de la noción tiene que ver con su carácter reflexivo: "hay una relación reflexiva en la que la trayectoria hipotética de aprendizaje es el trasfondo de los juicios y decisiones locales que, a su vez, modifican la trayectoria hipotética de aprendizaje" (Gravemeijer, Cobb, Bowers & Whitenack, 2000, pp. 249-250). Simon y Tzur (2004, p. 93), en el cuarto supuesto que indicamos más arriba, enfatizan también el papel del profesor en la construcción y revisión permanente de la trayectoria hipotética de aprendizaje. Pero, ¿cómo hacer compatible el propósito de que sea el profesor quien construya y revise la trayectoria hipotética de aprendizaje con el hecho de que la totalidad de los ejemplos que se tienen de trayectorias hipotéticas de aprendizaje han sido desarrollados por investigadores que han asumido el papel de profesores? De hecho, propuestas como las de Steffe (2004) y Lesh y Yoon (2004) son tan complejas y técnicas que resultan poco prácticas para los profesores. Por otro lado, las propuestas de Simon y Tzur (2004) y Gravemeijer (2004) tienen un carácter esencialmente preceptivo. Finalmente, Baroody, Cibulskis, Lai y Li (2004, p. 233) nos recuerdan que la validez ecológica se logra a costa de la falta de universalidad: si se comprueba que una trayectoria hipotética de aprendizaje es válida en una circunstancia particular (en un contexto y con unos estudiantes y un profesor concretos), esto no quiere decir que esa trayectoria hipotética de aprendizaje tenga sentido en otras circunstancias.

Gravemeijer 2004 (Gravemeijer, 2004, p. 107) aborda estas cuestiones y reconoce la dificultad que tendrían los profesores para construir trayectorias hipotéticas de aprendizaje como las que producen los investigadores. Pero, esto no quiere decir que lo único que se les pueda entregar sean secuencias de instrucción listas para usar. Él sugiere dos elementos que pueden ser útiles para los profesores:

- un marco de referencia y

- secuencias de actividades que les sirvan de ejemplo.

Pero, ¿qué puede hacer un profesor con esta información? ¿Cómo puede él usarla para producir y revisar sistemáticamente su propia trayectoria hipotética de aprendizaje para un tema, un contexto y unos escolares concretos?

Formación Inicial de Profesores de Matemáticas de Secundaria

Si, como argumenta Steffe (2004), "deben ser los profesores, al participar directamente en las actividades de construcción de los niños, quienes deben producir sus trayectorias hipotéticas de aprendizaje" (p. 115), ¿qué capacidades[2] debe tener el profesor para ser capaz de hacerlo? ¿Qué se puede hacer en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria para desarrollar esas capacidades?

La formación inicial debe ser la ocasión en la que los futuros profesores comiencen a desarrollar las competencias para construir trayectorias hipotéticas de aprendizaje que les permitan diseñar y llevar a la práctica actividades de aprendizaje. Sin embargo, los futuros profesores que participan en este tipo de programas no tienen experiencia docente y, en general, no tienen acceso a la práctica en aulas de matemáticas. Por consiguiente, ellos no pueden "participar directamente en las actividades de construcción de los niños". En lo que sigue, sugerimos una adaptación de la noción de trayectoria hipotética de aprendizaje que tiene en cuenta estas restricciones.

Análisis Cognitivo

Nosotros participamos en programas de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria que buscan desarrollar en los futuros profesores capacidades para diseñar unidades didácticas sobre temas matemáticos concretos[3]. Por ejemplo, ellos trabajan en temas como la esfera, el teorema de Pitágoras o la función cuadrática. En el diseño de estas unidades didácticas, esperamos que los futuros profesores pongan en juego un procedimiento, que denominamos *análisis didáctico* (Gómez, 2002, pp. 262-285). El análisis didáctico es un procedimiento cíclico que describe cómo el profesor debería idealmente diseñar, llevar a la práctica y evaluar actividades de enseñanza y aprendizaje. Está compuesto por el análisis de contenido, el análisis cognitivo, el análisis de instrucción y el análisis de actuación. El análisis de contenido es el procedimiento en virtud del cual el profesor identifica, organiza y selecciona los

---

[2] La noción de capacidad a sidoobjeto de estudio y análisis en la literatura de investigación en educación, psicología, y filosofía. Las definiciones y caracterizaciones de esta noción son por tanto numerosas, y en ocasiones algunas de ellas son incluso contradictorias entre sí. No entraremos aquí en esclarecer todos esos significados, sino que describiremos más adelante la posición que nosotros asumimos con respecto a esas interpretaciones posibles, y caracterizaremos lo que entendemos por "capacidad" en el contexto de nuestra investigación.

[3] Ésta es una de las competencias que diversos colectivos consideran que debe tener el profesor de matemáticas (ver, por ejemplo, Beck, Hart & Kosnik, 2002; Recio, 2004; Rico, 2004).

significados de un concepto matemático que considera relevantes para efectos de la planificación de la instrucción. En el análisis cognitivo, esperamos que ellos describan “sus hipótesis acerca de cómo los estudiantes pueden progresar en la construcción de su conocimiento sobre la estructura matemática cuando se enfrenten a las tareas que compondrán las actividades de enseñanza y aprendizaje” (p. 271). Siguiendo las ideas que describimos en el apartado anterior, y teniendo en cuenta las condiciones en las que se realiza la formación inicial, pensamos que esta descripción del progreso de los escolares debe fundamentarse en la identificación, descripción y relación de cinco elementos:

1. las capacidades que los escolares tienen antes de la instrucción[4];
2. las capacidades que se espera que los escolares desarrollen con motivo de la instrucción;
3. las tareas que conforman la instrucción;
4. las dificultades que los escolares pueden encontrar al abordar estas tareas;
5. las hipótesis sobre los caminos por los que se puede desarrollar el aprendizaje.

Partimos, por tanto, de la noción de *capacidad*[5]. En el contexto de las matemáticas escolares, utilizamos este término para referirnos a la actuación de un estudiante con respecto a cierto tipo tarea (por ejemplo, los problemas de transformar una forma simbólica de la función cuadrática —la estándar— en otra —la canónica). Esta noción de capacidad es coherente con las posiciones de Dorsch (1985), que la describe como el conjunto de condiciones necesarias para llevar a cabo una actividad concreta, y con las de Grant (1996) y Schulze (1994), que relacionan capacidad con los conocimientos, experiencias y habilidades necesarias para desarrollar una tarea o actividad.

Afirmaremos que un individuo ha desarrollado una cierta capacidad cuando él puede resolver tareas que la requieren. Por lo tanto las capacidades:

- son específicas a un tema concreto;
- pueden incluir o involucrar otras capacidades; y
- están vinculadas a tipos de tareas.

[4] Aunque Simon no incluye este elemento en la propuesta original de la trayectoria hipotética de aprendizaje, sí enfatiza su importancia en su elaboración posterior (Simon & Tzur, 2004, p. 93).

[5] La noción de capacidad que esbozamos aquí surge de dos fuentes. Por un lado, de la teoría de la actividad y sus elaboraciones posteriores. En dicha teoría, la *actividad* es la unidad básica de análisis y tiene tres niveles: actividad, acción y operación. Las actividades consisten en *acciones* o cadenas de acciones que, a su vez consisten en *operaciones*. La actividad se orienta por la materialización de una necesidad en un *motivo*. El objetivo de una acción es una representación mental consciente del *resultado* que se pretende obtener y tiene como propósito orientar la acción. Las operaciones son los modos en los que se pueden ejecutar las acciones. La actividad la realiza un *sujeto* y la relación entre el sujeto y el objeto (motivo) de la actividad está mediada por *herramientas* que pueden ser materiales o del pensamiento (Kutti, 1996).

Por ejemplo, diremos que un escolar ha desarrollado la capacidad de manejo del significado gráfico de los parámetros de las formas simbólicas de la función cuadrática cuando haya evidencia de que él puede resolver tareas que implican ese aspecto. La noción de capacidad es un elemento que relaciona los aspectos cognitivos (un individuo desarrolla una capacidad), de contenido (es específica a un tema concreto) y de instrucción (se refiere a tipos de tareas o problemas) (Ver Figura 2).

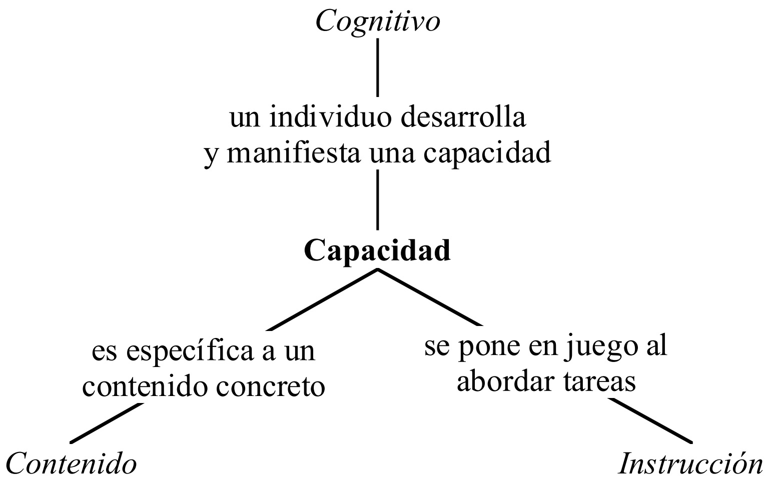

Figura 2. Relaciones de la noción de capacidad

Los primeros dos puntos del procedimiento que estamos sugiriendo requieren que el futuro profesor organice información sobre: 1) lo que los escolares son capaces de hacer antes de la instrucción y 2) lo que se espera que ellos sean capaces de hacer después de la instrucción. Lupiáñez, Rico, Gómez y Marín (2005) han desarrollado un procedimiento para organizar esta información, basado en la noción de *competencia*[6]. Esta noción permite establecer un vínculo entre la planificación a nivel local (de unas actividades específicas en un tema concreto) y el diseño curricular global (de una asignatura). Lupiáñez et al. (2005) han seleccionado siete competencias:

1. pensamiento y razonamiento,
2. justificación,
3. comunicación,
4. estructura conceptual,
5. representación,

[6] Ellos utilizan la noción de competencia siguiendo las ideas propuestas en el Proyecto *PISA* (OCDE, 2004). Pero, como lo ha indicado Rico (En Prensa), el término "competencia" se usa con diferentes significados en este reporte. Rico ha identificado y caracterizado cuatro significados diferentes. Aquí nos referimos a dos de esos significados (p. 14): como conjunto de procesos (segundo significado) que deben ponerse en práctica al resolver problemas matemáticos, por medio de cuya realización se muestra la competencia general (la alfabetización matemática, primer significado).

6. fenomenología y
7. modelización.

El procedimiento en cuestión permite establecer la medida en la que unas capacidades dadas contribuyen al logro de las siete competencias (ver el ejemplo que presentamos más adelante en la Tabla 1). Esto se logra organizando las capacidades en las filas de una tabla e identificando a qué competencias contribuyen (columnas de la tabla). Por lo tanto, este procedimiento permite organizar la información sobre el desarrollo matemático de los escolares con respecto a un tema específico antes y después de la instrucción. Pero, ¿cómo identificar estas capacidades y cómo establecer los caminos por los que se puede desarrollar el aprendizaje?

Análisis de Contenido y Capacidades

Supongamos que el profesor ha decidido que desea trabajar en una cuestión que, por su experiencia o como consecuencia de la información que surge del análisis de contenido, es importante dentro del tema de la función cuadrática. Se trata de desarrollar las capacidades necesarias para que los escolares puedan resolver problemas que involucran el significado gráfico de los parámetros de las formas simbólicas de la función cuadrática[7]. Supongamos, además, que la mayoría de los alumnos son capaces de resolver algunas tareas relacionadas con el reconocimiento y la caracterización de esta función. Por ejemplo, pueden identificar los diferentes elementos de las representaciones simbólicas y gráficas, evaluar una función, producir representaciones gráficas de funciones cuadráticas específicas y dar ejemplos de funciones cuadráticas con diferentes tipos de raíces, entre otras cosas. Sin embargo, la experiencia del profesor en cursos anteriores (que podría ser corroborada en la literatura) le ha mostrado que los escolares tienen dificultades para establecer la relación entre las diferentes representaciones simbólicas y la representación gráfica de la función. Esto quiere decir, por ejemplo, ser capaz de reconocer y de utilizar hechos como que el parámetro a representa la dilatación de la gráfica, que los parámetros h y k en la expresión $f(x)=(x-h)^2+k$ identifican las coordenadas del vértice, o que los parámetros r_1 y r_2 en la expresión $f(x)=a(x-r_1)(x-r_2)$ identifican los cortes de la gráfica con el eje x (ver Figura 2). En otras palabras, el interés del profesor se centra en lograr que los alumnos sean capaces de resolver problemas que involucran el significado gráfico de los parámetros.

[7] Este ejemplo se encuentra desarrollado en mayor detalle en (Gómez, 2005).

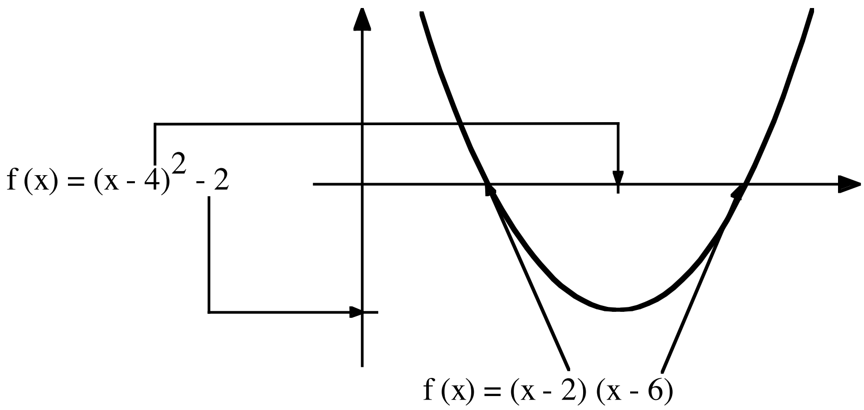

Figura 2. Relación entre elementos simbólicos y gráficos

El problema consiste entonces en encontrar formas de contribuir a que los alumnos puedan superar estas dificultades. La función cuadrática es una estructura matemática compleja y este tema es tan sólo una faceta de esa complejidad. Aunque el problema es *cognitivo* (el desarrollo de unas ciertas capacidades y la superación de unas ciertas dificultades), comprender y abordar ese problema cognitivo requiere que se conozca con suficiente detalle la complejidad y multiplicidad de los significados del concepto función cuadrática. Dicho problema cognitivo tendrá significado, desde la perspectiva del diseño de actividades de enseñanza y aprendizaje, cuando se haya producido una descripción suficientemente detallada del concepto al que se refiere. Para ello, es necesario realizar un *análisis de contenido* de dicho concepto[8].

No pretendemos en este capítulo presentar un análisis de contenido detallado de la función cuadrática. En la Figura 3 presentamos un mapa conceptual en el que se identifican y relacionan las principales categorías en las que se puede organizar la multiplicidad de significados de este concepto. En ella se aprecia la identificación de cuatro sistemas de representación y del aspecto fenomenológico. Es posible desarrollar en detalle cada una de las representaciones, estableciendo sus elementos (conceptos) y las relaciones entre ellos (procedimientos). Por ejemplo, se podrían desarrollar en detalle cada una de las formas simbólicas y establecer los procedimientos que las relacionan (i.e., completación de cuadrados para pasar de la forma simbólica estándar $f(x) = ax^2 + bx + c$ a la forma canónica $f(x) = a(x-h)^2 + k$, ver Figura 5).

[8] El análisis de contenido es uno de los cuatro análisis del *análisis didáctico*. El análisis didáctico es un procedimiento cíclico que describe cómo el profesor debería idealmente diseñar, llevar a la práctica y evaluar actividades de enseñanza y aprendizaje (Gómez, 2002). Está compuesto por el análisis de contenido, el análisis cognitivo, el análisis de instrucción y el análisis de actuación. El análisis de contenido es el procedimiento en virtud del cual el profesor identifica, organiza y selecciona los significados de un concepto matemático que considera relevantes para efectos de la planificación de la instrucción.

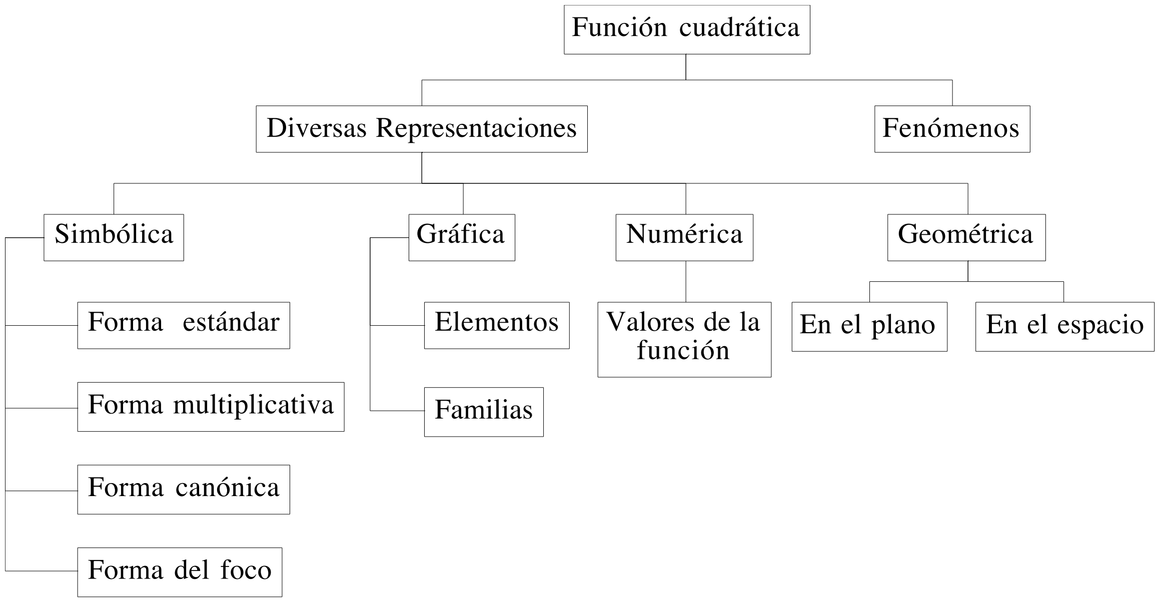

Figura 3. Mapa conceptual general de la función cuadrática

En la Figura 4 se aprecian algunas de estas relaciones. Se observan algunos de los procedimientos para transformar una forma simbólica en otra y algunas de las posibles relaciones entre fenómenos y subestructuras de la función cuadrática que les pueden servir de modelo. Y también se observa una primera aproximación a la relación entre el sistema de representación simbólico y el sistema de representación gráfico (que se llama, en la Figura 4, *traducción entre sistemas de representación*). Esta relación se establece entre *elementos*[9] de las diferentes formas simbólicas (los parámetros) y *elementos* de la representación gráfica (i.e., vértice, cortes con los ejes, foco, directriz). Aunque no se representa en la figura, hay una gran variedad de conexiones (relaciones) entre estos elementos. Por lo tanto, desde el punto de vista del *análisis de contenido*, estos ejemplos dan muestra de la complejidad del problema en cuestión.

[9] Estos son elementos del mapa conceptual en el que se representan los significados del concepto. Estos "elementos" corresponden a conceptos de la estructura conceptual correspondiente.

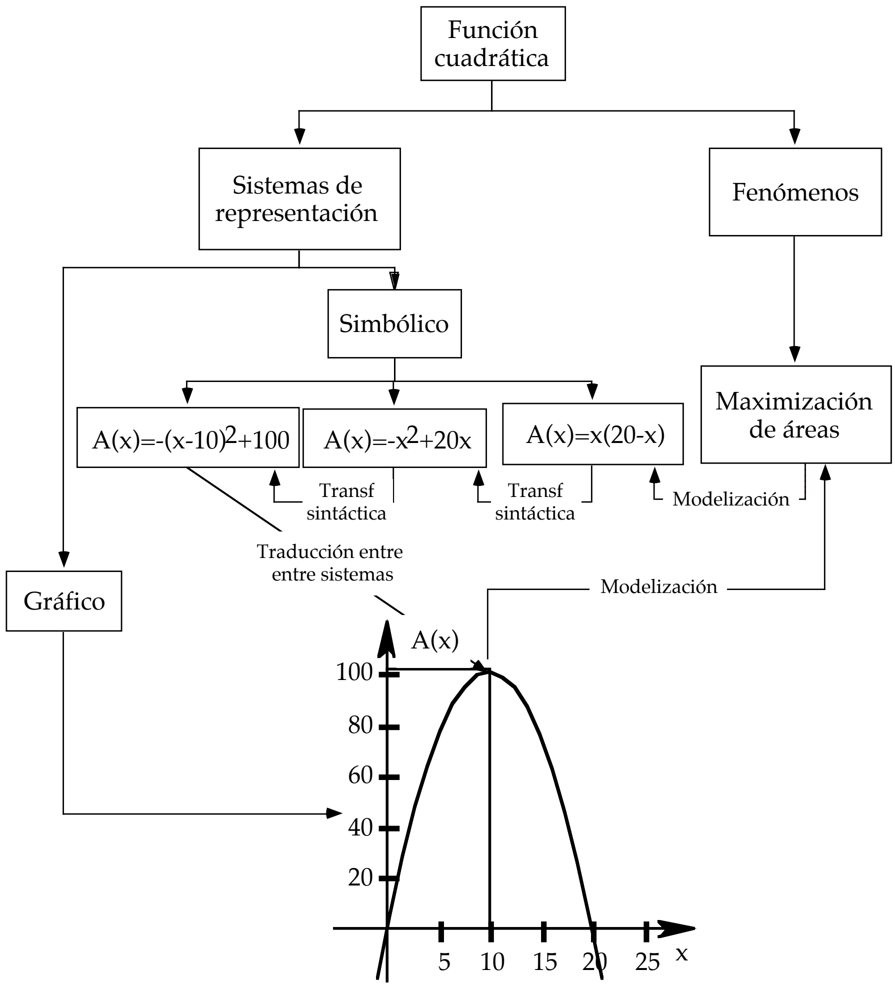

Figura 4. Conexiones entre elementos de un mapa conceptual parcial de la función cuadrática

De hecho, es posible abordar con claridad la definición de los aspectos cognitivos gracias a la descripción que surge del análisis de contenido del concepto matemático. En otras palabras, *podemos concretar las capacidades que deseamos que los escolares desarrollen y las dificultades que ellos pueden tener al abordar tareas, solamente cuando, con motivo de haber realizado el análisis de contenido, hemos identificado, organizado y seleccionado los significados relevantes del concepto matemático en cuestión*. En la Figura 5, hemos retomado la función $f(x)=(x-4)^2-2$ de la Figura 2 y hemos incluido algunos de los procedimientos simbólicos y gráficos que pueden estar involucrados en su análisis. Es decir, hemos identificado y seleccionado algunos de los significados del concepto relacionados con su estructura conceptual (conceptos y procedimientos) y con algunas de sus representaciones. Estos son los significados que consideramos relevantes dentro del contexto del problema propuesto. Hemos omitido el análisis del foco y la directriz y su correspondiente forma simbólica para evitar una mayor complejidad en el esquema. Este análisis más detallado muestra que, desde una perspectiva cognitiva, el manejo del significado gráfico de los parámetros de la función cuadrática debe involucrar, al menos, el manejo de los procedimientos para transformar una forma simbólica en otra, los procedimientos simbólicos y gráficos que establecen la relación entre los parámetros de la forma canónica y las transformaciones gráficas a partir de la forma simbólica estándar $f(x) = x^2$.

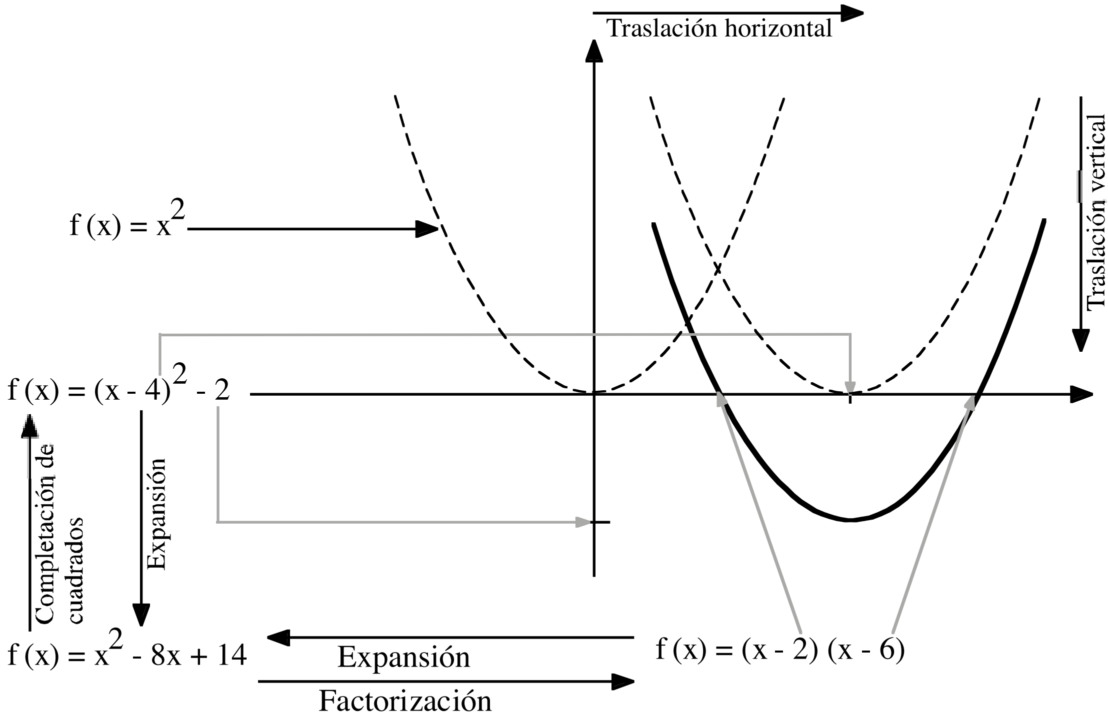

Figura 5. Conexiones y procedimientos

En la Figura 5 se observa la conexión entre la complejidad del análisis de contenido y la complejidad del análisis cognitivo. La capacidad "manejo del significado gráfico de los parámetros" implica otras capacidades y tiene su propia estructura y complejidad. Esto significa que no es posible considerarla de manera aislada. La capacidad en la que nos hemos interesado forma parte de un grupo de capacidades que tiene que ver con el manejo de conceptos, procedimientos y representaciones relacionados con la función cuadrática. Otras capacidades de este tipo pueden ser, por ejemplo, el identificar características comunes de familias de parábolas o relacionar diferentes parábolas con la parábola estándar $y = x^2$ (Lupiánez et al., 2005).En la Figura 3 presentamos una primera aproximación a este problema, desde la perspectiva del análisis de contenido.

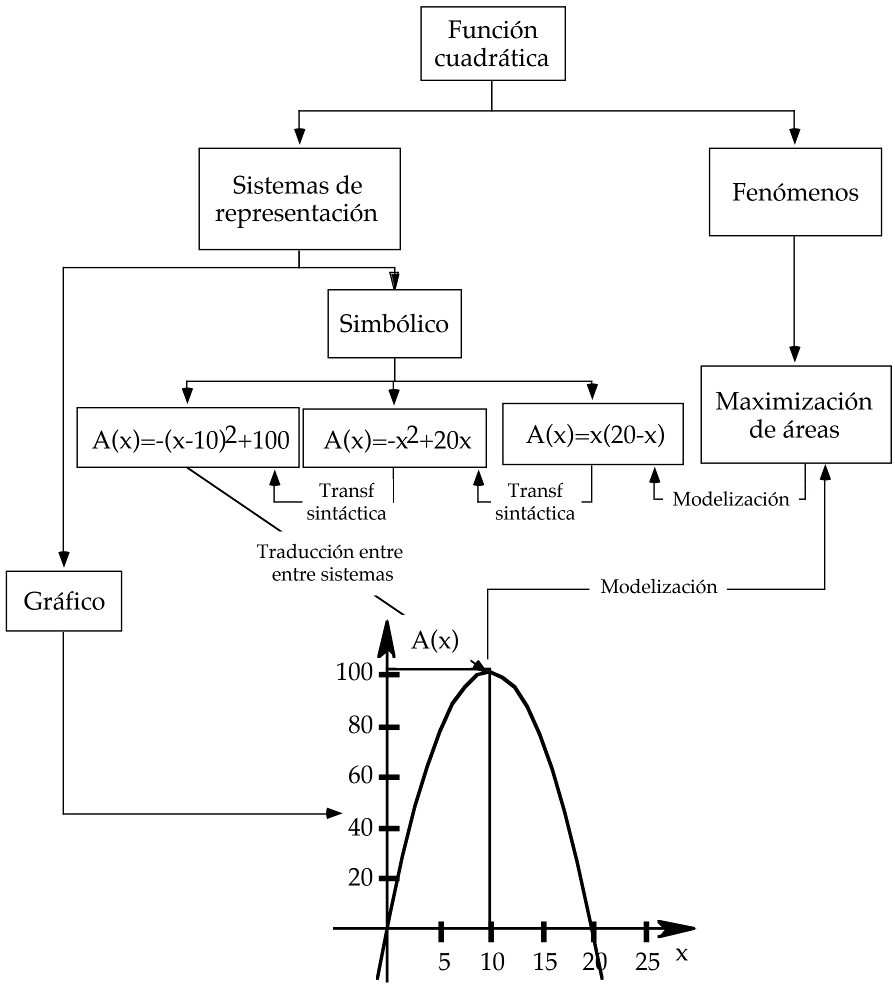

Figura 3. Algunas conexiones en una estructura conceptual

El análisis de contenido proporciona la mayor parte de la información necesaria para identificar las capacidades que se pretenden desarrollar. En la Figura 4, hemos incluido algunos de los procedimientos simbólicos y gráficos que pueden estar involucrados en el análisis del tema. Hemos omitido el análisis del foco y la directriz y su correspondiente forma simbólica para evitar una mayor complejidad en el esquema. Este análisis detallado muestra que el manejo del significado gráfico de los parámetros de la función cuadrática debe involucrar el manejo de los procedimientos para transformar una forma simbólica en otra, los procedimientos simbólicos y gráficos que establecen la relación entre los parámetros de la forma canónica, y las transformaciones gráficas a partir de la forma simbólica estándar .

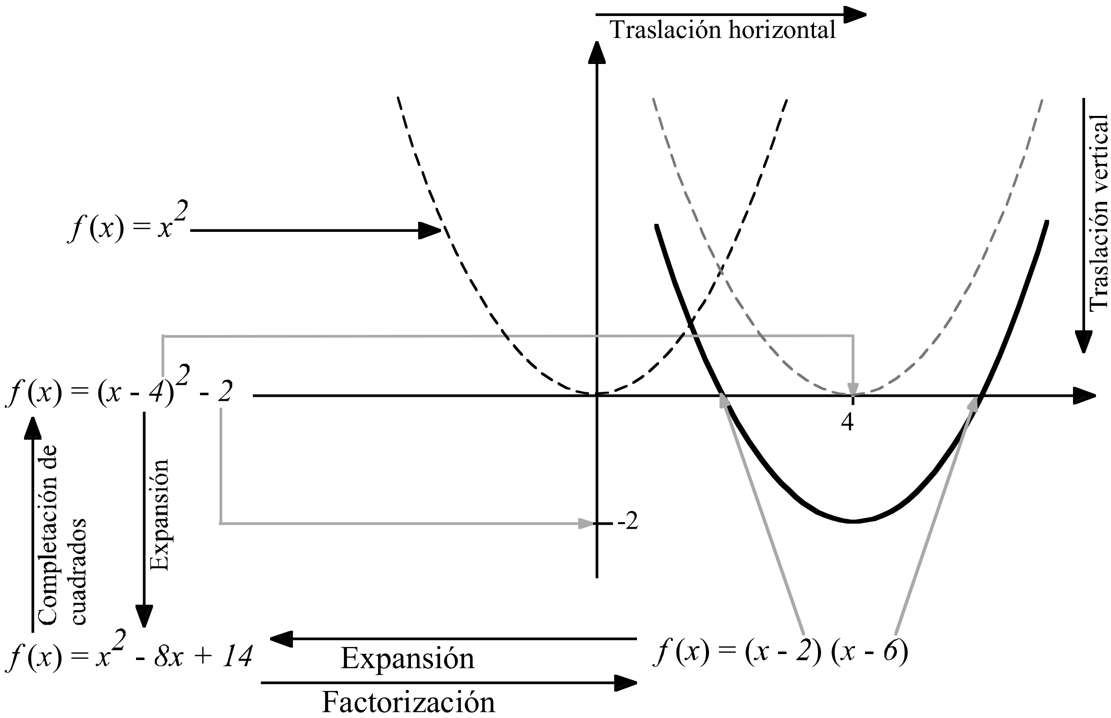

Figura 4. Conexiones y procedimientos

Siguiendo el procedimiento propuesto por Lupiáñez et al. (2005), en la Tabla 1 hemos identificado algunas de las capacidades que están implicadas en este problema y hemos marcado aquellas competencias a las que ellas contribuyen (la última columna identifica una dificultad relacionada con la capacidad C1). Enumeramos las capacidades en las filas de tabla y las organizamos en cuatro grupos. Las columnas corresponden a las siete competencias mencionadas anteriormente, junto con una última columna con la que se pueden identificar dificultades.

		PM	J	C	EC	R	F	M	D
Ejecutar, comunicar y justificar los procedimientos de transformaciones simbólicas									
C1	Completación de cuadrados		✔	✔		✔			✔
C2	Expansión		✔	✔		✔			
C3	Factorización		✔	✔		✔			
Identificar, mostrar y justificar los parámetros									
C4	Forma canónica (a, h, k)		✔	✔	✔				
C5	Forma foco (p, h, k)		✔	✔	✔				
C6	Forma estándar (a, b, c)		✔	✔	✔				

C7	Forma multiplicativa (a, r1, r2)		✔	✔	✔				
Identificar, mostrar y justificar los siguientes elementos gráficos									
C8	Coordenadas del vértice		✔	✔	✔				
C9	Puntos de corte con el eje Y		✔	✔	✔				
C10	Puntos de corte con el eje X		✔	✔	✔				
C11	Coordenadas del foco		✔	✔	✔				
C12	Ubicación de la directriz		✔	✔	✔				
C13	Ubicación del eje de simetría		✔	✔	✔				
Ejecutar, comunicar y justificar los procedimientos de transformaciones gráficas									
C14	Translación horizontal		✔	✔		✔			
C15	Translación vertical		✔	✔		✔			
C16	Dilatación		✔	✔		✔			

Tabla 1. Capacidades para el manejo del significado gráfico de los parámetros de las formas simbólicas

Posibles Caminos de Aprendizaje[10]

Abordar el problema que hemos propuesto implica recorrer el camino que lleve a los escolares de una situación en que han desarrollado unas capacidades básicas con respecto a la función cuadrática[11], a otra situación en la que los escolares son capaces de resolver problemas que involucran el significado gráfico de los parámetros de las formas simbólicas de la función cuadrática. El futuro profesor puede describir estas dos "situaciones" con la ayuda del procedimiento propuesto por Lupiáñez et al. (2005). Sin embargo, la información que hemos organizado en el análisis de contenido muestra que no hay un único camino por el que el aprendizaje se puede desarrollar si se quiere

[10] Diferenciamos las expresiones "trayectoria hipotética de aprendizaje" y "posibles caminos de aprendizaje": la segunda no incluye el análisis de las tareas.

[11] Por ejemplo, proporcionar argumentos para justificar porqué una función es cuadrática o no, o identificar elementos en la expresión simbólica de una función cuadrática: variable, exponente, coeficientes principal, lineal e independiente, etc.

transformar la situación inicial en la situación final[12]. Para pasar de una situación a la otra, es necesario que los escolares desarrollen o ya hayan desarrollado una colección de capacidades intermedias. Pueden haber diferentes caminos que involucran diferentes capacidades y diferentes tareas pueden poner en juego diferentes capacidades de los escolares (ver la Figura 5).

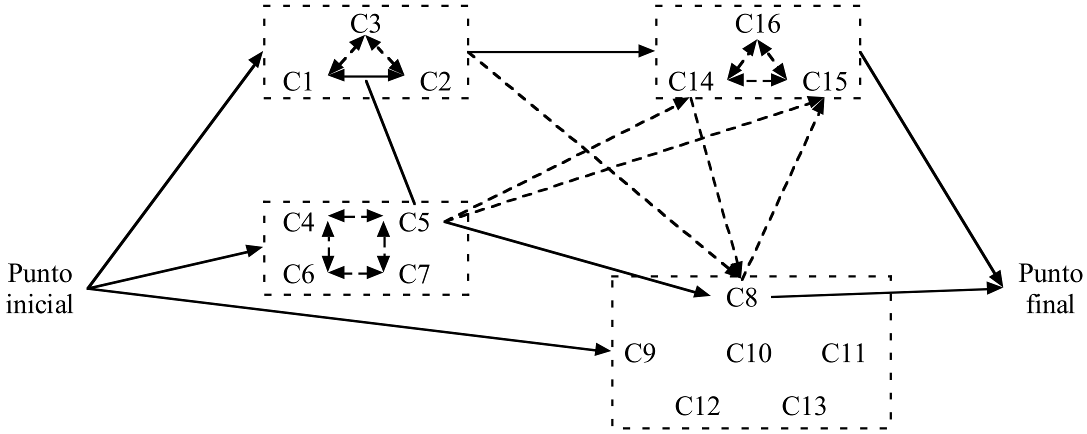

Figura 5. Posibles caminos de aprendizaje

En la Figura 5 hemos identificado algunas capacidades (Ci) y algunos caminos y hemos diferenciado algunos vínculos con una línea continua para indicar una selección de caminos. Por ejemplo, una tarea puede requerir la determinación de las coordenadas del foco de la función $f(x) = x^2 - 8x + 14$, y, en consecuencia, puede involucrar la completación de cuadrados (C1), la identificación de los parámetros del forma del foco (C5) y la identificación de las coordenadas del vértice (C7). El futuro profesor debe decidir qué capacidades pueden llegar a ponerse en juego con motivo de la tarea que él proponga. El análisis de los posibles caminos puede inducirlo a cambiar la tarea, dependiendo de su percepción de cuáles son las capacidades relevantes en ese momento[13]. Por ejemplo, puede decidir diseñar una tarea que ponga en juego ciertas capacidades porque ellas contribuyen a unas competencias que se consideran importantes dentro del diseño curricular global (e.g., contribuyen a competencias que consideran relevantes en el contexto en cuestión).

Posibles Caminos de Aprendizaje y Dificultades

Hay otro criterio que el profesor debe utilizar para identificar los posibles caminos de aprendizaje y seleccionar las tareas: el profesor debe tener en cuenta su conocimiento sobre los errores, dificultades y obstáculos de los escolares en el tema. Por ejemplo, el profesor puede saber que sus estudiantes tienen dificultades para identificar el foco de la parábola, para diferenciar las

[12] Lesh y Yoon (2004) insisten en que, aunque algunos autores suponen que la trayectoria hipotética de aprendizaje sigue un camino lineal, el desarrollo conceptual en matemáticas tiene lugar a lo largo de caminos en forma de árbol (pp. 224-225).

[13] O de los recursos disponibles (Gómez, 2005).

coordenadas del foco de una parábola de las coordenadas de su corte con el eje de las ordenadas, o para relacionar diferentes expresiones dentro de un mismo sistema de representación (en el procedimiento de completación de cuadrados)[14].

Los ejemplos que hemos sugerido en el párrafo anterior hacen evidente la estrecha relación entre la noción de capacidad y la noción de dificultad. Son las dos caras de una misma moneda. Cuando afirmamos que "un escolar tiene la capacidad para…", estamos mirando una cara de la moneda. La otra cara corresponde a la afirmación "el escolar tiene una dificultad al…". Tanto la capacidad, como la dificultad se evidencian cuando el escolar aborda una tarea. Decimos que el escolar tiene una dificultad, cuando incurre en un error. Si resuelve la tarea apropiadamente, afirmamos que esto puede ser evidencia de que ha desarrollado las capacidades correspondientes.

Por lo tanto, la enumeración y descripción de obstáculos y dificultades tiene sentido cuando ya se han identificado y caracterizado las capacidades correspondientes al tema en cuestión. El análisis de las capacidades permite identificar el punto inicial y el punto final de una colección posible de caminos[15]: 1) lo que los escolares son capaces de hacer antes de la instrucción; y 2) lo que se espera que ellos sean capaces de hacer después de la instrucción. El análisis de los errores, los obstáculos y las dificultades indica las cuestiones claves que hay que tener en cuenta dentro de ese proceso. Son nodos de la red de caminos sobre los que el profesor debe insistir. Las tareas que él diseñe deben buscar poner en juego aquellas capacidades que involucran dificultades de los escolares. Por ejemplo, en la Figura 6 hemos identificado la completación de cuadrados como una capacidad en la que los escolares tienen una dificultad. El profesor puede tener interés en verificar si sus estudiantes manifiestan esta dificultad y contribuir a superarla. Diseñará entonces una tarea que implique que todos los caminos pasen por esa capacidad. En la Figura 6, sugerimos una colección de posibles caminos de aprendizaje que involucran la capacidad en cuestión[16].

[14] En el caso del futuro profesor, él tendría que obtener esta información de la literatura.

[15] Gravemeijer (2004, p. 22) los denomina los "puntos extremos de la instrucción".

[16] Dependiendo de los recursos disponibles y del uso que el profesor haga de ellos, esta análisis se vuelve más complejo. En particular, en (Gómez, 2005) se muestra que el uso apropiado de la tecnología (es decir el diseño de actividades de enseñanza y aprendizaje que tienen en cuenta tanto el análisis didáctico como las potencialidades de los diferentes recursos disponibles) genera la posibilidad de una mayor variedad de posibles caminos de aprendizaje para una tarea dada.

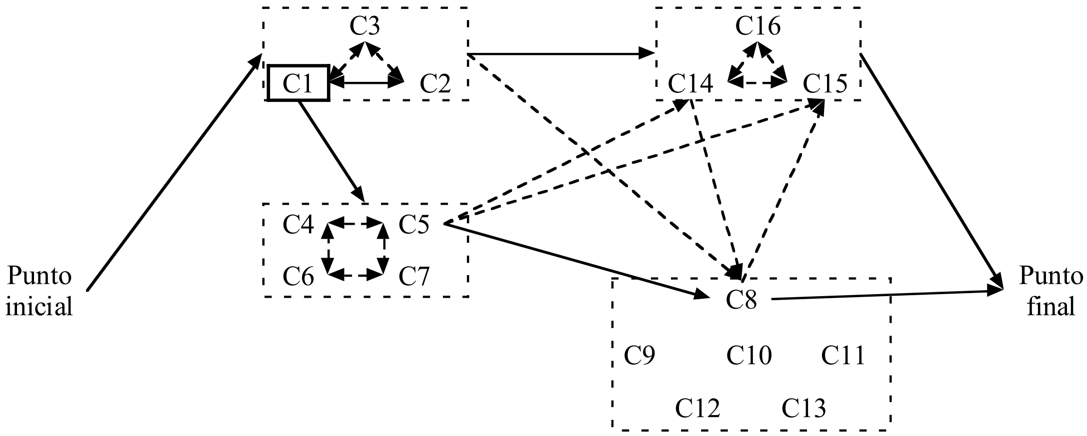

Figura 6. Posibles caminos de aprendizaje teniendo en cuenta dificultades

Análisis de Tareas

Hasta ahora hemos sugerido procedimientos para identificar y organizar las capacidades de los escolares antes y después de la instrucción y para tener en cuenta las dificultades de los escolares en la descripción de los posibles caminos a lo largo de los cuales se puede desarrollar el aprendizaje. Pero, esta reflexión no ha incluido la selección de las tareas. Qué caminos recorran los escolares dependerá de las tareas que se les proponga. La descripción de las capacidades y de los posibles caminos de aprendizaje le permiten al futuro profesor producir conjeturas sobre esos caminos y, al hacerlo, revisar las tareas que puede proponer en su diseño. Dado que, en el caso de la formación inicial, las tareas no se llevarán a la práctica, el proceso es hipotético. En la Figura 7 describimos el procedimiento que un futuro profesor puede realizar para seleccionar las tareas que formarán parte de su propuesta de planificación.

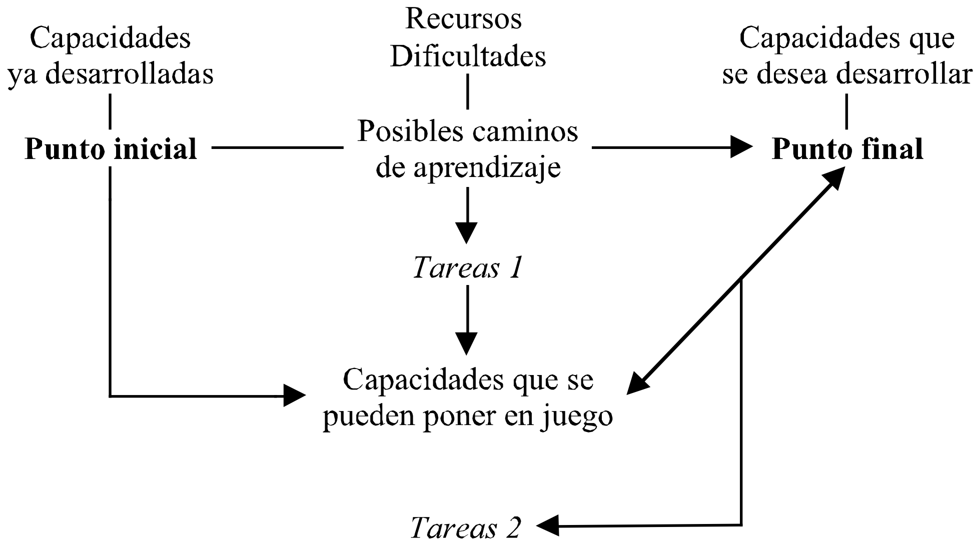

Figura 6. Ciclo de planificación local

Como lo describimos en el apartado anterior, la caracterización de las capacidades antes y después de la instrucción y de los posibles caminos de aprendizaje, le dan luces al futuro profesor sobre las capacidades que sería deseable que los escolares pusieran en juego al realizar las tareas. Con esta información, él puede diseñar y seleccionar una primera versión de esas tareas (Tareas 1 en la Figura 7). Una vez que tiene identificadas unas tareas, él debe verificar cuáles son las capacidades que ellas requieren y aquellas que los escolares pueden poner en juego al abordarlas. Esta revisión le dará luces para revisar su propuesta de tareas y podrá producir una nueva versión de ellas[17] (Tareas 2 en la Figura 7).

Conclusión

El análisis que hemos hecho del significado de la noción de trayectoria hipotética de aprendizaje en la investigación reciente en educación matemática pone de manifiesto la importancia de esa noción en la actuación del profesor de matemáticas cuando diseña actividades de enseñanza y aprendizaje. No obstante, la literatura reciente que utiliza esta noción presenta propuestas y ejemplos realizados por investigadores que asumen el papel de profesor, pero no dan necesariamente luces sobre cómo un profesor puede utilizarla para su trabajo diario en el aula. En este capítulo hemos propuesto una adaptación de esta noción para el caso de la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. Esta propuesta se basa en la idea de que el diseño y selección de las tareas que componen las actividades de enseñanza y aprendizaje debe ser un proceso reflexivo y cíclico en el que, para una tarea dada, se determinan las capacidades que dicha tarea puede poner en juego y, a partir de ese análisis y de los objetivos de aprendizaje que el profesor se haya impuesto, él puede modificar la tarea y analizarla de nuevo. Para realizar este proceso cíclico, el profesor debe tener una idea de cuáles son los posibles caminos de aprendizaje que pueden llevar a los escolares desde su estado actual (capacidades que ya han desarrollado) al estado que representa sus objetivos de aprendizaje (capacidades que se quieren desarrollar). Para ello, el profesor debe producir la lista de capacidades que considera relevantes con respecto a dichos objetivos de aprendizaje. La identificación, caracterización y selección de esas capacidades surge del análisis de contenido del concepto matemático al que se refieren estos objetivos. Este análisis de contenido implica, por su parte, la identificación y organización de la multiplicidad de significados de dicho concepto, junto con la selección de aquellos significados que se consideran relevantes para la planificación de la instrucción.

Al adaptar la noción de trayectoria hipotética de aprendizaje al caso de la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria, hemos propuesto una herramienta que le permite al futuro profesor relacionar el análisis del contenido matemático, las capacidades a desarrollar en los escolares acerca de

[17] Este es el punto en el que el procedimiento que proponemos aquí se diferencia de los procedimientos que se basan en la noción de trayectoria hipotética de aprendizaje. En el caso, de la trayectoria hipotética de aprendizaje, ésta se revisa con motivo de la actuación en el aula de los escolares al abordar las tareas.

ese contenido, y el tipo de tareas que puede proponer a esos escolares para que desarrollen tales capacidades. De esta manera, el diseño de actividades de enseñanza y aprendizaje se convierte en un proceso sistemático, abierto a la crítica y discusión, y que aborda la paradoja de la planificación sugerida por Simon (1995).

Referencias

Baroody, A. J., Cibulskis, M., Lai, M., & Li, X. (2004). Comments on the use of learning trajectories in curriculum development and research. *Mathematical Thinking and Learning, 6*(2), 227-260.

Battista, M. T. (2004). Applying cognition-based assessment to elementary school students' development of understanding of area and volume measurement. *Mathematical Thinking and Learning, 6*(2), 185-204.

Beck, C., Hart, D., & Kosnik, C. (2002). The Teaching Standards Movement and Current Teaching Practices. *Canadian journal of education, 27*(2 & 3), 175–194.

Clements, D. H., & Sarama, J. (2004). Learning trajectories in mathematics education. *Mathematical Thinking and Learning, 6*(2), 81-89.

Clements, D. H., Wilson, D. C., & Sarama, J. (2004). Young children's composition of geometric figures: A learning trajectory. *Mathematical Thinking and Learning, 6*(2), 163-184.

Dorsch, F. (1985). *Diccionario de Psicología*. Barcelona: Herder.

Gómez, P. (2002). Análisis didáctico y diseño curricular en matemáticas. *Revista EMA, 7*(3), 251-293.

Gómez, P. (En Prensa). Complejidad de las matemáticas escolares y diseño de actividades de enseñanza y aprendizaje con tecnología. *Revista EMA*.

Grant, R. M. (1996). *Dirección estratégica. Conceptos, técnicas y aplicaciones*. Madrid: Cívitas.

Gravemeijer, K. (2004). Local instruction theories as means of support for teachers in reform mathematics education. *Mathematical Thinking and Learning, 6*(2), 105-128.

Gravemeijer, K., Cobb, P., Bowers, J., & Whitenack, J. W. (2000). Symbolizing, modeling, and instructional design. En P. Cobb, E. Yackel & K. McClain (Eds.), *Symbolizing and communicating in mathematics classrooms. Perspectives on discourse, tools, and instructional design* (pp. 225-273). Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates.

Kutti, K. (1996). Activity theory as a potential framework for human-computer interaction research. En B. Nardi (Ed.), *Context and Consciousness* (pp. 17-44). London: MIT Press.

Lesh, R., & Yoon, C. (2004). Evolving communities of mind -In which development involves several interacting and simultaneously developing strands. *Mathematical Thinking and Learning, 6*(2), 205-226.

Lupiánez, J. L., Rico, L., Gómez, P., & Marín, A. (2005). *Análisis cognitivo en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria*. Trabajo presentado en V Congresso Ibero-americano de educaçao matemática, Oporto, Portugal.

OCDE. (2004). *Learning for Tomorrow's World: First results from PISA 2003*. París: OECD.

Recio, T. (2004). Seminario: Itinerario Educativo de la Licenciatura de Matemáticas. Documento de Conclusiones y Propuestas. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española, 7*(1), 33-36.

Rico, L. (2004). Reflexiones sobre la formación inicial del profesor de Matemáticas de Secundaria. *Profesorado. Revista de currículum y formación del profesorado, 8*(1), 1-15.

Rico, L. (En Prensa). La competencia matemática en PISA. En E. Santillana (Ed.), *Seminario Educativo de Primavera*. Madrid: Santillana.

Schulze, W. S. (1994). The two schools of thought in resource-based theory: Definitions and implications for research. *Advances in Strategic Management, 10*, 127-151.

Simon, M. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education, 26*(2), 114-145.

Simon, M. A., & Tzur, R. (2004). Explicating the role of mathematical tasks in concpetual learning: an elaboration of the hypothetical learning trajectory. *Mathematical Thinking and Learning, 6*(2), 91-104.

Steffe, L. P. (2004). On the construction of learning trajectories of children: The case of conmensurable fractions. *Mathematical Thinking and Learning, 6*(2), 129-162.

Baroody, A. J., Cibulskis, M., Lai, M., & Li, X. (2004). Comments on the use of learning trajectories in curriculum development and research. *Mathematical Thinking and Learning, 6*(2), 227-260.

Battista, M. T. (2004). Applying cognition-based assessment to elementary school students' development of understanding of area and volume measurement. *Mathematical Thinking and Learning, 6*(2), 185-204.

Beck, C., Hart, D., & Kosnik, C. (2002). The Teaching Standards Movement and Current Teaching Practices. *Canadian journal of education, 27*(2 & 3), 175–194.

Clements, D. H., & Sarama, J. (2004). Learning trajectories in mathematics education. *Mathematical Thinking and Learning, 6*(2), 81-89.

Clements, D. H., Wilson, D. C., & Sarama, J. (2004). Young children's composition of geometric figures: A learning trajectory. *Mathematical Thinking and Learning, 6*(2), 163-184.

Dorsch, F. (1985). *Diccionario de Psicología*. Barcelona: Herder.

Gómez, P. (2002). Análisis del diseño de actividades para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. En M. C. Penalva & G. Torregosa (Eds.), *Aportaciones de la didáctica de la matemática a diferentes perfiles profesionales* (pp. 341-356). Alicante: Universidad de Alicante.

Gómez, P. (2005). Complejidad de las matemáticas escolares y diseño de actividades de enseñanza y aprendizaje con tecnología. *Revista EMA*.

Grant, R. M. (1996). *Dirección estratégica. Conceptos, técnicas y aplicaciones*. Madrid: Cívitas.

Gravemeijer, K. (2004). Local instruction theories as means of support for teachers in reform mathematics education. *Mathematical Thinking and Learning, 6*(2), 105-128.

Gravemeijer, K., Cobb, P., Bowers, J., & Whitenack, J. W. (2000). Symbolizing, modeling, and instructional design. En P. Cobb, E. Yackel & K. McClain (Eds.), *Symbolizing and communicating in mathematics classrooms. Perspectives on discourse, tools, and instructional design* (pp. 225-273). Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates.

Kutti, K. (1996). Activity theory as a potential framework for human-computer interaction research. En B. Nardi (Ed.), *Context and Consciousness* (pp. 17-44). London: MIT Press.

Lesh, R., & Yoon, C. (2004). Evolving communities of mind –In which development involves several interacting and simultaneously developing strands. *Mathematical Thinking and Learning, 6*(2), 205-226.

Lupiánez, J. L., Rico, L., Gómez, P., & Marín, A. (2005). *Análisis cognitivo en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria.* Trabajo presentado en V Congresso Ibero-americano de educaçao matemática, Oporto, Portugal.

OCDE. (2004). *Learning for Tomorrow's World: First results from PISA 2003*. París: OECD.

Recio, T. (2004). Seminario: Itinerario Educativo de la Licenciatura de Matemáticas. Documento de Conclusiones y Propuestas. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española, 7*(1), 33-36.

Rico, L. (2004). Reflexiones sobre la formación inicial del profesor de Matemáticas de Secundaria. *Profesorado. Revista de currículum y formación del profesorado, 8*(1), 1-15.

Rico, L. (En Prensa). La competencia matemática en PISA. En E. Santillana (Ed.), *Seminario Educativo de Primavera*. Madrid: Santillana.

Schulze, W. S. (1994). The two schools of thought in resource-based theory: Definitions and implications for research. *Advances in Strategic Management, 10*, 127-151.

Simon, M. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education, 26*(2), 114-145.

Simon, M. A., & Tzur, R. (2004). Explicating the role of mathematical tasks in concpetual learning: an elaboration of the hypothetical learning trajectory. *Mathematical Thinking and Learning, 6*(2), 91-104.

Steffe, L. P. (2004). On the construction of learning trajectories of children: The case of conmensurable fractions. *Mathematical Thinking and Learning, 6*(2), 129-162.