

*DISTANCIA DE UN PUNTO A UNA RECTA O A UN
PLANO : ALGUNAS OBSERVACIONES DIDACTICAS*

Francisco Bellot Rosado

I.B "Emilio Ferrari"

Valladolid

La presente nota comenta los tipos de deducción de la expresión que da la distancia de un punto a una recta en el plano afín euclídeo, según diferentes textos, y aporta dos más, experimentados en clase, y quizá no suficientemente divulgados, los cuales prefiero por considerar que son fácilmente comprensibles para los alumnos.

La mayoría de los textos actuales de 3º de BUP - v. por ej. (1), (2), (3) - y otros manuales - (9), (10), (13) - obtienen la distancia de un punto a una recta por procedimientos vectoriales, utilizando el producto escalar. Por ejemplo, CASULLERAS, en (2), la deduce en apenas unas líneas, dando la ecuación en forma vectorial-paramétrica.

La experiencia de bastantes años de enseñanza lleva a pensar que, al menos al comienzo, el manejo e interpretación del producto escalar parece a los principiantes, y los alumnos de 3º lo son, bastante difícil, en cuanto nos alejamos mínimamente de los ejercicios de aplicación, y, sobre todo, si, como en este caso, buscamos una "aplicación geométrica teórica". En otras palabras, encuentran poco natural la deducción. Lógicamente, desconocen todavía que, en Geometría euclídea, esos son precisamente los procedimientos naturales. Esto no tiene nada de extraño: siempre recordaré el efecto que nos producía, siendo estudiantes de licen-

ciatura, la magnífica soltura con que Don GUZMAN ANCOCHEA, q.e.p.d., obtenía la demostración más elegante.

En un libro publicado en 1980 -(6), p.44- POGORELOV utiliza el siguiente procedimiento, que podríamos llamar algebraico, y que es muy sencillo :

Sea $ax + by + c = 0$ la ecuación de la recta r y sea $A'(x', y')$ un punto no perteneciente a r . Sea $A_0(x_0, y_0)$ el pie de la perpendicular trazada desde A' a r . La ecuación de $A'A_0$ puede escribirse así

$$b(x-x') - a(y-y') = 0$$

de donde resulta

$$b(x_0-x') - a(y_0-y') = 0 \quad (.)$$

Como A_0 pertenece a r , es

$$ax_0 + by_0 + c = 0$$

y, por lo tanto,

$$ax' + by' + c = a(x' - x_0) + b(y' - y_0) \quad (..)$$

Elevando al cuadrado (.) y (..) y sumando, se obtiene

$$(ax' + by' + c)^2 = (a^2 + b^2)((x' - x_0)^2 + (y' - y_0)^2)$$

y, finalmente,

$$|ax' + by' + c| = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot d(A', A_0)$$

En (14) se utiliza un procedimiento similar para la distancia de un punto a un plano en el espacio afín euclídeo tridimensional. Y es curioso que, en (1), de los mismos autores, no se haga lo mismo para el caso bidimensional.

En el n.º de noviembre de 1979 de *Two-Year College Mathematics Journal* (hoy *College Maths Journal*) (7), W.B. GORDON publicó, dentro de su sección habitual Classroom Capsules, el siguiente procedimiento, basado en la semejanza de triángulos, que, desde entonces, suelo emplear en clase :

Con las notaciones de la fig.1, como el triángulo OPQ es semejante al RNM , se tiene

$$d = \frac{\overline{RN} \cdot \overline{OQ}}{\overline{PQ}}$$

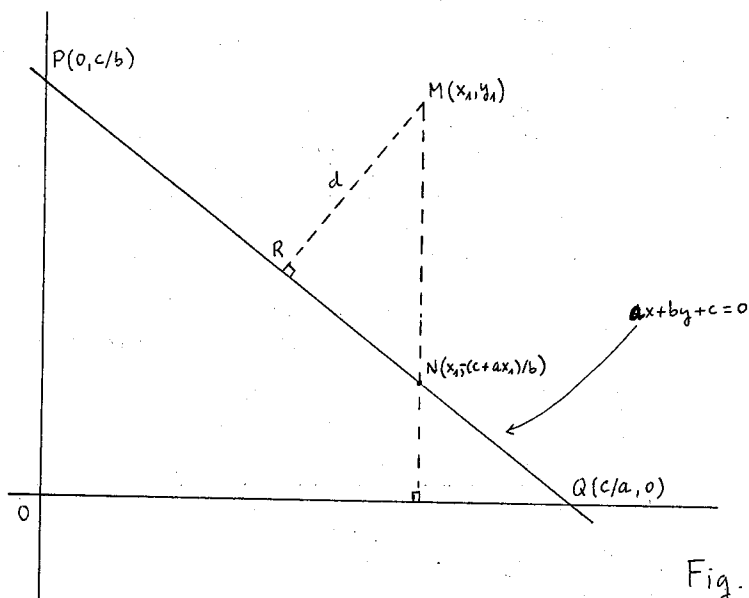


Fig. 1

donde $\overline{OQ} = |c/a|$, $\overline{MN} = |(ax_1 + by_1 + c)/b|$ y $\overline{PQ} = |c/a| \sqrt{a^2 + b^2}$

Sustituyendo se obtiene enseguida el resultado deseado.

En la breve nota de GORDON, el editor señala que en el *American Mathematical Monthly* n^o 59, de 1952, ps. 242, 243, (12), hay una demostración similar, que se generaliza para el espacio afín euclídeo de dimensión 3. La he utilizado en mis clases de COU. Es esta:

Con las notaciones de la fig. 2, sea $ax + by + cz + d = 0$ la ecuación del plano y $P(x_1, y_1, z_1)$ el punto exterior.

Si PM es la paralela al eje z por P , se verifica que

$$\overline{PM} = |(ax_1 + by_1 + cz_1 + d)/c|$$

y, para calcular \overline{PH} , basta multiplicar \overline{PM} por $\cos(\widehat{HPM}) = |c|/\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

El caso $c=0$ es trivial.

En el artículo "Problem Solving versus Answer Finding", de J. STAIB, publicado en (8), se describen diez soluciones de un caso particular, elegido para simplificar los cálculos, del problema que nos ocupa, justificando esta exuberancia en que el interés educativo de la resolu

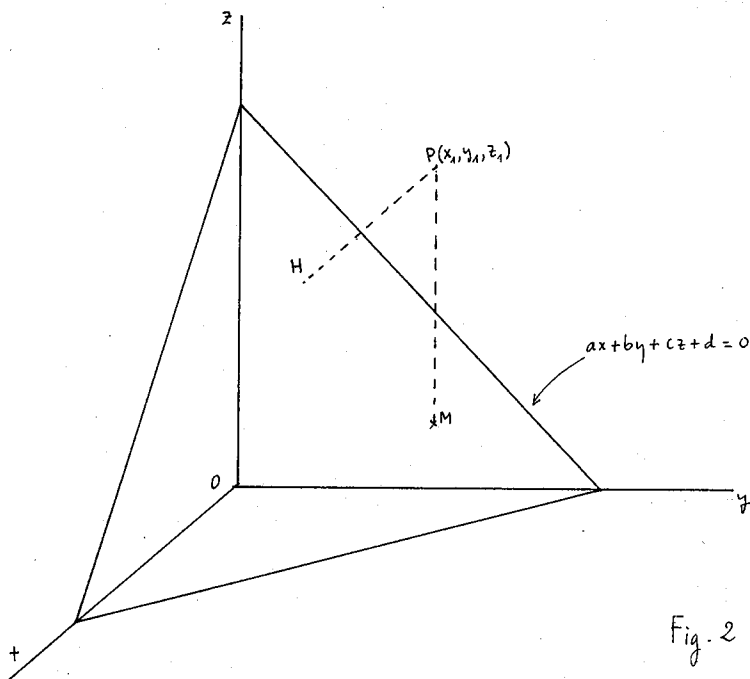


Fig. 2

ción de problemas no sólo estriba en hallar respuestas; se deben resolver problemas para adquirir experiencia en este arte, y para apreciar más profundamente cómo un conjunto de ideas matemáticas puede organizarse de forma que proporcione una estrategia que resuelva el problema en cuestión.

Ya que la difusión de (8) no es grande, reproduzco aquí la solución nº 2 del caso que comento:

Para hallar la distancia del punto $(2, 3)$ a la recta $y = x - 7$, se introduce un punto móvil $(t, t-7)$ sobre ella. Llamando u al cuadrado de la distancia entre ambos puntos, será

$$u = (t-2)^2 + (t-4)^2 = 2t^2 - 12t + 20$$

Para determinar el menor valor de u se aplica la técnica para completar un cuadrado, esto es,

$$u = 2(t^2 - 6t + 9) + (20-18) = 2(t-3)^2 + 2$$

con lo cual el menor valor de u es 2 y la distancia buscada $2^{\frac{1}{2}}$.

Los dos tratamientos mencionados, el de POGORELOV y el de GORDON, junto con los numerosos ejemplos del artículo de STAIB, pueden servir de modelo del método heurístico para obtener, por generalización, la fórmula

$$d(\vec{x}, H) = \frac{|\vec{v} \cdot \vec{x}|}{\|\vec{v}\|}$$

que da la distancia del punto \vec{x} al hiperplano H , donde \vec{v} es un vector perteneciente a $D - \{\vec{0}\}$, siendo D una recta vectorial ortogonal a H , tal como, por ejemplo, se puede encontrar en (16), p.109; o bien en la enciclopédica obra de BERGER ((15), t.2, p.76), donde, además, se trata la distancia entre un punto y un subespacio afín cualquiera del espacio afín euclídeo de dimensión n , utilizando el determinante de GRAM.

BIBLIOGRAFIA

- (1) ETAYO-COLERA-RUIZ - Matemáticas 3^o - Ed. Anaya
- (2) CASULLERAS - Matemáticas 3^o - Ed. Anaya
- (3) CARUNCHO y otros - Matemáticas 3^o - Ed. Santillana
- (4) GIRONZA - Matemáticas 6^o curso de Bachillerato -Ed. del autor.
- (5) CASTELNUOVO - Lezioni di Geometria Analitica - Ed. Dante Alighieri-Roma, 1956
- (6) POGORELOV - Analytical Geometry - Ed. Mir -Moscú, 1980
- (7) GORDON - Distance from a point to a line - Two-Year College Mathematics Journal, vol.10, n^o5, M.A.A., 1979
- (8) STAIB - Problem Solving versus Answer Finding - Two-Year College Mathematics Readings. M.M.A., 1981
- (9) DONEDU - Nouveau Cours de Mathématiques, t.3 -Vuibert, París, 1977
- (10) LESIEUR y otros - Algèbre linéaire, Géométrie - A.Colin, París, 1977
- (11) GOW - A course in Pure Mathematics - English Univ.Press - London, 1960

- (12) BALLANTINE and JERBERT - Distance from a line, or plane,
to a point - American Mathematical Monthly, vol. 59, 1952
- (13) SPM Advanced Mathematics . Book 2 -Cambrige Univ. Press
1976
- (14) ETAYO-COLERA-RUIZ - Matemáticas COU - Ed. Anaya
- (15) BERGER - Géométrie, t.2 - Cedic/ Fernand Nathan -París ,
1977
- (16) DONEDU - Complementos de Geometría Algebraica - Aguilar
Madrid, 1980.