

UNA APROXIMACIÓN COGNITIVA DEL CONCEPTO DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES CON DOS INCOGNITAS

Elia Trejo Trejo, Patricia Camarena Gallardo
UTVM/CICATA-IPN; ESIME-IPN
elitret@hotmail.com

México

Campo de investigación: Resolución de problemas

Nivel: Superior

Resumen. Durante muchos años en el sistema educativo se consideró el proceso de enseñanza aprendizaje de las matemáticas como una actividad ubicada en el aula, siendo el único espacio donde el que sabe, el profesor, dota de conocimientos al que aprende, el alumno. Este tipo de enseñanza, sin considerarla mala, trae como consecuencia que al enfrentar al estudiante a un problema real tenga dificultades para su solución. En este artículo se reporta parte de una investigación cuyo objetivo fue a entender el conocimiento que surge en la interacción entre dos contextos diferentes: uno el matemático y el otro el derivado de un área técnica en particular. Se describe el conocimiento de un grupo de enfoque relativo al campo conceptual de un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas en el contexto del balance de materia. La aproximación cognitiva del campo conceptual de interés, se ha realizado sustentado en la Teoría de Campos Conceptuales de Vergnaud y se trabaja con la Matemática en el Contexto de las Ciencias como marco de referencia.

Palabras clave: Contexto, ecuaciones, campos conceptuales, cognitivo

Introducción

En el nivel de Técnico Superior Universitario las matemáticas son consideradas una herramienta para resolver favorablemente problemas técnicos tanto del área de formación como profesional, por lo cual se pide vincular los conocimientos matemáticos con los de áreas específicas de formación de los futuros profesionistas. Sin embargo, en la práctica el proceso de enseñanza aprendizaje de las matemáticas ha sido una actividad meramente algorítmica y ubicada en el aula, siendo el único espacio donde el que sabe, el profesor, dota de conocimientos al que aprende, el alumno. Este tipo de enseñanza, sin considerarla mala, trae como consecuencia que al enfrentar al estudiante a un problema real tenga dificultades para su solución. Razón por la cual se plantea como estrategia didáctica a la matemática en contexto (Camarena, 2006) estableciendo que es a través de situaciones en contexto como se puede contribuir a que el estudiante sea competente en la resolución de “problemas contextualizados”, “problemas del mundo real”, “problemas relacionados con el trabajo” o “problemas situados” (Font, 2006).

En esta investigación se reportan los primeros resultados de una propuesta de análisis cognitivo de un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas en el contexto de un problema del área de

competencia de un Técnico Superior Universitario en Tecnología de Alimentos. El interés de esta investigación de carácter cognitivo es tratar de entender los procesos mentales utilizados por los estudiantes al resolver problemas contextualizados para comprender sus fallos y establecer propuestas didácticas encaminadas a un aprendizaje significativo mejorando como consecuencia sus competencias. Se propone entonces vincular el concepto matemático de sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas con el concepto de balance de materia. Para lograr este doble cometido (análisis cognitivo e integración de conocimientos matemáticos con los técnicos) se establece como marco teórico a los Campos Conceptuales de Vergnaud (1990) y como marco teórico de referencia a la Matemática en Contexto de las (Camarena, 2006). En esta dirección se tienen entre otras algunas investigaciones de carácter cognitivo como las de Muro y Camarena (2002), Trejo y Camarena (2005) y Zúñiga y Camarena (2007) y quienes a través del uso de diferentes marcos teóricos proponen estudios tendientes a desarrollar diferentes propuestas didácticas donde el contexto es un elemento importante para las mismas; se ha concluido que la motivación es importante para que los estudiantes se comprometan con su aprendizaje y se obtengan aprendizajes significativos que en un momento dado pueden aplicar en sus áreas profesionales.

Metodología (o Métodos)

La investigación se realiza en varias etapas, las cuales se describen a continuación.

- 1) Integración del campo conceptual de sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas en el contexto del balance de materia, en situaciones de mezclado de soluciones químicas.
- 2) La actuación de los estudiantes sobre el campo conceptual de un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas en el balance de materia. Derivado del campo conceptual obtenido en el punto 1 se generan las situaciones que le dan utilidad y significado al concepto.
- 3) Aproximación cognitiva al campo conceptual de sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas, misma que se realiza a través de la Teoría de los Campos Conceptuales de Vergnaud (1990) atendiendo los esquema mentales utilizando para ello la clasificación de representaciones por Flores (2005).

El grupo de enfoque estuvo formado por dos estudiantes de 17 años de edad, quienes cursaban Matemáticas I en el Programa Educativo de Tecnología de Alimentos de la Universidad Tecnológica del Valle del Mezquital, ubicada en Ixmiquilpan, Hidalgo México; se enfrentaron a situaciones (en el sentido de Vergnaud) de salón de clases (lápiz y papel) y de laboratorio. Se diseñaron cuatro situaciones cada una con tareas y actividades

Resultados y discusión

Atendiendo la metodología señalada previamente se muestran brevemente algunos de los resultados obtenidos durante el desarrollo de la investigación.

1) Integración del campo conceptual a través de la matemática en contexto.

La caracterización de los sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas en el balance de materia consistió en realizar un estudio de la vinculación establecida entre ambas. Para ello, mediante las etapas de la matemática en contexto se analiza el proceso de contextualización de un problema matemático particular.

1. Planteamiento del problema contextualizado.

Se tienen preparadas soluciones azucaradas al 35% y 60%. Usted requiere preparar 100 mL de solución azucarada al 50% utilizando la solución al 35% y 60% ¿Cuántos mL de cada una deberán agregarse para obtener la mezcla a la concentración deseada?. Resolver el problema algebraica y gráficamente.

2. Determinación de variables y constantes

Un paso importante dentro de la fase didáctica de la matemática en contexto es la determinación del modelo matemático del problema contextualizado, para lo cual es necesario establecer las variables y constantes del mismo, para este caso se muestran en la tabla 1 y figura 1.



Figura 1. Balance de materia para la mezcla de soluciones azucaradas

Tabla 1. Variables y constantes del problema contextualizado

Variables	Constantes
mL a tomar de solución al 35 y 60%	Concentración de soluciones azucarada a utilizar (35% y 60%)
	Volumen final (100 mL). Concentración final (50%)

3. Determinación del modelo matemático

El modelo matemático queda representado por dos ecuaciones con dos incógnitas, una para el volumen y otra para la concentración (figura 2).

a) Ec. de Volumen	$x + y = 100$
b) Ec. de concentración	$0.35x + 0.60y = 0.50(100)$

Figura 2. Modelo matemático al problema contextualizado propuesto.

4. Solución matemática del problema contextualizado.

El sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas se resuelve por el método de reducción (tabla 2).

Tabla 2. Resolución matemática del problema contextualizado

Modelo matemático (Registro algebraico)	a) Ec. de Volumen $x + y = 100$ b) Ec. de concentración $0.35x + 0.60y = 0.50(100)$
Solución algebraica Método de reducción y Solución gráfica (Registro gráfico)	$\begin{array}{r} x + y = 100 \quad 0.35 \Rightarrow -0.35x - 0.35y = -35 \quad y = \frac{15}{0.25} \\ 0.35x + 0.60y = 0.50(100) \Rightarrow \underline{0.35x + 0.60y = 50} \\ 0 \quad + 0.25y = 15 \quad y=60; X=40 \end{array}$

5. Solución e interpretación requerida por el contexto y en términos del problema.

Para la preparación de 100 mL de solución azucarada con una concentración del 50% a partir de una mezcla de soluciones al 35 y 50% se deben mezclar 20 mL de la solución al 35% y 60 mL al 60%.

II) Determinación de las situaciones.

Partiendo de la integración del campo conceptual de un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas en el contexto del balance de materia y con el objetivo de realizar la aproximación cognitiva del mismo fue necesario definir las situaciones (Vergnaud, 1990) sobre las cuales los estudiantes debieron actuar. De esta manera el campo conceptual de sistema de ecuaciones lineales se formó por un conjunto de situaciones enmarcadas en el mezclado de sustancias químicas, proponiéndose una serie de tareas. Se elaboró una actividad en la cual se trabajaron cuatro situaciones con tareas específicas para cada una de ellas, la característica principal fue la vinculación del concepto matemático con los conceptos del área técnica. Las situaciones fueron (figura 3):

- a. Estado inicial del campo conceptual (CC) de sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas (SEL2) en el balance de materia (MB).
- b. Comprensión del fenómeno contextualizado.
- c. Mezclado de soluciones químicas.
- d. Aplicación en la industrial.

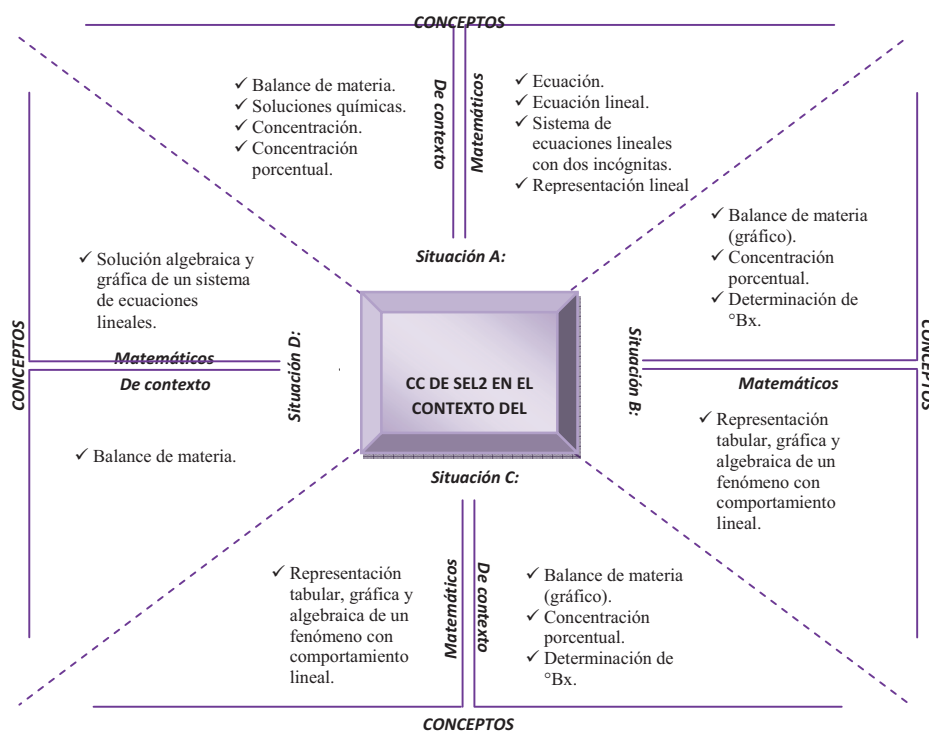


Figura 3. Diseño de situaciones derivadas de la integración del campo conceptual de sistema de ecuaciones lineales en el contexto del balance de materia.

III. Aproximación cognitiva

La aproximación cognitiva del concepto de interés se realizó en cada una de las etapas de las situaciones planteadas analizando el tipo de representación (Flores, 2005) utilizados por el grupo de enfoque (figura 4); se comparó un campo conceptual de un sistema de ecuaciones lineales ideal con el obtenido durante la puesta en escena de las situaciones. Se pudo observar un dominio progresivo del campo conceptual conforme el grupo de enfoque actuó para atender dichas situaciones.

Campo conceptual esperado "ideal"

S	A: Estado inicial															
	T	1													2	
		AC	1	2	3	4	5	6	7	8	9	#	1	#		#
EE	C	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■
	NC															
ES	A	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■
	NA															
CR	NC															
	C															
	CN															
	CAA															
	CA	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■

Campo conceptual encontrado

S	A: Estado inicial															
	T	1													2	
		AC	1	2	3	4	5	6	7	8	9	#	1	#		#
EE	C	■	■	■	■	■	■	■	■		■	■	■	■	■	■
	NC								■	■						?
ES	A			■			■	■	?	?						?
	NA	■	■		■	■			?	?	■	■	■	■	■	?
CR	NC								■	■						?
	C															?
	CN	■	■			■	■				■	■	■	■	■	?
	CAA			■												?
	CA								■							?

S	B: Comprensión del fenómeno									
	T	1			2			3		
		AC	1	2	3	1	2	3	1	2
EE	C	■	■	■	■	■	■	■	■	■
	NC									
ES	A	■	■	■	■	■	■	■	■	■
	NA									
CR	NC									
	C									
	CN									
	CAA									
	CA	■	■	■	■	■	■	■	■	■

S	B: Comprensión del fenómeno									
	T	1			2			3		
		AC	1	2	3	1	2	3	1	2
EE	C	■	■	■	■	■	■	■	■	■
	NC									
ES	A	■			■			■		
	NA		■	■		■	■		■	■
CR	NC									
	C									
	CN		■	■		■	■		■	■
	CAA									
	CA	■				■				

En la actividad 1 de la tarea 3 hay un traslado de la representación simbólica tabular a la gráfica y a la algebraica que posibilitan el entendimiento y resolución de la tarea propuesta .

S	C: Mezclado						
	T	1	2	3			
		AC	1	2	1		
EE	C	■	■	■			
	NC						
ES	A	■	■	■			
	NA						
CR	NC						
	C						
	CN						
	CAA						
	CA	■	■	■			

S	C: Mezclado						
	T	1	2	3			
		AC	1	1	1		
EE	C	■	■	■			
	NC			■			
ES	A	■	■	■			
	NA			■			
CR	NC			■			
	C						
	CN						
	CAA						
	CA	■	■	■			

En la tarea 3 actividad 1 se considera el primer esquema de entendimiento y solución, sin embargo el grupo de enfoque paso del NC-NA al NC-A hasta llegar al CA para dar solución a la actividad.

La solución obtenida con la representación algebraica se corrobora con la gráfica.

S	D: Aplicación			
	T	1		2
AC	1	2		
EE	C			
	NC			
ES	A			
	NA			
CR	NC			
	C			
	CN			
	CAA			
	CA			

S	D: Aplicación			
	T	1		2
AC	1	2		
EE	C			
	NC			
ES	A			
	NA			
C R	NC			Se observa un dominio mayor del campo conceptual en cuestión.
	C			
	CN			
	CAA			
	CA			

NOTA: S=situación; T=tarea; AC=Actividad; EE=Esquema de entendimiento; ES=esquema de solución; CR=categoría de representación; C=canónica; NC=no canónica; A=algorítmica; AN=no algorítmica; CAA=canónica algorítmica con esquema de solución no algorítmica.

Figura 4. Aproximación cognitiva del campo conceptual de un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas en el contexto de un balance de materia.

Conclusiones

Los avances de la presente investigación permiten hasta el momento llegar a las conclusiones siguientes:

- ✓ Los problemas contextualizados posibilita dotar de significado a las matemáticas al mostrar al alumno dónde aplicarlas en su vida profesional o laboral, cobrando interés por su estudio.
- ✓ Al realizar el estudio del conocimiento del grupo de enfoque se ha realizado el análisis de la forma invariante de la organización de la actividad y de la conducta de los estudiantes en este tipo de situaciones. Los esquemas mentales se han aproximado mediante el esquema de entendimiento y solución durante el desarrollo de las tareas y actividades de cada una de las situaciones.
- ✓ El desarrollo de esquemas alcanzado por el grupo de enfoque, les permitió usar conceptos del campo conceptual en sus acciones sobre las situaciones propuestas, con explicaciones que reflejan una organización, comprensión de significados y uso de operaciones y representaciones simbólicas de los conceptos.
- ✓ Si bien, los estudiantes, al final de las sesiones, disponen de esquemas apropiados para enfrentar situaciones que requieren la aplicación de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas (tanto algebraica como gráficamente) es necesario explorar más sobre ello.

Referencias bibliográficas

Camarena, G. P. (2006). La Matemática en el Contexto de las Ciencias en los retos educativos del siglo XXI. *Científica*. 10 (4). 167-173.

Flores, M. R.C. (2005). El significado del algoritmo de la sustracción en la solución de problemas. *Educación Matemática*. 17 (02), 7-34.

Font, V. (2006). Problemas en un contexto cotidiano. *Cuadernos de pedagogía*, 355, 52-54.

Muro, U.C.; Camarena, G. P (2000). *Las series de Fourier en la transferencia de masa*. Tesis de maestría no publicada. UAEH. México.

Trejo, T. E. y Camarena, G. P. (2005). *La ecuación diferencial en el contexto de las reacciones químicas de primer orden*. Tesis de doctorado no publicada. UAEH. México.

Vergnaud, G. (1990) La teoría de los campos conceptuales, en *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 10 (2/3), 133-170.

Zúñiga, L. (2007). El cálculo en carreras de ingeniería: un estudio cognitivo. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa* 10(1). 145-174.