

EXPLORACIÓN CUANTITATIVA DE LAS REPRESENTACIONES NUMÉRICA-GRÁFICA-ALGEBRAICA EN EL ESTUDIO DE LA VARIACIÓN

Alma Alicia Benítez Pérez
CECyT 11, "Wilfrido Massieu" - IPN
albenper@gmail.com

México

Resumen. El presente trabajo muestra parte de los resultados de un proyecto de investigación desarrollado en el Instituto Politécnico Nacional, relacionados con el estudio de variación, concepto que es esencial para analizar diferentes fenómenos físicos y de la vida cotidiana empleando para ello la exploración múltiples representaciones a partir de tratamientos cuantitativos, cuyo objetivo fue analizar las diferentes estrategias que el alumno emplea cuando enfrenta situaciones que están ligados a la noción de variación. En particular el estudio se enfocó en la noción de función que es vista como modelo para el estudio de la variación, para lo cual se diseñaron actividades con el propósito de fomentar la exploración de tratamientos cuantitativos que beneficien la identificación del contenido en múltiples representaciones. La experiencia se realizó con alumnos del nivel medio superior que cursaban la asignatura de Álgebra, impulsando un ambiente de comunicación y discusión continua.

Palabras clave: representaciones, numérica, gráfica, algebraica, variación

Abstract. This paper shows some of the results of a research project at National Polytechnic Institute, related to the study of variation, a concept that is essential to be analyzed following different physical phenomena and daily life, in this exploration using multiple representations from quantitative treatment. Aimed at analyzing the different strategies that students used when facing situations that are tied to the notion of change, in particular the study focused on the notion of functions seen as a model for the study of variation. For activities which were designed in order to encourage exploration of quantitative treatment that benefit in identify in multiple representations of content. The experience was conducted with students from high school who attended the course in Algebra, promoting an environment of continuous communication and discussion.

Key words: representations, numerical, graphical, variation

Introducción

Los programas de estudio de bachillerato destinan una importante cantidad de tiempo a la introducción de las funciones, a su manipulación algebraica y a sus representaciones gráficas. Se espera entonces que estos estudios fortalezcan el pensamiento variacional en el estudiante y por consecuencia el desarrollo del pensamiento: numérico, espacial, métrico y aleatorio, ya que permite impulsar otros tipos de pensamientos más propios de otras ciencias, en especial a través del proceso de modelación de procesos y situaciones naturales y sociales por medio de modelos matemáticos.

La física y la ingeniería son ricas en situaciones donde aparece la variación proporcional, la velocidad que adquiere un cuerpo que cae bajo los efectos de la gravitación es, si se desprecia la resistencia del aire, proporcional al tiempo de caída. Si se aplica una fuerza a un resorte o un alambre, la elongación que resulta es, dentro de ciertos rangos, proporcional a la fuerza aplicada, etc. Bassein (1993) señala que la investigación efectuada para llegar a establecer leyes

universales en fenómenos cambia para construir modelos, los cuales se representan en la forma de ecuaciones que expresan relaciones entre variables.

Investigaciones en el campo de la matemática educativa (Carlson, Jacobs, Coe, Larsen, y Hsu, 2002) reportan la existencia de dificultades entre los estudiantes para tratar con cuestiones que exigen algún tipo de estrategia variacional. Otros estudios (García y Rivera, 2009) analizan las dificultades que presentan los estudiantes en la construcción e interpretación de gráficas, ya que no solo contribuyen a la comprensión del concepto de función sino que constituye una vía de construcción de ideas de variación.

En el bachillerato la variación se explora y analiza considerando dos cantidades x e y relacionándose de esta forma, lo que permite la construcción de valores y se estudia si el cociente $\frac{y}{x}$ toma siempre el mismo valor o valores muy próximos entre sí. También se puede construir una gráfica para ver si se obtiene una recta que pasa por el origen. Ocurre con frecuencia que dos cantidades x e y no son proporcionales, pero sí lo son sus incrementos. En este caso se tienen la relación; $y - y_0 = k(x - x_0)$ donde $x - x_0$ y $y - y_0$ denotan los incrementos de x e y respecto a x_0 e y_0 respectivamente. Esta relación define las funciones lineales, cuya gráfica es una recta en el plano cartesiano. Benítez (2010) identificó Secuencias Numéricas que caracterizan a los polinomios cuadrático y cúbico, señalando la importancia de tratamientos cuantitativos en la figura fondo, para generar secuencias numéricas, las cuales se identificaron globalmente. La discriminación se realiza a través de la "Covariación", la cual consiste en desplazamientos de y_m a y_{m+1} coordinados con desplazamientos de x_m a x_{m+1} , manteniendo la misma graduación en ambos ejes. Lo anterior favorece atender de manera particular el comportamiento de los valores numéricos, que se obtienen a través de los desplazamientos en las ordenadas y en la tabla numérica.

Si bien es cierto que la noción de variación no es un objeto explícito de enseñanza en el sentido de Chevallard, (2000) está claramente presente durante el proceso de formación del estudiante. Por lo cual el desarrollo del pensamiento variacional dadas sus características es lento y complejo, pero necesario para caracterizar aspectos de la variación tales como lo que cambia y lo que permanece constante, las variables que intervienen, el campo de variación de cada variable y las posibles relaciones entre ellas. Además éste tipo de pensamiento da la oportunidad para formulación de conjeturas, la puesta a prueba de las mismas, su generalización y la argumentación para sustentar o refutar una propuesta generalizada.

Marco teórico

Hauger (1995) indica la conveniencia de desarrollar tres tipos de conocimientos de la razón de cambio, para que un estudiante identifique el comportamiento de una función. Razón de cambio global, en un intervalo y puntual. La razón de cambio global es concomitante con las propiedades generales de función como su monotonía. Hauger señala que estos tres tipos de conocimiento de la razón de cambio pueden ser examinados utilizando diferentes representaciones de las funciones, incluyendo gráficas, tablas de valores, ecuaciones y descripciones verbales.

Confrey y Smith (1994), quienes mencionan el uso de problemas contextualizados para introducir familias de funciones con esta aproximación los autores indican el desarrollo de estrategias del estudiante, como es la construcción de tablas de datos, que a menudo sirve como el primer punto de entrada a la situación problemática. Este proceso de iniciar con los datos se entrelaza con frecuencia con la construcción de las variables, como resultado, el estudiante construye la imagen de la función como la coordinación de los elementos dispuestos en dos columnas, de manera paralela el alumno puede insertar valores entre los datos dados, por ejemplo, si una columna se incrementa aditivamente por dos y la otra por seis, los alumnos asocian un cambio de uno con un cambio de tres, insertando los valores apropiados, para establecer la aproximación covariacional. Para Ferrari y Farfán (2008) la covariación se refiere a la relación entre las variaciones simultáneas de dos cantidades, enfocándose al tipo de crecimiento que experimentan los elementos que intervienen para establecer su relación en la función logaritmo y para profundizar su análisis establecen comparaciones con las funciones polinomiales, en particular atienden la función cuadrática. Benítez (2004, 2010) identifica Secuencias Numéricas que caracterizan a los polinomios cuadrático y cúbico, señalando la importancia de tratamientos cuantitativos en la figura fondo, generando secuencias numéricas, las cuales se identificaron globalmente, así mismo Carlson et al. (2002) analizan la covariación para funciones.

Por su parte Duval (2002), menciona la importancia del análisis global para identificar el contenido de las representaciones, considerando fundamental modificar una variable visual en la gráfica para establecer la correspondencia con una variable categórica en la expresión algebraica, siendo entonces el punto central y decisivo en el aprendizaje de las representaciones gráficas la discriminación de los valores visuales y su coordinación con los valores categóricos de la expresión algebraica, atendiendo la discriminación de los valores visuales con relación a la figura-fondo. Benítez (2004) realizó el estudio desde la Interpretación Global del polinomio de segundo grado y menciona la problemática que presenta el polinomio

cúbico, ya que considera exhaustiva su estudio, debido al comportamiento del trazo, obstaculizando la interpretación de las correspondientes variables visuales que experimentaban múltiples variaciones.

Metodología

La investigación reportada se ubica en un paradigma de investigación cualitativo. Las ideas desarrolladas en los referentes teóricos, sirvieron como ejes para diseñar y aplicar tres actividades, en las que los estudiantes identificaron, interpretaron y analizaron el comportamiento local y global de funciones, así como la variación proporcional y la identificación de variables. Estos elementos se consideran importantes en el estudio del Cálculo y fueron presentados en los párrafos anteriores.

Dinámica de trabajo en el aula. La clase se organizó en equipos de 4 a 5 integrantes, formando un total de 6 equipos por grupo. Se entregó al inicio de la sesión una actividad diseñada por el profesor, para trabajarla de manera colectiva, mencionando que un integrante del equipo sería el encargado de recolectar toda la información que se obtuviera durante el proceso de solución, mientras el profesor participaba con los equipos como espectador. El profesor, de acuerdo con las observaciones realizadas a los equipos, seleccionaba un equipo para exponer su trabajo al grupo. El criterio de selección consideró los diferentes puntos de vista, favoreciendo la discusión en el grupo, para aclarar dudas y superar posibles dificultades. La experiencia se realizó con 4 alumnos del nivel medio superior.

Los instrumentos utilizados para la recolección de datos durante la investigación fueron:

- a) Reportes escritos elaborados en forma individual.
- b) Reportes escritos elaborados por cada pareja de estudiantes.
- c) Grabaciones en audio del trabajo de los estudiantes.
- e) Reportes elaborados por el profesor-investigador.

La tesis inicial del presente trabajo es que, en los cursos del bachillerato, parecía haber una considerable distancia entre el uso de la regla de tres como un proceso mecánico y la noción de variación como un proceso de cambio, para ello se han desarrollado tratamientos cuantitativos en múltiples representaciones para evidenciar éste proceso.

Deseando entonces detectar cómo es el estado de desarrollo del conocimiento de los estudiantes en aspectos como:

- ❖ El empleo de la tasa variacional
- ❖ La identificación de variables

- ❖ El análisis cuantitativo para interpretar el contenido en las representaciones.

La experiencia educativa se llevó a cabo con un grupo de 40 alumnos (grupo IIM3), del nivel medio superior (C.E.C.yT. II, “Wilfrido Massieu”) que cursaban el primer semestre del ciclo escolar, y cuya duración fue de 18 semanas. Las edades de los alumnos fluctuaban entre 15-16 años. Una de las características principales de las actividades fue proporcionar información al estudiante para explorar diversas representaciones y darle seguimiento. La información se presentaba en diversos contextos: tabla, gráfica, enunciados verbales, para explorar contenidos y establecer conexiones.

Análisis de datos

A continuación se describe el trabajo de 4 estudiantes, los cuales no habían participado anteriormente en esta forma de trabajo, modificando la práctica en el salón de clase, es decir, se impulsó la comunicación de ideas y la continua participación en clase.

Actividad

En un internado de estudiantes, cada estudiante puede contratar una de dos compañías Telmex cobra \$87.5 por mes, más 80 centavos por llamada. AT&T cobra \$82 por mes, más 90 centavos por llamada.

1. ¿Cuántas llamadas hace aproximadamente por mes?
2. Escribe, para cada compañía, la ecuación que representa el costo de un mes dado en función del número de llamadas.
3. Grafica cada una de las ecuaciones que escribiste en la pregunta 2.
4. Discute cómo se relacionan tus dos gráficas con la solución del problema ¿Cuándo cobran lo mismo ambas compañías? ¿Cuándo conviene más Telmex? ¿Cuándo AT&T?

El trabajo fue desarrollado por cuatro alumnos; Cinthya, Alejandro, Brandon y Brenda. Inicialmente los estudiantes trabajaron de manera individual, particularmente, Cinthya se aisló e inició con una serie de cálculos sin comentar a sus compañeros sus procedimientos. Brenda comentó a Brandon el poder diseñar una tabla para obtener los primeros datos de la situación a través de realizar cálculos los cuales se muestran a continuación (Figura 1).

llamada	costo	1 MCS.
1	.80	
2	1.60	
3	2.40	
4	3.20	
5	4.00	
6	4.80	
7	5.60	
8	6.40	
9	7.20	

Figura 1. Construcción de la representación numérica, Brenda y Brandon.

En ese momento participa Cinthya y comenta la falta del cobro que realiza TELMEX (\$87.5) y AT&T (\$82), Brandon no identifica lo que menciona Cinthya, por lo que Brenda vuelve a dar lectura al problema y comenta la falta de dicha información generando la siguiente tabla numérica (Figura 2).

TELMEX	AT&T	
0 = 87.5	0 = 82	9 = 91.5
10 = 95.5	10 = 91	20 = 95.5
20 = 103.5	20 = 100	30 = 99.5
30 = 111.5	30 = 109	40 = 103.5
40 = 119.5	40 = 118	50 = 107.5
50 = 127.5	50 = 127	60 = 111.5
60 = 135.5	60 = 136	70 = 119.5
70 = 143.5	70 = 145	80 = 127.5
80 = 151.5	80 = 154	
90 = 159.5	90 = 163	
100 = 167.5	100 = 172	

Figura 2. Tratamiento de la representación numérica expuesto por Cinthya.

Alejandro intervino cuando Brenda comenta la posible expresión algebraica que modela la situación (Figura 3),

$$\begin{array}{l}
 X = (.80)X + 87.5 \\
 X = 8 + 87.5 \\
 X = 95.5
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{l}
 X = (.90)X + 82 \\
 X = 9 + 82 \\
 X = 91
 \end{array}$$

Figura 3. Construcción de la Expresión Algebraica de la Situación.

Los estudiantes inicialmente identificaron la variación que presenta el problema en cuanto al costo por llamada, pero ignoran el costo que presenta la renta del servicio, permitiendo a los alumnos generar una tabla en la cual se aprecian los cambios. Esta primera aproximación es

valiosa en cuanto a la identificación de las variables denominadas “llamadas” y “costos”, aunque ignoran la constante que presenta la situación que es la renta del servicio para cada compañía.

La participación de uno de los integrantes fue determinante, ya que en un segundo momento, al construir la segunda tabla, el equipo ignora lo realizado en la primera, y expone únicamente el valor de las llamadas en cada compañía de manera global, ocultando información valiosa en la variación que presenta cada una de las compañías. Posteriormente los alumnos exponen la determinación de uno de los valores ($y = .80(10) + 87.5$ y $.90(10) + 82$), el cual muestra la relación entre las columnas de manera explícita. Sin embargo cuando exponen las expresiones algebraicas que modelan la situación, los estudiantes exponen correctamente el comportamiento, no obstante las variables no son claramente expuestas, sino al contrario presentan confusión para determinar la variable dependiente e independiente ($y = .80(x)+87.5$ y $.90(x)+82$).

Se puede afirmar que el trabajo de Cinthya, Alejandro, Brandon y Brenda se enfocó a la construcción de una tabla de valores, la cual emplearon como modelo dentro de una simple columna ignorando la coordinación de los elementos dispuestos en dichas columnas, para responder la primera pregunta relacionada con a la situación. Durante el segundo momento el equipo estableció la relación entre las columnas, es decir, presenta un tratamiento de tipo global, aunque al organizar la articulación entre las representaciones numérica y algebraica los estudiantes identifican algunas variables para establecer parcialmente las conexiones.

Discusión

De los resultados que se muestran en este documento, se puede inferir que la noción de variación en el nivel medio superior se presenta mediante la aplicación de la regla de tres simple como expone el equipo, siendo ésta la estrategia empleada durante sus exploraciones iniciales, esta actividades es señalada por Monroy G. y Velázquez R. (2009), ya que los escolares la aplican en forma mecánica, sin tener un pensamiento proporcional cualitativo. Estas ideas ayudan a comprender por qué el estudiante Brandon emite respuestas puntuales.

Por otra parte, la construcción de una tabla de valores, que a menudo sirve como el primer punto de entrada a la situación problemática, permite la construcción de las variables, además de señalar aspectos básicos que se desempeñan para examinar y sistematizar el valor de los datos, dando cuenta de esta actividad Cinthya, ya que identifica respectivamente las variables (dependiente e independiente) para interpretar, construir y describir las expresiones algebraicas que modelan el problema contextualizado para el caso de Cinthya.

Es importante destacar el empleo de diversas representaciones como lo señala Duval (2002) lo cual es expuesto en las actividades, ya que los estudiantes desarrollaron diversos tratamientos para identificar el contenido de las representaciones gráfica, simbólica, textual y gráfica, permitiendo la posibilidad de articular al menos dos representaciones.

Conclusiones

- ❖ Reconocimiento e interpretación de la tasa de variación constante, en situaciones contextualizadas, así mismo en funciones representadas gráfica, tabular y algebraicamente.
- ❖ Reconocimiento de la dependencia entre cantidades de magnitud.
- ❖ Buen desempeño algebraico.
- ❖ Reconocimiento gráfico de funciones no lineales.
- ❖ Reconocimiento de la tasa de variación media en contextos donde se interpreta como velocidad; así mismo, cuando se presenta en una representación tabular.
- ❖ En el desarrollo de las actividades se pudo observarse cómo la comprensión de la tasa de variación evolucionó en los estratos iniciales de manera diferente en cada estudiante.

Agradecimiento. La autora agradece el apoyo otorgado por la Secretaria de Investigación y Posgrado a través de la investigación con números de registro 20120794.

Referencias bibliográficas

- Bassein, S. (1993). *An Infinite Series Approach to Calculus*. Houston: Publish or Perish, Inc.
- Benítez, A. (2004). *Estudio Exploratorio sobre la Construcción de la Expresión Algebraica (El caso de polinomios), a través de la Interpretación Global de las Representaciones, Gráfica, Numérica y Algebraica*. Tesis de doctorado no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.
- Benítez A. (2010). Estudio numérico de la gráfica para construir su expresión algebraica. El caso de los polinomios de grado 2 y 3. *Revista Educación Matemática* 22(1), 5-22.
- Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S. y Hsu, E. (2002). Applying covariational reasoning while modeling dynamic events: a framework and a study. *Journal for Research in Mathematics Education*, 33(5), 278-352.
- Chevallard, Y. (2000). *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado*. Buenos Aires: Editorial Aique.

- Confrey, J. y Smith, E. (1994). Exponential Functions, Rates of Changes and the Multiplicative Unit. *Education Studies in Mathematics* 26(2-3), 135-164.
- Duval, R. (2002). Representation, vision and visualization: cognitive functions in mathematical thinking. Basic issues for learning. In F. Hitt (Ed.), *North American Chapter of Psychology of Mathematics Education* (pp. 311-335). México: Cinvestav-IPN.
- Ferrari, M. y Farfán, R. (2008). Un estudio socioepistemológico de lo logarítmico: la construcción de una red de modelos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 11(3), 309-354.
- García, R. y Rivera, M. (2009). Un acercamiento a la variación por estudiantes de nivel medio superior y superior, basado en la modelación del movimiento. En P. Lestón (Ed.), *Actas Latinoamericanas de Matemáticas Educativa* 22, 755-764. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.
- Hauger, G. (1995). *Rate of change knowledge in high school and college students*. Recuperado el 18 de julio de 2010 de <http://www.eric.ed.gov:80/ERICWebPortal/>
- Monroy G. y Vázquez R. (2009). Una exploración del discurso matemático del profesor. Un estudio etnográfico de la razón de cambio en educación secundaria. En P. Lestón (Ed.), *Actas Latinoamericanas de Matemáticas Educativa* 22, 1415-1422. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.