

## FRACCIONES NEGATIVAS Y LAS NOCIONES PREVIAS PARA EL RECONOCIMIENTO DE SU SIGNIFICADO POR ESTUDIANTES DE SECUNDARIA

Aurora Gallardo Gil Saavedra

Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN

agallardo@cinvestav.mx, gsaavedra@cinvestav.mx

(México)

**Resumen.** Esta investigación aporta elementos teóricos al estudio de las fracciones negativas, problemática poco abordada a nivel secundaria. Los resultados obtenidos apuntan a la necesidad de que los estudiantes dominen el significado de fracción positiva para poder dotar de sentido a la fracción negativa en problemas no rutinarios. El significado más frecuente de la fracción positiva encontrado en los alumnos, es el de “medida”, perteneciente al mecanismo constructivo de partición, ello obstaculiza concebir la fracción negativa; mientras que los significados de “operador” y “razón”, permiten su reconocimiento

**Palabras clave:** fracción negativa, significado, sentido, enseñanza

**Abstract.** This research provides theoretical elements to the study of negative fractions. The present topic has been poorly discussed at secondary school. The results point to the need for students to acknowledge the different meanings of positive fractions in order to make sense of negative fractions in non-routine problems. The most common meaning of positive fractions found in students' work is as "measure", belonging to the constructive mechanism of partition. This meaning obstructs the appearance of negative fractions, while the meaning of "operator" and "rate", allows recognition of negative ones.

**Key words:** negative fraction, meaning, sense, teaching

Con la presente investigación se pretende dar respuesta a la interrogante sobre las implicaciones para la enseñanza de fracciones negativas en educación secundaria. Este ciclo escolar puede cursarse en tres modalidades distintas: Secundaria General o Diurna, Secundaria Técnica y Telesecundaria; el presente proyecto se realiza en un ambiente de aula en una escuela Telesecundaria con alumnos que cursan el tercer grado. Se ha elegido este grado porque se considera que es ahí donde se posibilita de una manera más clara la visualización de las nociones previas para el manejo de la enseñanza de las fracciones negativas y los problemas que se generan durante el tratamiento de este tema.

Los resultados obtenidos en esta investigación apuntan a la necesidad de que los estudiantes dominen el significado de fracción positiva para poder dotar de sentido a la fracción negativa en problemas no rutinarios.

### Planteamiento del problema

En México, la Educación Básica culmina con la Educación Secundaria normada por el Plan y Programas de Estudio (SEP, 2006); para el caso de la asignatura de Matemáticas, se ha realizado una revisión curricular a este programa y no se encontró el tratamiento de las fracciones negativas enunciado como tal, solamente son consideradas como cocientes de números con

signo, cuando se realizan multiplicaciones y divisiones de fracciones; en el tema de ecuación de la recta cuando ésta presenta una pendiente fraccionaria negativa, o como soluciones de ecuaciones de primero o segundo grado. También emergen en: sucesiones y en la homotecia. Sin embargo, su aparición es siempre de manera súbita, es decir, sin darle mayor importancia al surgimiento de la negatividad que conduciría a reflexionar sobre su tratamiento, e incluso se le resta importancia.

El Programa de Estudios de Matemáticas vigente actualmente, está dividido en tres ejes temáticos: Sentido Numérico y Pensamiento Algebraico; Forma, espacio y medida; y, Manejo de la información. Dado el nombre del eje Sentido numérico y pensamiento algebraico, se esperaría encontrar el tratamiento de las fracciones negativas dentro de éste. Sin embargo, como anteriormente se dijo no es así, incluso, en el tema: Significado y uso de las operaciones, existe una leyenda que a la letra menciona:

Puesto que no abundan los problemas reales que impliquen la multiplicación y división de números con signo (multiplicar o dividir temperaturas, elevaciones y depresiones no tiene sentido), se pueden plantear problemas numéricos que seguramente serán retos interesantes. Por ejemplo:

Pensé un número. Al multiplicarlo por  $-7$  y enseguida restar  $49$  obtengo cero.  
¿De qué número se trata? (S. E. P., 2006, p. 67)

Lo anterior es tal vez una muestra de la escasa importancia que se le da al tratamiento de los números negativos y mucho más al tema de fracciones negativas, ya que no existen de manera explícita.

Nos planteamos el problema de investigación:

Indagar sobre las implicaciones para la enseñanza de fracciones negativas en Educación Secundaria.

Este planteamiento nos conduce a las siguientes preguntas de investigación:

¿Qué significado de las fracciones positivas deben poseer los estudiantes, que les permitan dotar de significado y sentido a las fracciones negativas?

¿Qué sentido de uso de los números negativos permite dotar de significado a las fracciones negativas?

### Marco teórico

Para el análisis de las nociones previas sobre el tema de fracciones, se han tomado en cuenta autores dentro del campo de la Matemática Educativa; uno de ellos es Freudenthal (1983),

quien establece los criterios que a su juicio lo llevan a preferir llamar fracciones a los números racionales; dadas las implicaciones en la organización didáctica de estos números, denomina como fracción a las distintas expresiones fraccionarias del mismo número racional. También sostiene que las fracciones son el recurso organizador del número racional. Desde su punto de vista la palabra fracción está relacionada con romper: fracturar, mientras que racional está relacionado con razón desde el punto de vista de proporción, de medida.

Uno de los fenómenos en los que Freudenthal hace hincapié, es en la polifacética sobrevivencia de las fracciones a nivel del lenguaje cotidiano; las fracciones aparecen en el ámbito lingüístico apelando a presentaciones más o menos directas; destaca en particular, el uso de algunos ordinales como denominadores, lo cual supone para los estudiantes una fuente generadora de muchas distorsiones semánticas. Lo que este autor resalta, es el origen histórico de algunas de dichas designaciones ordinales del denominador, tomando como ejemplo supremo, el caso de los décimos, los cuales en diferentes culturas emergieron como sucesores del conteo.

Abordando el tema de la didáctica de fracciones, Freudenthal (1983) advierte que ésta ha sido caracterizada por una tendencia unificadora, suponiendo que los aprendices han ya superado los obstáculos con los números naturales. Ello provoca que el tratamiento de las fracciones funcione peor que el de los números naturales. La fracción puede ser vista como fracturador, que en el más sencillo de los casos corresponde a repartir en partes equitativas (parte y todo); añade que también se puede ver a la fracción como comparador, las fracciones sirven para comparar objetos que se separan uno de otro (relación de razón); igual puede encontrarse a la fracción como operador, en el que se entiende a la fracción como un número de medida.

Otro autor consultado sobre el tema de fracciones es Kieren (1983). Él advierte el complejo proceso de construcción de estos números que incluye varias experiencias matemáticas del pensamiento tales como: particiones, la identificación de partes y formación de equivalencias usando una variedad de imágenes y madurando desde lo metafórico hasta el uso del lenguaje formal de la fracción. Este autor menciona que el conocimiento de la fracción se compone de cuatro subsistemas o constructos: medidas, cocientes, razones y operadores, los cuales aluden a la significación de la fracción en los estudiantes. También afirma que el lenguaje de parejas ordenadas está basado en un quinto constructo: la relación parte-todo. Los significados antes mencionados, se caracterizan por presentar “cualidades” primordialmente aditivas (para el caso de los subconstructos medida y cociente), o bien multiplicativas (para los casos de razón y operador).

Refiriéndose a los contenidos que Kieren reconoce y asigna a los constructos, los aspectos más relevantes que destaca son; la fracción es asociada al significado de cociente, en marcos

donde se desarrollan situaciones concretas de reparto que están referidas a conjuntos discretos. Cuando la fracción permanece asociada a la medición, es decir, en aquellas situaciones en que el soporte fundamental es la noción de magnitud, el contenido semántico es el de medida. El reconocimiento de fracción como razón, destaca un acceso menos formal que el expresado a través de la noción de par ordenado. La fracción cumple con su función de contractor o dilatador a través del constructo de operador, cuando queda vinculada a la manipulación de un conjunto sobre otro.

La semántica que se atribuye a las fracciones se proyecta hacia las construcciones formales del respectivo lenguaje, lo que implica una redefinición de los dominios aditivos y multiplicativos. Para Kieren, el quinto constructo: parte – todo, constituye el “constructo generador del lenguaje” dado que se encuentra íntimamente relacionado a los mecanismos constructivos, además de asociarse este quinto constructo a los otros cuatro a través de una unidad apropiada para cada circunstancia. Este autor concede al lenguaje de las fracciones un rol primordialmente orientador, ya que mediante su uso no formal, se encamina al estudiante hacia los “objetos-acciones”.

En relación al número negativo, nos apoyamos en Gallardo (1999) quien realizó un estudio histórico – epistemológico – didáctico, donde identificó 4 sentidos de uso de los números negativos por estudiantes de entre 12 y 13 años de edad, a saber:

1. Número Sustractivo, donde la noción de número está subordinada a la magnitud, por ejemplo, en  $a - b$ ,  $a$  es siempre mayor que  $b$ .
2. Número Signado, cuando el número tiene un signo + ó -, sin que tenga ningún sentido contextual. Su uso es en la sintaxis para las reglas de la adición y sustracción.
3. Número Relativo o Número Dirigido, donde la idea de cantidades opuestas en relación a una cantidad surge en el dominio discreto y la idea de simetría aparece en el dominio continuo.
4. Número Aislado, surge cuando el número negativo es el resultado de alguna ecuación o problema. (Gallardo, 2002, p. 179).

Es importante señalar que la conjugación de los aportes hechos por Freudenthal (aparición de las fracciones en el ámbito lingüístico y su vinculación con los decimales), de Kieren (cinco significados de las fracciones encontrados en los estudiantes) y de Gallardo (cuatro sentidos de uso del negativo identificados en autores de textos históricos y en alumnos del presente) es lo que fundamenta sólidamente el marco teórico de esta investigación en ciernes.

## Método

Para responder a las interrogantes planteadas, se ha recurrido a una investigación de corte cualitativo ya que este paradigma hace aportaciones importantes al realizar estudios sobre los procesos cognitivos del sujeto durante la adquisición de conceptos matemáticos (Gallardo, 1999).

Nos hemos apoyado en los aspectos metodológicos de los Modelos Teóricos Locales (MTL) (Fillooy, 1999), donde desempeña un papel central la idea de que lo que se elabora es tanto para organizar una investigación, como para organizar los resultados de la investigación.

El modelo tiene un carácter descriptivo, explicativo y predictivo, pero no excluye que los mismos fenómenos puedan describirse, explicarse y predecirse de otra manera, es decir, mediante otro modelo; en esto se diferencia la elaboración del modelo de la que suele acompañar a la elaboración de una teoría, que implica la exclusión de cualquier otra teoría que se utilice para explicar los mismos hechos (Puig, 2006).

El MTL, consta de cuatro componentes:

- Componente de Competencia.
- Componente de los Procesos Cognitivos.
- Componente de Enseñanza.
- Componente de Comunicación.

Fillooy, establece la diferencia entre Significado, que es el campo semántico del objeto matemático, y Sentido que se refiere al campo semántico personal del sujeto. Este modelo, se apoya en la semiótica para comprender los procesos de significado y sentido en la actividad matemática escolar, dado que los signos matemáticos no son todos ellos de naturaleza lingüística (Puig, 2003).

Fillooy (1999), acuña el término “Sistema Matemático de Signos” (SMS) que describe las producciones de los estudiantes en entrevista clínica o en situación de aula.

El carácter Local del MTL, se debe al hecho de que trata de explicar los fenómenos presentados durante el proceso de enseñanza aprendizaje de un contenido matemático concreto en un momento histórico determinado y con un grupo de personas específico.

### El estudio

La población seleccionada para nuestra investigación (Saavedra, 2011), corresponde a un grupo de 40 alumnos que cursan el tercer grado en la modalidad de Telesecundaria.

Se utilizan los siguientes instrumentos metodológicos:

- Cuestionario Exploratorio: Consta de 14 ejercicios cuyo objetivo primordial es evidenciar el manejo que tienen los sujetos sobre las fracciones y los números negativos.
- Entrevista Individual: Realizada a 3 alumnos, uno de cada estrato (alto, medio y bajo) según el rango de aciertos obtenidos en el cuestionario exploratorio, con el fin de realizar un estudio en profundidad y extensión.

Para la validación de los resultados, se recurre al Método de Triangulación (Cohen, 1990) de los datos obtenidos del cuestionario exploratorio y la entrevista individual.

Cabe aclarar, que para el análisis de los procesos cognitivos se recurrió a 11 categorías de “tendencias cognitivas”. Estas tendencias fueron definidas por Filloy dentro del MTL. Para el autor las tendencias cognitivas son aquellos hechos que surgen cuando en una situación de enseñanza (aula, cuestionario, entrevista) los estudiantes transitan de un SMS más concreto a otro más abstracto. En este artículo únicamente se exhibe a continuación, el diálogo de uno de los ejercicios resuelto por un alumno, donde se identifican dos de las tendencias cognitivas manifestadas por Filloy.

Se le pidió al estudiante que resolviera:

Escribe el signo  $>$  o  $<$  en el recuadro, según corresponda.

$$\frac{3}{4} \square \frac{2}{5}$$

$$-\frac{2}{3} \square -\frac{7}{5}$$

$$-5 \square -1$$

$$\frac{1}{4} \square -\frac{3}{7}$$

$$-\frac{11}{9} \square -\frac{1}{2}$$

$$-\frac{3}{4} \square \frac{3}{4}$$

### Resultado del análisis del ejercicio anterior

Fue posible vía diálogo en entrevista videograda con el estudiante, observar el significado de cociente en las fracciones positivas y negativas. Además se identificaron los sentidos de uso del número negativo como Número Signado, por ejemplo verbaliza  $-\frac{1}{2}$  como “menos un medio” y también como Número Relativo, ya que utilizó estos últimos para realizar una comparación. Es importante señalar que el alumno se maneja bien tanto en el dominio continuo como en el discreto.

Un hecho destacable es que el alumno recurre a la recta numérica, porque en ella le es posible comparar las cantidades solicitadas en el ejercicio. En este momento se observa que transita del SMS Numérico al SMS de la Recta. También recurre al esquema de fracciones equivalentes para tomar decisiones sobre cuál de las cantidades es mayor o menor (*Tendencia Cognitiva: La dotación de sentidos intermedios*), al considerar conveniente “convertir” las fracciones en sus equivalentes con un denominador común, y simultáneamente, (*Tendencia Cognitiva: El retorno a situaciones más concretas, cuando se presenta una situación de análisis*), recurre tanto a las fracciones equivalentes como a la posición de los números en la recta numérica.

Es posible identificar los significados de cociente y medida cuando, en un fragmento del diálogo de la entrevista el estudiante menciona: “*la mitad de cuatro sería dos*”, aquí se visualiza el cambio entre un SMS numérico a un SMS del lenguaje natural. Además maneja el significado de razón ya que compara con respecto a un mismo denominador e incluso no pierde de vista la negatividad pues en algún momento menciona: *porque como son números negativos entre más estén cerca del cero son más grandes*.

Se puede observar el significado Parte – Todo cuando hace las comparaciones de  $-1\frac{1}{9}$  y  $-1/2$ , ya que maneja bien las partes en que se ha dividido el entero y las que se han tomado de él para hacer las comparaciones.

Por lo anteriormente expuesto, podemos decir que:

- El significado más frecuente es el de “medida”, del mecanismo constructivo de partición, ello obstaculiza concebir la fracción negativa.
- El significado recurrente del número negativo es el de número sustractivo, ello impide comprender la fracción negativa.
- Algunos estudiantes arriban al significado de “operador” y “razón” que permitió el reconocimiento de la fracción como “número aislado” y como “número signado”.

### Referencias bibliográficas

- Cohen, L. (1990). *Métodos de Investigación Educativa*. Madrid: La Muralla.
- Filloy, E. (1999). *Aspectos teóricos del álgebra educativa*. México: Grupo Editorial Iberoamérica (Sociedad Mexicana de Matemática Educativa).
- Freudenthal, H. (1983). Fractions. En Freudenthal, H. (Ed), *Didactical phenomenology of mathematical structures* (pp. 133 – 177). Dordrecht: Reidel Publishing Company,.

- Gallardo, A. (1999). El paradigma cualitativo en matemática educativa. Elementos teórico-metodológicos de un estudio sobre números negativos. En Hitt, F. (comp), *Investigaciones en Matemática Educativa* (pp. 197 – 222). México: Grupo Editorial Iberoamérica.
- Gallardo, A. (2002). The extension of the natural – number domain to the integers in the transition from arithmetic to algebra. *Educational Studies in Mathematics vol. 49*, 171 – 192.
- Kieren, T. (1983). Partitioning, equivalence and the construction of Rational Number Ideas. *Proceedings of the Fourth International Congress on Mathematical Education*, 506-508.
- Puig, L. (2003). Signos, textos y sistemas matemáticos de signos. En Filloy, E. (Ed.) *Matemática Educativa: aspectos de la investigación actual* (pp. 174-186). México: Fondo de Cultura Económica / CINVESTAV.
- (2006). Sentido y elaboración del componente de competencia de los modelos teóricos locales en la investigación de la enseñanza y aprendizaje de contenidos matemáticos específicos. En Bolea, P.; González, M<sup>a</sup>. J. y Moreno, M. (Eds.) *Investigación en Educación Matemática. Actas del Décimo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática*, 107-126.
- Saavedra, G. (2011). *Estudio de las Fracciones Negativas en Educación Básica*. Tesis de maestría no publicada. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.
- S. E. P. (2006). *Educación básica. Secundaria. Matemáticas. Programas de estudio 2006*. México: S.E.P.