

MODELACIÓN MATEMÁTICA EN LA RESOLUCIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Jorge Iván López Gómez, Ángel Homero Flores Samaniego
Telebachillerato del Estado de Veracruz
jorgeivanxa@hotmail.com, ahfs58@yahoo.com.mx

México

Resumen. El presente trabajo se enfoca a realizar un estudio del impacto que tiene la Modelación Matemática en el aprendizaje de sistemas de ecuaciones lineales dentro del contexto de enseñanza *Aprender Matemática, Haciendo Matemática*.

Este modelo de enseñanza se fundamenta en el marco teórico de Vygotsky y se busca que el alumno desarrolle una Cultura Básica a partir de dos aspectos fundamentales:

Competencias: las cuales comprenden: el desarrollo de un pensamiento matemático, la capacidad de resolver problemas y el uso de tecnología,

Cualidades Personales: Las cuales se desarrollan al fomentar las cualidades personales y los Valores (Tolerancia, respeto y cooperación).

Palabras clave: modelación matemática, trabajo colaborativo

Abstract. This work focuses on a study about the impact of Mathematical Modeling on the learning of systems of linear equations within the context of teaching *Learning Mathematics, Making Mathematics*.

This didactic model is based on theoretical frameworks of Vygotsky and we find that the students make a Basic Culture from two fundamentals aspects:

Competences: which involve the development of mathematical thinking, the ability to solve problems and use of technology.

Personal Qualities: which are developed by encouraging personal qualities and values (tolerance, respect and cooperation).

Key words: mathematical modeling, collaborative work

El presente trabajo se encuentra inserto en el modelo de enseñanza *Aprender Matemática, Haciendo Matemática* (Flores, 2007) la cual tiene como objetivo fomentar una cultura básica en el estudiante, a partir de:

- ❖ El desarrollo del pensamiento matemático.
- ❖ Capacidad de resolver problemas.
- ❖ Uso de tecnología.
- ❖ Fomento de las cualidades personales.
- ❖ Fomento a los valores (Tolerancia, respeto y cooperación).

Para lograr estos objetivos, el modelo de enseñanza parte de dos premisas:

- a) El estudiante debe ser el centro de todo el proceso de aprendizaje, por ello es él quien debe realizar la matemática, con el propósito de aplicar lo que ya conoce a situaciones

nuevas y específicas, de esta forma, aprende la matemática al resolver nuevos problemas y establecer las nuevas relaciones entre conceptos.

- b) El estudiante se desempeña mejor en compañía de otros seres humanos por lo cual debe de relacionarse con ellos, se hace necesario que el alumno se sienta seguro y en confianza para aprender dentro de una comunidad de convivencia armónica.

Dado que este modelo de enseñanza se encuentra centrado en el estudiante, se hace necesaria una empatía entre el profesor y los alumnos, donde el primero debe presentar una preocupación incondicional sobre el aprendizaje y los pensamientos críticos que desarrollarán sus alumnos.

Naturaleza del conocimiento

En el presente trabajo consideramos que el conocimiento es la capacidad que presenta un individuo para resolver una situación matemática, la cual se encuentra enmarcada en un contexto social. Consideramos que el conocimiento depende de dos aspectos, el primero de tipo cognitivo, que es la forma en cómo un individuo incorpora los nuevos conocimientos a su acervo cultural; y en segundo término, un aspecto socio-cultural que es tanto la fuente de información como la motivación para adquisición del conocimiento, por lo tanto, el individuo no puede ser sustraído de su contexto socio-cultural (Vygotsky, 1978), por ello, consideramos que el conocimiento depende, entre otras cosas, del contexto en que éste se de.

Los trabajos realizados por Vygotsky son conocidos como la perspectiva socio-histórica, la cual plantea que los procesos psicológicos superiores, como la percepción, el razonamiento lógico, el pensamiento y la memoria, se encuentran mediados por instrumentos de carácter social, ya que son productos de la actividad humana a lo largo de su vida (Vygotsky, 1932, 1934). Estas actividades se llevan a cabo dentro de un grupo de personas: comunidades o grupos sociales. Dentro de las tesis de Vygotsky se recalca que las actividades se desarrollan primero en los ámbitos sociales para después pasar al plano de lo personal.

... en el desarrollo cultural del niño, toda función aparece dos veces: primero, a nivel social, y más tarde, a nivel individual; primero entre personas (intersicológica), y después, en el interior del propio niño (intrascologica) (Vygotsky, 1932, p. 94)

Cuando hace referencia a “toda función” está mencionando a los “procesos psicológicos superiores” y según este autor, estos procesos tienen un origen en la cultura y no en las personas. Vygotsky (1932) se apoya para validar esta concepción a través de nociones como herramientas, las cuales a su parecer conectan las actividades entre las personas; estas

herramientas son las que median la acción y por lo consiguiente conectan a los humanos no solo con los objetos del medio, sino también con otras personas, a causa de ello, las actividades humanas van encaminadas a asimilar la experiencia de la humanidad (Wertsch, 1997).

Con ello se hace referencia a que el uso de una herramienta (por ejemplo un martillo), implica no sólo su aplicación, sino también lleva implícito una larga historia para su uso, ya que puede ser utilizada como arma mortal, como una fuente de amenaza o también para realizar otras acciones las cuales no son precisamente las propias.

Conceptos enfocados al desarrollo de la cultura básica en cuanto a competencias

Dentro del modelo de enseñanza *Aprender Matemáticas, Haciendo Matemática* (Flores, 2007), se considera la existencia de un acoplamiento entre los enfoques centrados en el aprendizaje en general y el aprendizaje individual. Para ello se basa en cuatro dominios los cuales son:

- ❖ Metacognitivo y congitivo.
- ❖ Afectivo y motivacional.
- ❖ Social y de desarrollo.
- ❖ De factores de diferencias individuales.

Estos cuatro dominios, se engloban en las actividades de enseñanza y evaluación a partir de la creación de un ambiente de enseñanza-aprendizaje de cooperación.

Dentro del modelo *Aprender Matemática, Haciendo Matemática* (AMHM) se considera que un individuo posee una Cultura Básica en Matemática cuando:

El estudiante presenta un Pensamiento Matemático cuando es capaz de encontrar patrones que le lleven a una generalización y argumente sus resultados en términos de sus descubrimientos.

- ❖ El estudiante puede resolver problemas matemáticos ya sean dentro del mismo contexto matemático o fuera de él.
- ❖ La capacidad de utilizar la tecnología como una herramienta para facilitarle la resolución de problemas matemáticos y la adquisición de nuevo conocimiento.
- ❖ Presenta actitudes positivas cuando se enfrenta a tareas matemáticas, para ello debe de argumentar sus soluciones ante sus compañeros, con ello, el alumno observa que las actividades realizadas son para beneficio propio así como para sus compañeros.

- ❖ Valores humanos desarrollados a través de la convivencia con sus semejantes y su ambiente.

Para que el alumno desarrolle una Cultura Básica en Matemática debe estar inmerso en un ambiente en donde el estudiante se sienta responsable por la adquisición de su conocimiento, se fomenten conocimientos y competencias matemáticas básicas así como la promoción de actitudes y valores humanos.

De esta forma, se divide la Cultura Básica en dos aspectos fundamentales: Competencias y Cualidades Personales.

En el modelo de enseñanza AMHM, se entiende por competencia a la capacidad para el desarrollo de alguna cosa. Dentro de la Cultura Básica en Matemáticas, se consideran al Pensamiento Matemático, la Resolución de Problemas y Uso de la Tecnología como promotores de competencias. Estos tres aspectos engloban la mayoría de las competencias matemáticas que define Niss (2003) que fueron adoptadas por la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (2005) en su evaluación Program for International Student Assessment (PISA, 2005).

En lo que referente a Cualidades Personales, hacemos referencia a una virtud o rasgo positivo que caracteriza a un individuo o grupo de personas, por ello, dentro de la Cultura Básica en Matemáticas son consideradas como Cualidades Personales las Actitudes Positivas hacia la matemática y los Valores Humanos.

En AMHM, las competencias se desarrollan a través de las actividades de enseñanza y evaluación, que tienen una doble función:

- ❖ Utilizar la matemática que conoce y aprender la que no conoce.
- ❖ Evaluar el proceso de enseñanza y aprendizaje.

Las actividades de enseñanza - aprendizaje las dividimos en tres:

- ❖ *Actividades de exploración:* su propósito es que el estudiante al plantearle una serie de preguntas debe realizar conjeturas, donde será validada ante sus compañeros y con ello pone en juego sus esquemas de argumentación.
- ❖ *Actividades de modelación:* es aquí donde se utiliza la matemática de otros ámbitos del conocimiento. Definimos a la Modelación Matemática como los pasos que deben realizarse para la obtención de un modelo matemático el cual reproduzca los datos del fenómeno, ya sea estos de tipo físico, social o de cualquier otra área de conocimiento.

El modelo matemático es una expresión de tipo matemático como una ecuación, una función, una desigualdad o cualquiera de sus representaciones. Dentro de estas actividades, el alumno debe tomar decisiones sobre qué modelo se adapta mejor a la situación planteada así como los procedimientos para lograrlo. La modelación matemática se enmarcan en dos tipos de actividades:

- **Actividades Piensa y actúa:** Se le presentan al estudiante todos los datos o elementos para que logre obtener un modelo matemático el cual, reproduzca de la mejor manera la situación planteada.
- **Actividades de Ajuste de Curvas:** Son las actividades en donde al alumno se le presentan una serie de datos obtenidos a partir de una medición, con el propósito de que los manipule y obtenga un modelo matemático que represente de la mejor manera la gráfica de la situación planteada.
- ❖ **Actividades de problemas no rutinarios:** Son situaciones en donde al estudiante para resolverlas utiliza sus conocimientos, estrategias de resolución de problemas e ingenio para reconocer patrones y lograr la generalización.

Consideramos que el uso de la tecnología, (software o de calculadora CAS) fortalecen las actividades de enseñanza ya que a través de estas se facilitan las tareas matemáticas y propicia la comunicación entre los integrantes del grupo.

El experimento se realizó con los alumnos del segundo semestre del Telebachillerato de Tonayan, los cuales manifiestan no haber concluido su curso de Matemáticas I, es decir, no estudiaron los temas referentes a ecuaciones lineales ni los métodos en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales. El grupo de investigación se encuentra integrado por una matrícula de 25 alumnos, todos ellos con antecedentes de haber estudiado en alguna institución de Telesecundaria cuyas edades oscilan entre los 15 y 17 años de edad de los cuales 17 residen en la misma localidad y los restantes pertenecen a localidades cercanas al centro de estudio, a una distancia máxima de 3 km.

Metodología

El experimento se desarrolló bajo la visión de un curso adicional fuera de los contenidos curriculares del segundo semestre, ya que los temas referidos a la resolución de sistemas de ecuaciones lineales no los habían estudiados en su curso anterior.

Se propone un conjunto de dos actividades para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales 2×2 , una actividad que ayude a pasar de un sistema 2×2 a uno de 3×3 , una actividad

para los sistemas 3×3 y una última actividad de un sistema de ecuaciones lineales con varias variables. En todas las actividades no se pensó en la utilización de alguna tecnología (calculadoras, computadoras, etcétera) para el desarrollo de las actividades, por ello los alumnos trabajaron con lápiz, hojas de trabajo, goma y hojas milimétricas. Cada actividad se programó para realizarse en 45 minutos, durante su horario normal de Matemáticas.

Los objetivos perseguidos en el curso son los mismos que se presentan en el programa de estudios de la Dirección General de Bachillerato los cuales son:

- ❖ Reconoce el modelo algebraico de un sistema de ecuaciones con dos incógnitas.
- ❖ Resuelve e interpreta sistemas de ecuaciones dos incógnitas mediante el método:
 - Suma y Resta.
 - Sustitución.
 - Igualación.
 - Gráfico.
- ❖ Reconoce el modelo algebraico de un sistema de ecuaciones con tres incógnitas.
- ❖ Resuelve e interpreta sistemas de ecuaciones con tres incógnitas mediante el método:
 - Suma y Resta.
 - Sustitución.
 - Igualación.

Los objetivos que se buscan en nuestra investigación son:

- ❖ Desarrollar una estrategia de enseñanza aprendizaje en el tema de sistemas de ecuaciones lineales acorde al modelo *Aprender Matemática, Haciendo Matemática*.
- ❖ Investigar cómo afecta el modelo de enseñanza *Aprender Matemática, Haciendo Matemática* en el aprendizaje de la resolución de sistemas de ecuaciones lineales.

En cada actividad planeada, los alumnos se integran en equipos de dos (Solo un equipo trabaja con tres integrantes), y en cada sesión los integrantes son rotados. Se les permite, de acuerdo al modelo de enseñanza aprendizaje *Aprender Matemática, Haciendo Matemática* que los integrantes de los equipos puedan intercambiar ideas con otros equipos, además, el instructor (el que escribe) participe en la dinámica de clases monitoreando las actividades de los alumnos y en algunas ocasiones dando sugerencias sobre cómo resolver el problema o llevando una sugerencia que algún equipo ha planteado.

Al final de la actividad, los alumnos deben intercambiar sus procedimientos y métodos de solución, a través de la argumentación con el propósito de que ellos mismo validen sus resultados o en caso de presentar alguna discrepancia, argumento los porqués de ello.

Justificación de las actividades propuestas

Las actividades se desarrollan pensando que el nivel cognitivo necesario para resolverlos aumente representando al alumno un nuevo reto y a su vez le sea motivante. Por ello, se realizó un análisis de como la guía de Matemáticas I, que se utiliza en el Telebachillerato del Estado de Veracruz; se observa que el método gráfico para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales 2×2 se presenta al final del bloque. Para nuestro caso se decidió empezar con el método gráfico, ya que creemos que no se requieren niveles cognitivos altos para entenderlo.

La Actividad 1 se encuentra diseñada para que el alumno busque la respuesta al problema a través del método de graficación. En una primera instancia, se solicita a los alumnos que busquen las expresiones algebraicas donde se representen las condiciones del enunciado, posteriormente se solicita una tabulación de ambas ecuaciones y que encuentren los valores de la segunda variable. Los valores encontrados deberán ser graficados y se deberá localizar el punto de intersección de ambas gráficas. Esta actividad, es considerada como una actividad de exploración.

La Actividad 2 se encuentra enmarcada dentro de las actividades de modelación, específicamente dentro de la forma Piensa y Actúa del modelo de enseñanza *Aprender Matemática, Haciendo Matemática*; en ella, el alumno debe encontrar dos ecuaciones con dos incógnitas y contestar las preguntas al ejercicio. Los alumnos deberán buscar opciones para resolver estos sistemas, empleando cualquiera de los tres posibles métodos (sustitución, suma resta y eliminación), se tiene la tesis de que los alumnos encontraran diferentes maneras de resolver la actividad y que cada grupo exprese su método; al final deberán elegir cuál de los 3 métodos les acomoda mejor de acuerdo con su gusto personal.

La Actividad 3 se encuentra encuadrada dentro de las actividades de Ajuste de Curvas en la Modelación Matemática. Esta actividad tiene un doble propósito, por una parte el alumno busca un modelo que se ajuste mejor al problema y por otra, dicho ajuste se realiza a través de la resolución de sistemas lineales.

La Actividad 4 se enmarca dentro de las actividades de Piensa y Actúa buscando la solución al problema de un sistema de ecuaciones de 3×3 . En esta actividad se busca verificar el grado de dominio por parte de los estudiantes sobre los temas abordados.

La Actividad 5 se considera un problema no rutinario en donde el alumno, para poder resolverla, tendrá que poner en juego los conocimientos adquiridos durante la experiencia. Esta actividad también puede ser considerada como de Modelación Matemática.

Resultado y conclusiones

Al momento de realizar el presente reporte, el experimento se encuentra en su proceso de aplicación y en el análisis de los instrumentos de evaluación sin embargo, podemos comentar que en las actividades planeadas existe una mejora el aprendizaje de los métodos utilizados para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales, es decir, la Modelación Matemática presenta un impacto importante en el aprendizaje de la resolución de sistemas de ecuaciones lineales dentro de nuestro modelo de enseñanza *Aprender Matemática, Haciendo Matemática*

Referencias bibliográficas

- Flores, A. H. (2007). *Aprender Matemática, Haciendo Matemática: modelo de enseñanza centrado en el estudiante. Acta Scientiae* 9.
- Niss, M. (2003). The Danish KOM project and possible consequence for teacher education. En R. Strässer, G Brandell & B. Grevholm (Eds.) *Educating for the future. Proceedings of an international symposium on mathematics teacher education, 179-192*. Göteborg: Royal Swedish Academy of Sciences.
- OCDE (2005) *Informe PISA 2003 Aprender para el mundo del mañana*. Madrid. Santillana
- Vygotsky, L. S. (1978). *Mind in Society, The development of Higher Psychological Processes*. Harvard University Press.
- Vygotsky, L. (1932). *El Desarrollo de los Procesos Psicológicos Superiores*. México. Grijalbo.
- Vygotsky, L. (1934). *Pensamiento y Lenguaje*. Barcelona: Paidós.
- Wertsch, J. (1997). *Memoria colectiva: cuestiones relacionadas con una perspectiva sociohistórica*. En M. Cole, Y. Engestra, O. Vazquez. *Mente, Cultura y Actividad, 183-188*. México: Oxford.