



# I CEMACYC

I Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe

6 al 8 noviembre. 2013

[i.cemacyc.org](http://i.cemacyc.org)

Santo Domingo, República Dominicana



## Una experiencia de formación en “Historia de las Matemáticas en la educación en Matemáticas”

Edgar Alberto **Guacaneme** Suárez

Departamento de Matemáticas, Universidad Pedagógica Nacional  
Colombia

[guacaneme@pedagogica.edu.co](mailto:guacaneme@pedagogica.edu.co)

José Leonardo **Ángel** Bautista

Departamento de Matemáticas, Universidad Pedagógica Nacional  
Colombia

[jangel@pedagogica.edu.co](mailto:jangel@pedagogica.edu.co)

Jhon Helver **Bello** Chávez

Departamento de Matemáticas, Universidad Pedagógica Nacional  
Colombia

[jhbelloc@pedagogica.edu.co](mailto:jhbelloc@pedagogica.edu.co)

### Resumen

Se presenta una descripción de una experiencia de un programa de postgrado para la formación de profesores de Matemáticas en el campo de estudio de la relación “Historia de las Matemáticas – Educación Matemática”. En esta experiencia se aborda el estudio de algunos asuntos matemáticos relacionados con la idea de curva, el papel de artefactos en la solución de problemas y en la construcción del conocimiento matemático y, algunas implicaciones y posibilidades de participación de la Historia de las Matemáticas en la educación en Matemáticas.

*Palabras clave:* Historia de las Matemáticas, Educación del profesor de Matemáticas, Desarrollo profesional del profesor de Matemáticas, Mediación instrumental, Curva.

### Introducción

El Departamento de Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional, desde hace 20 años, ofrece a la comunidad de profesores de Matemáticas la “Especialización en Educación Matemática” [EEM], programa de postgrado que tiene tres intenciones formativas esenciales, a saber: generar hábitos de reflexión sobre la práctica educativa, hacer cotidiano el estudio de las Matemáticas y la Didáctica de las Matemáticas como fuente de saberes funcionales y, procurar la innovación educativa como reto y fuente de conocimiento.

Para la cohorte 2013, el Departamento aunó trabajos docentes e investigativos de algunos de sus profesores para realizar una experiencia de formación en el campo de estudio de la Historia de las Matemáticas [HM] en la educación en Matemáticas. Este documento reseña algunos aspectos relacionados con la planeación y el desarrollo parcial de la experiencia.

### **Aspectos preliminares de la experiencia**

Hoy en día, a nivel mundial, la relación “Historia de las Matemáticas – Educación Matemática” [HM-EM] constituye un objeto de estudio de una inmensa comunidad de investigadores. Muestra de ello es precisamente la existencia de una inagotable literatura especializada (v.g., Barbin & Bénard, 2007; Berlinghoff & Gouvêa, 2004; Calinger, 1996; Katz, 2000; Katz & Tzanakis, 2011; Shell-Gellasch, 2006; Swetz, Fauvel, Bekken, Johansson, & Katz, 1995), el desarrollo de estudios de tal relación (v.g., Fauvel & van Maanen, 2000), la realización de eventos centrados en esta (v.g., *European Summer University on History and Epistemology in Mathematics Education*), y la existencia de grupos internacionales que la asumen como objeto de estudio (v.g., *International Study Group on the Relations Between History and Pedagogy of Mathematics*). La relevancia del estudio de esta relación se expresó de manera singular en la “Escuela-seminario Internacional Construcción de Capacidades en Matemáticas y Educación Matemática” (o CANP-2012), a través del curso titulado “La Historia de las matemáticas como recurso pedagógico en la formación de docentes”, orientado por el Doctor Luis Carlos Arboleda, y en la decisión de la “Red de Educación Matemática de América Latina y del Caribe”, de seleccionar el uso de la HM en la Educación Matemática, como una de sus siete áreas de interés.

Esta dinámica no ha sido ajena a la comunidad académica colombiana, de tal suerte que actualmente en Colombia se cuenta con un acervo que permite identificar en el conocimiento histórico de las Matemáticas, un potente motor de desarrollo del conocimiento del profesor de Matemáticas y una de las falencias más notable en la educación de los profesores (Torres & Guacaneme, 2011a, 2011b).

Bajo esta óptica, el Departamento de Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional ofreció para el 2013 un plan de formación que aborda el estudio de aspectos del conocimiento histórico desde al menos tres perspectivas, que se articulan convenientemente con la estructura curricular distintiva de la EEM. Esta estructura contempla el estudio, durante un año, de tres componentes (las Matemáticas, la Didáctica de las Matemáticas y la Tecnología en las Matemáticas) y el desarrollo de un trabajo de grado que articula lo estudiado en los seminarios con preocupaciones de los profesores en formación y el equipo docente a cargo de la cohorte de la EEM. Así, inicialmente se propuso estudiar: (i) algunas teorías matemáticas, o fragmentos de estas, que son consideradas hitos en la HM y que vistas en su contexto sociocultural de surgimiento, ofrecen una oportunidad sin igual de comprender las Matemáticas de otras épocas y otras gentes; (ii) algunas implicaciones de la HM en la educación en matemáticas, particularmente en la cualificación y mejoramiento del conocimiento del profesor de Matemáticas y en las implicaciones de su uso en las clases de Matemáticas; y, (iii) el papel de algunos artefactos (v.g., máquinas, instrumentos) que se constituyeron en mediadores instrumentales en la constitución de las Matemáticas y, ocasionalmente, en objeto de estudio de las Matemáticas mismas.

No obstante tal propuesta, antes de iniciar el desarrollo de la misma, se consideró la imposibilidad de abordar la HM en su plena extensión o en sus contenidos fundamentales en un

programa de dos semestres y, luego de considerar varios temas u objetos matemáticos, se decidió asumir las curvas matemáticas como objeto de estudio.

### Aspectos específicos del desarrollo de la experiencia

Durante el primer semestre de 2013 se ha desarrollado parcialmente la propuesta y para el segundo semestre se completa su implementación. En este sentido, la descripción que sigue, pretende explicitar aspectos de los seminarios llevados a cabo, denominados: “Seminario de Matemáticas I”, “Didáctica específica I” y “Tecnología en Ciencias y Matemáticas I”.

#### Seminario de Matemáticas

El Seminario de Matemáticas se diseñó partiendo de dos ideas fundamentales. En primer lugar, que las Matemáticas se constituyen en una construcción social y que los conceptos que hoy aparecen como una obra terminada pueden re-significarse a la luz de los usos sociales que se le asocian desde su misma génesis y a lo largo de su evolución y desarrollo. En segundo lugar, que las Matemáticas no deben entenderse como los resultados de una actividad, sino como la actividad misma; no como un producto terminado, sino como un proceso que alberga tanto los resultados y las técnicas, como los interrogantes, las conjeturas y los métodos que en una época determinada se plantearon algunos personajes para abordar la consideración de un determinado problema.

En ese sentido, con el propósito de que los estudiantes se apropiaran de esta filosofía y de organizar el seminario, se propuso trabajar sobre un concepto en Matemáticas que, aunque vive de manera transversal en los cursos de Geometría, Álgebra, Cálculo y Estadística, y es utilizado como una herramienta para abordar otros objetos matemáticos, no es estudiado formalmente, a saber, el concepto de curva. Específicamente, el seminario se planteó en torno a la pregunta ¿qué es una curva?, y las actividades se diseñaron con el objetivo de que el estudiante identificara las nociones de curva manejadas en ciertas épocas por ciertos matemáticos, estudiando parte de las teorías matemáticas en las que surgían dichas nociones.

Ahora bien, la organización de las actividades se pensó a partir de una línea cronológica de autores y sus trabajos y la elección final de los autores o trabajos se realizó teniendo en cuenta sus aportes al tema. Así, la propuesta de contenidos del curso quedó estructurada como muestra la Tabla 1.

Tabla 1

*Estructura temática inicial del Seminario de Matemáticas*

	Tema	Representantes
Edad Antigua	Contexto: estado de conceptos (v.g., infinito, número y función); escuelas de pensamiento (v.g., aristotélica y atomista). ¿Qué matemáticas son estudiadas?	Heráclito, Demócrito, Pitágoras, Platón, Aristóteles, Eudoxo, Euclides, Arquímedes, Apolonio
	Curvas mecánicas 1	Hipias (La trisectriz), Dinostrato (La cuadratriz) Nicomedes (La concoide) Arquímedes (La espiral) Diocles (Cisoide)
	Curvas “sintéticas”: Las cónicas	Apolonio

Edad Media	Las curvas como relaciones de dependencia	Oresme
Renacimiento y Edad Moderna	Curvas mecánicas 2	Galileo y otros (La cicloide)
	Las curvas como expresiones analítico-geométricas	Fermat, Descartes
	Las curvas como expresiones analíticas	Leibniz, Newton, Euler, Lagrange (funciones, funciones vectoriales, Series) Curva logarítmica
	Las curvas a partir de funciones paramétricas (Cardioides)	Weierstrass (series) Peano, Hilbert, Cantor, Jordan (Ecuaciones paramétricas)
	Las curvas fractales: dimensión	Koch (Punto de vista topológico)

Finalmente, para tratar de buscar respuesta a la pregunta guía del seminario se propuso observar los siguientes elementos: las representaciones de las curvas (ecuaciones, proporciones, gráficas, definiciones), las definiciones de curva (mecánica, sintética, analítica), los sistemas de representación gráfica de curvas, los problemas asociados a las curvas o las características de las curvas (continuidad, suavidad, curvatura, simetrías).

Durante el semestre 2013-I se abordaron los tres primeros temas que aparecen en la Tabla 1; sin embargo, se debe reportar un viraje frente a la previsión inicial del tratamiento de la curva. La idea original suponía tratar de observar cómo la noción de curva históricamente apareció como un mecanismo para solucionar ciertos problemas en Matemáticas, bajo contextos sociales y matemáticos determinados, pero sin considerarla como objeto matemático; no obstante esta previsión, la dinámica del seminario exigió adoptar una postura que implicó el estudio de algunas de las herramientas actuales en Matemáticas que permiten estudiar tales objetos, para luego sí estudiar las curvas como objetos matemáticos y así estudiar las Matemáticas en la historia.

A manera de ejemplo de las actividades realizadas en el Seminario, se puede mencionar que en la tercera sesión, después de realizar una reflexión sobre las Matemáticas y el estado de ciertos objetos matemáticos existentes en la Grecia Clásica, se observó que los problemas clásicos (la trisección de cualquier ángulo, la cuadratura de un círculo y la duplicación de un cubo) que no pudieron ser solucionado con las herramientas platónicas (la regla y el compás) ni bajo la naciente geometría euclidiana, fueron abordados desde una geometría mecánica en la que las curvas eran generadas por el movimiento de ciertos objetos que guardan determinadas relaciones entre ellos. Específicamente, la primera curva mecánica trabajada fue la llamada Cuadratriz de Dinostrato y la actividad inicial consistió en tratar de construir una representación de la curva a partir de la siguiente descripción dada por Pappus:

Dado un cuadrado  $ABGD$  describamos con centro  $A$  el arco  $BED$ . La recta  $BG$ , manteniéndose constantemente paralela a la  $AD$  arrastre al punto  $B$  en su recorrido sobre  $AB$ , además de que esta gire con velocidad uniforme en el ángulo que forman  $AB$  y  $AD$ , es decir el punto  $B$  recorrerá el arco  $BED$  en el mismo tiempo que la recta  $BG$  se traslada a lo largo de  $BA$ . Es evidente que las rectas  $AB$  y  $BG$  coincidirán simultáneamente con la  $AD$  y, como consecuencia dichas rectas  $AB$  y  $BG$  coincidirán en un punto constantemente transportado por ellas  $[z]$ , el cual describirá una línea cóncava en la misma dirección, tal como la  $BZH$ , en el espacio comprendido entre las rectas  $AB$  y  $AD$  y el arco  $BED$ . (Arenzana Hernández, 1998, p. 33)

Después de un extenso análisis y como respuesta a esta tarea surgió la necesidad de comprender las relaciones de dependencia que guardan los objetos allí descritos y la forma en que el tipo de movimiento podía traducirse a un lenguaje conocido. Esta tarea, que se desligó de la actividad principal, permitió a los estudiantes en la siguiente sesión, identificar la riqueza que guarda el estudio histórico de parte de una teoría matemática y la posibilidad de estudiar procesos matemáticos, heurísticas, nociones y significados de ciertos conceptos que hoy no son problematizados.

Ahora bien, en el desarrollo de esta tarea se identificó que bajo el contexto de trabajo, el lenguaje que mejor permitía describir tales relaciones era el de las proporciones, lo que condujo a poder generar una descripción manipulable de las relaciones que generan la curva; sin embargo, surgió otro problema: ¿cómo lograr la construcción de la curva de forma tal que el movimiento permitiera su generación? Para esta nueva tarea, se vio la posibilidad de usar programas de geometría dinámica que junto con la descripción de los objetos y las relaciones que permiten definir la curva, entre ellas las proporciones, conducen a obtener finalmente la representación deseada.

Posteriormente, en otra sesión, y con el objetivo de analizar mejor la curva para poder, entre otras cosas, resolver los problemas clásicos, surgió la idea de tratar de describir la posición relativa de un punto. Por la forma en que se construyó la curva (es decir, a partir del movimiento circular), de forma natural surgió el sistema de coordenadas polares como un sistema bajo el cual la relación dada en la proporción se traducía en una ecuación simple y fácil de interpretar.

En este momento del seminario se generó una reflexión en relación con la pertinencia del estudio de un determinado sistema coordenado y de su utilidad para describir este tipo de curvas que, generadas por el movimiento de un punto, no tienen una ecuación simple en otro sistema coordenado; y, de manera más general, se reflexionó sobre la forma en la que las herramientas utilizadas (las curvas) para solucionar ciertos problemas en Matemáticas (los problemas clásicos) dan paso a la aparición de nuevos objetos (sistemas de coordenadas) y de cómo esos objetos luego pueden ser utilizados para analizar de mejor forma dichas herramientas.

A manera de conclusión, se puede reseñar que al abordar el tema “curvas mecánicas”, aparecieron dos ideas, una de las cuales modificó substancialmente el rumbo del trabajo en el seminario. Por un lado se observó una estrecha relación entre la Física y las Matemáticas, ya que al parecer el rastro de un punto o una recta “que se mueve” (de forma rectilínea, angular,...) dependiendo de otros objetos geométricos, se convierte en un mecanismo para determinar una curva mecánica, y por otro lado se estableció, desde el punto de vista matemático, que tales curvas mecánicas se convierten en objetos matemáticos cuando se identifican como lugares geométricos y se utiliza algún sistema coordenado de representación para caracterizarlos (como un todo o como un conjunto de puntos). Esta segunda idea, llevó a cuestionar la necesidad de abordar un sistema coordenado para poder estudiar la curva y ello condujo a estudiar el sistema que mejor se adapta a las condiciones del contexto, a saber, el sistema de coordenadas polares.

### **Didáctica específica**

En este seminario se procuraba estudiar algunas implicaciones de la HM en la educación en Matemáticas, particularmente en las implicaciones de su uso en las clases de Matemáticas y en la cualificación y mejoramiento del conocimiento del profesor de Matemáticas. Se previó que este estudio incorporara tanto la reflexión general enunciada y el tratamiento de ejemplos específicos identificados en la literatura especializada en la relación HM-EM, como la

construcción de ejemplos y análisis particulares, a propósito de lo estudiado en los dos seminarios paralelos a este y constitutivos de la estructura curricular de la EEM.

Se planteó entonces que como consecuencia de lo estudiado y realizado en el Seminario se pretendía que los estudiantes mejoraran sus competencias para: (i) explorar reflexivamente el papel innovador, para docentes y discentes, de la incorporación de la HM en las clases de Matemáticas, más allá de la obvia transformación que implica la presencia de algo inusual en estas; (ii) analizar críticamente la incorporación de recursos provenientes de la HM a favor de la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas; y, (iii) revitalizar la imagen del profesor de Matemáticas en torno a las actividades matemáticas de creación y comprensión del conocimiento matemático.

Para lograr lo anterior se planeó abordar el estudio de preguntas tales como: ¿cómo participa la HM en el currículo colombiano de Matemáticas?, ¿cómo se expresa la relación HM-EM en la actividad de la comunidad académica?, ¿qué tipos de ejemplos existen de la integración de la HM a la educación en Matemáticas?, ¿cuáles son las justificaciones y cuáles las intenciones fundamentales para integrar la HM en las clases de Matemáticas?, o ¿cómo se pueden clasificar las intervenciones de la HM en las clases de Matemáticas?

La manera de abordar tales preguntas no fue uniforme; a continuación, a modo de ilustración, se presenta la manera como se abordó la pregunta sobre qué tipos de ejemplos existen de la integración de la HM a la educación en Matemáticas.

Inicialmente se les propuso a los estudiantes que hicieran una búsqueda bibliográfica de documentos que a su juicio constituyeran ejemplos de intervenciones de la HM en la educación en Matemáticas y que a partir de lecturas exploratorias de los mismos procuraran una clasificación de estos. En respuesta a esta tarea los estudiantes presentaron algunos pocos documentos que habían identificado en la Internet, profundizaron en el estudio de algunos de ellos y expusieron las clasificaciones individuales realizadas. Luego, se le suministró un número considerable de documentos (entre los cuales se encontraban los libros reseñados al inicio de este documento y más de cien artículos extraídos en esencia de revistas del campo de la Educación Matemática) y se les pidió que seleccionaran algunos de estos y mejoraran sus clasificaciones.

Con el conjunto de documentos y de las clasificaciones se discutió y elaboró de manera colectiva una clasificación de documentos que contenía las categorías siguientes: documentos de HM, documentos de reflexiones teóricas sobre la HM en la educación en Matemáticas, documentos que exhiben resultados de investigaciones sobre la comprensión o aprendizaje de ideas matemáticas mediada por la intervención de HM, proyectos de aula o talleres donde se integra la HM en la educación en Matemáticas, documentos que exhiben problemas históricos propuestos en el aula, diseños curriculares generados a partir de la consideración sobre el conocimiento histórico, y documentos que versan sobre la HM en la educación de los profesores de Matemáticas.

Esta visión construida a partir de la clasificación de la literatura, no solo exhibió la diversidad de intervenciones de la HM en la educación en Matemáticas y permitió conocer ejemplos concretos de uso de la HM, sino que además fue el marco para discutir las posiciones personales respecto de tres reflexiones, elaboradas por el profesor del Seminario, para motivar la elaboración de discursos críticos frente a lo estudiado. Las reflexiones planteadas fueron:

- Reflexión 1: Integrar la Historia de las Matemáticas a la enseñanza de las Matemáticas implica un reconocimiento previo de su diversidad, es decir, de las diferencias y semejanzas entre Historia de las Matemáticas y Matemáticas. Para ello quizá sea importante advertir que las Matemáticas pueden ser consideradas, en esencia, una actividad humana intelectual, y por supuesto los resultados de la misma. La Historia de las Matemáticas sería, en consecuencia, una actividad humana que explora, describe y analiza la actividad humana de hacer Matemáticas y sus resultados. Podría decirse también que la Historia de las Matemáticas es un discurso que versa sobre el discurso matemático, es decir un meta-discurso sobre las Matemáticas. Estudiar entonces la integración entre la Historia de las Matemáticas y las Matemáticas (por ejemplo en el marco de un proyecto educativo como el de la escuela, en tanto institución social educativa) implica elaborar un discurso sobre tal integración entre un meta-discurso y un discurso; ese nuevo discurso (además del discurso matemático y del discurso histórico) debería hacer parte del conocimiento del profesor de Matemáticas que procure tal integración; así, el estudio de las posturas teóricas que discuten tal integración, de los ejemplos producidos y comunicados por educadores que refieren experiencias de integración, de las experiencias propias de diseño e implementación curricular de experimentos de integración, etc. constituye una de las principales fuentes de formación de los profesores, y un reto mayor y nuevo para las instituciones y profesionales a cargo de la educación de los profesores de Matemáticas.
- Reflexión 2: Una perspectiva que deviene de las posturas constructivistas en/para la educación reconoce la necesidad de re-crear en las aulas, hasta donde sea posible, las condiciones contextuales y conceptuales en las que el conocimiento matemático se construyó. Si se considera que la Historia de las Matemáticas ofrece, por excelencia, la posibilidad de conocer tales condiciones, es innegable la necesidad de conocer el discurso histórico que las re-crea; pero si se considera que la Historia de las Matemáticas es una hermenéutica sobre el discurso matemático (es decir, un discurso que interpreta los eventos y hechos matemáticos), ¿acaso tendría sentido procurar que tales interpretaciones hagan parte esencial del conocimiento del profesor de Matemáticas?
- Reflexión 3: Como parte de los resultados provenientes de la Historia de las Matemáticas se cuenta con descripciones evolutivas de las Matemáticas, de disciplinas matemáticas, de teorías matemáticas o de objetos matemáticos (conceptos, teoremas, procedimientos, procesos, etc.). Algunas voces, incluso conocedoras del debate entre ontogénesis y psicogénesis (o de manera más precisa entre posturas que afirman o niegan un cierto paralelismo entre la evolución humana del conocimiento y la evolución personal del conocimiento), han enunciado la posibilidad de atender a tales descripciones y asumirlas como base firme para el establecimiento del orden curricular para las matemáticas escolares. Sin embargo, atender a tales voces implica el reconocimiento de problemas cruciales que se refieren a: los ritmos y tiempos de evolución del conocimiento versus los ritmos y tiempos del aprendizaje escolar; la suposición sobre la validez y unicidad de tales evoluciones resultantes del trabajo histórico; la necesidad de comenzar los estudios desde paradigmas no actuales de las Matemáticas; etc.

Infelizmente, aún no se sistematizan las posiciones que tomaron los estudiantes, pero se tiene la percepción de que estas discusiones ejemplifican en buena medida el nivel al que se aspira que lleguen los profesionales de la educación que reconocen la necesidad de un desempeño profesional que supere la imagen de la docencia como un oficio.

## Tecnologías en Ciencias y Matemáticas

En este seminario se pretende construir, alrededor del uso de diferentes instrumentos que se han utilizado en el desarrollo del concepto de curva, un ejemplo que les permita a los estudiantes comprender la importancia del estudio de la HM en el conocimiento que podría ser útil para en el desarrollo y reflexión de las Matemáticas que ponen en juego en las aulas. De igual manera, se pretende construir una idea de tecnología como un cúmulo de conocimientos que se configuran para construir artefactos que permitan simplificar una tarea específica. Con estas pretensiones, se plantean tareas alrededor de dos tipos de relaciones: “conocimiento matemático – elaboración de instrumentos” y “papel de los instrumentos en las Matemáticas – noción de Matemáticas”. El desarrollo de las actividades se media por el uso del *Cabri y Geogebra*.

Para la gestión del espacio, se proponen esencialmente tres actividades: el análisis de la posibilidad de trazar una parábola con regla y compás, el análisis de instrumentos que históricamente sirvieron para la solucionar el problema de la trisección del ángulo y la determinación de las propiedades que sustentan la construcción de instrumentos para realizar cónicas.

A continuación se presenta información sobre la primera y tercera actividad, desde la pretensión que tuvo el orientador de la asignatura y se describen las producciones realizadas por algunos de los estudiantes.

La primera actividad tuvo como propósito llevar a cabo la reflexión sobre el valor epistemológico de “la regla y el compás” en las Matemáticas griegas. Al establecer la importancia y limitaciones de esta heurística constructiva, se abordó la situación propuesta desde la validez del conocimiento matemático y su rigurosidad. Alrededor del desarrollo de la situación, se pretendía que apareciera la diferencia que se estableció en la antigüedad entre curvas geométricas y mecánicas, la discusión sobre la infinitud de puntos necesarios para establecer el objeto matemático pedido en la construcción y los elementos necesarios que permitirían definir este objeto desde los instrumentos propuestos.

Con respecto al trabajo realizado por los estudiantes, se puede señalar que la discusión se desarrolló alrededor de la construcción de Werner (Río Sánchez, 1999), la cual fue consultada y presentada por dos grupos. Esta consiste en el establecimiento de puntos que pertenecen a la parábola a partir de tomar referencia en un par de líneas perpendiculares  $r$  y  $s$  que se cortan en el punto  $V$ ; sobre  $r$  se construye un punto  $D$  a una distancia  $2p$  de  $V$  y se construyen circunferencias con centro en la recta  $r$  y que pasan por  $D$ , las cuales cortan a la recta  $s$  en los puntos  $A, B, C, D, \dots$  y a la recta  $r$  en  $A', B', C', D' \dots$ , respectivamente. Luego se trazan rectas perpendiculares a las parejas de puntos  $(A, A'), (B, B'), (C, C'), (D, D')$  y sus puntos de corte determinan la parábola, como se muestra en la Figura 1.



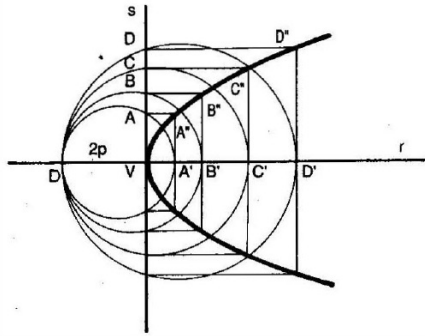


Figura 1 Construcción de una parábola según Werner (Tomada de Río Sánchez, 1999, p. 31)

Junto con los estudiantes entonces se cuestionó esta construcción desde los siguientes aspectos: las posibilidades de trazar curvas con regla y compás, el rigor y validez de la construcción y la finitud del procedimiento. En relación con estos tres aspectos y después de discutirlos y de documentarse sobre aspectos relacionados, acuerdan que en la perspectiva euclidiana la construcción no es válida ni rigurosa; además, establecen que la construcción permite una “aproximación” a la curva, pues sólo se logra la determinación de un conjunto discreto de puntos y que para trazarla se necesitaría un instrumento que permita “trazo continuo”, como en las curvas mecánicas.

La tercera actividad abordó el trabajo con instrumentos que fueron utilizados para realizar el trazado de cónicas y tomó como referencia el libro sobre cónicas de Apolonio (Heath, 1896). Este documento, considerado el tratado más importante sobre este tema en la antigüedad, fue la base para abordar el conocimiento sobre estas curvas bajo el enfoque de la geometría sintética. El análisis de los instrumentos, permitió hacer uso de las propiedades descritas por Apolonio, que no son usuales en la aproximación analítica a estas curvas, para realizar construcciones que configuran a las cónicas, más como objetos geométricos que analíticos.

Aunque cada grupo de estudiantes tuvo un instrumento para analizar, el realizado con el trazado de la parábola a partir del parabológrafo de Cavalieri, muestra el tipo de conclusiones y relaciones que los estudiantes encontraron en cada cónica. Así, al intentar justificar por qué la curva que describe el instrumento es una parábola, los estudiantes, realizaron una simulación del instrumento por medio del programa *Cabri* y la verificación de la proposición 11 del libro de Apolonio.

Proposición 11: Para todo punto tomado sobre la curva, el área del cuadrado construido sobre su *ordenada* es exactamente igual al área del rectángulo construido sobre la abscisa y el lado recto (los lados del rectángulo son el lado recto) y el segmento entre el *vértice* de la curva y el extremo de la ordenada es el diámetro. (Heath, 1896, p. 22).

Así mismo, observan que la definición de *diámetro de la curva* les ofrece un marco de comprensión y justificación.

Si cada paralela a una dirección dada corta a una curva en dos puntos y los puntos medios de los segmentos entre esos dos puntos están en una misma recta, a la recta generada por los puntos medios de los segmentos se le llama diámetro de la curva. (Heath, 1896, p. 22)

En este contexto realizan la construcción de la Figura 2

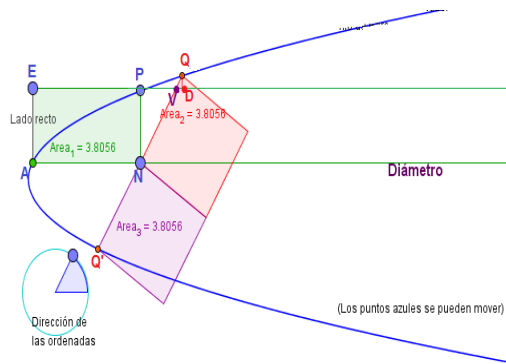


Figura 2 Construcción en Cabri de la propiedad de la parábola presentada por los estudiantes.

A partir de esta construcción realizan la comparación con el instrumento presentada en la Figura 3, determinando que la base de construcción del instrumento se explica desde una definición de parábola que no es frecuente encontrar en la escuela, pero que permitiría entender propiedades geométricas de este objeto.

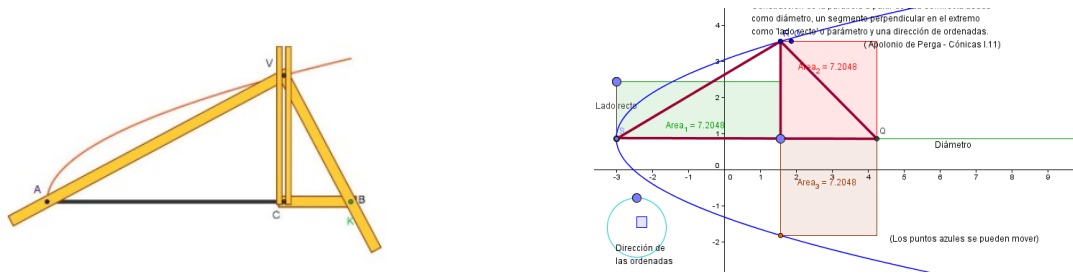


Figura 3 Parabológrafo de Cavalieri comparado con la construcción en Cabri

### Algunas conclusiones iniciales

A través del trabajo desarrollado en el “Seminario de Matemáticas” se puede observar que el estudio la HM y particularmente de las Matemáticas en la historia, puede convertirse en una fuente de herramientas para que el docente reflexione sobre algunos de los elementos que en su quehacer intervienen, como la pertinencia de un determinado tema en el currículo, la necesidad de construir una teoría para abordar un objeto en Matemáticas, el significado que adquiere un objeto a la luz del contexto (problemas y situaciones) en el que aparece o se estudia, las relaciones que existen entre otras ramas del conocimiento y las Matemáticas (por ejemplo el cómo otras ciencias o disciplinas ayudan a la generación de conocimiento matemático y viceversa), entre otras cosas.

De manera concreta, en el transcurso del seminario se generaron reflexiones en relación con: el poco conocimiento que se tiene sobre el concepto de curva, el tipo de curvas abordado en la escuela (las gráficas de funciones), la forma en que la Historia permite observar que otras ciencias o disciplinas (como la Física) contribuyeron a la construcción de objetos que aunque no fueron aceptados en su época como matemáticos ahora sí lo son, la forma en que muchos libros de Historia llevan a pensar que la Geometría euclidiana y los trabajos desarrollados bajo la escuela platónica fueron los únicos aportes a las Matemáticas en la Grecia Clásica, la estrecha relación que existe entre las curvas mecánicas y el sistema de coordenadas polares, la posibilidad de modificar el currículo clásico, para abordar el estudio del sistema de coordenadas polares luego de realizar el clásico trabajo en trigonometría y así mostrar otro sistema de representación

diferente al usual (cartesiano), la dificultad para manipular un nuevo sistema de representación sin acudir al ya conocido, o la dificultad que existe para interpretar ciertos conceptos a la luz de un nuevo sistema de representación (por ejemplo, interpretar la derivada de una función en coordenadas polares).

Por otra parte, el trabajo realizado en el seminario “Didáctica Específica” efectivamente le permitió a los estudiantes reconocer un amplio campo de investigación y trabajo que reconoce a la relación HM-EM como objeto de estudio, visibilizado, entre otras, por una abundante producción escrita. Por otra parte a partir de la aproximación seleccionada para el curso, los estudiantes pudieron estudiar algunas de las propuestas que colegas, casi siempre de otros países, han diseñado, implementado y evaluado, reconociendo en estas ejemplos a imitar o a utilizar de base para construir propuestas semejantes.

Adicionalmente, varios estudiantes manifestaron que no esperaban algo más del seminario que “recetas” para incorporar la HM en sus clases y que la discusión de las reflexiones presentadas por el profesor del curso (trascritas antes en este documento) constituyeron un reto mayor que los conminó a intentar elaborar un discurso en el que no se sentían muy seguros de tener o no la razón o en el cual ocasionalmente tomaban una postura y luego una opuesta.

Finalmente, en el seminario “Tecnologías en Ciencias y Matemáticas”, la primera actividad permitió poner en discusión aspectos no tradicionales de la formación de profesores relacionados con la HM, como lo son: el rigor, la validez y la instrumentalización de aspectos de las Matemáticas. En este sentido, los estudiantes se acercaron a heurísticas clásicas, como las asociadas a las construcciones con regla y compás, y lograron entrever la diferencia entre la solución a una situación problema (v.g., la construcción de una parábola) y una aproximación a la solución. En cuanto a su actividad profesional, la actividad los cuestionó sobre el tipo de problemas que les plantean o plantearían a los estudiantes con regla y compás, al igual que les generó preguntas sobre la relación de los dibujos y construcciones geométricas con el pensamiento geométrico escolar.

Por su parte, la tercera actividad le permitió a los estudiantes formarse en tres sentidos: el primero relacionado, con el propio conocimiento matemático; el segundo, relacionado con la potencia del conocimiento histórico y en especial de una obra como la de Apolonio; y, el último, respecto del papel que puede cumplir un instrumento, modelado en *Cabri* o *Geogebra*, en la comprobación y comprensión de las Matemáticas.

En general, el desarrollo del seminario permitió que los estudiantes a partir de instrumentos utilizados para trazar curvas, reflexionaran sobre: el conocimiento geométrico que tienen de las cónicas, el conocimiento que ponen en juego en las aulas con sus estudiantes, la mediación instrumental que se da al introducir un elemento tecnológico en la resolución de una situación problema y el uso que se le podría otorgar al conocimiento histórico alrededor de su propio conocimiento y el de sus estudiantes.

### Referencias y bibliografía

- Arenzana Hernández, V. (1998). Las curvas mecánicas en la geometría griega. La cuadratriz de Dinóstrato. *Suma: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas* (28), 31-36.
- Barbin, E., & Bénard, D. (Eds.). (2007). *Histoire et enseignement des mathématiques. Rigoureux, erreurs, raisonnements*. Lyon: Institut National de Recherche Pédagogique.
- Berlinghoff, W., & Gouvêa, F. (Eds.). (2004). *Math through the Age. A Gentle History for Teachers and Others*. Oxton House Publishers & The Mathematical Associations of America.

- Calinger, R. (Ed.). (1996). *Vita mathematica. Historical research and integration with teaching*. The Mathematical Association of America.
- Fauvel, J., & van Maanen, J. (2000). *History in Mathematics Education. The ICMI Study*. Dordrecht/Boston/London: Kluwer Academic Publisher.
- Heath, T. L. (1896). *Apollonius of Perga, treatise on conic section*. Cambridge: University Press.
- Katz, V. J. (Ed.). (2000). *Using History to Teach Mathematics: An International Perspective*. The Mathematical Association of America.
- Katz, V. J., & Tzanakis, C. (Eds.). (2011). *Recent Developments on Introducing a Historical Dimension in Mathematics Education*. The Mathematical Association of America.
- Río Sánchez, J. d. (1999). *Lugares geométricos. Cónicas*. Barcelona: Síntesis.
- Shell-Gellasch, A. (Ed.). (2006). *Hands on History. A Resource for Teaching Mathematics*. The Mathematical Association of America.
- Swetz, F. J., Fauvel, J., Bekken, O., Johansson, B., & Katz, V. J. (Eds.). (1995). *Learn from the Masters!* The Mathematical Association of America.
- Torres, L. A., & Guacaneme, E. A. (2011a). *Aproximación a las estrategias curriculares de formación en Historia de las Matemáticas en programas de formación inicial de profesores de matemáticas* Conferencia presentada en el XVIII Congreso Colombiano de Matemáticas. Bucaramanga.
- Torres, L. A., & Guacaneme, E. A. (2011b). *Caracterización de las estrategias curriculares de formación en historia de las matemáticas en programas de formación inicial de profesores de matemáticas*. Conferencia presentada en el IV Encuentro de programas de formación inicial de profesores de Matemáticas & V Seminario de Matemática Educativa. Fundamentos de la Matemática Universitaria. Bogotá.