

ERRORES DE LOS ESTUDIANTES EN EL TRABAJO PRE-ALGEBRAICO

Tulio Rafael Amaya De Armas, Josefina del Carmen Gulfo de Puente
 Institución Educativa Madre Amalia de Sincelejo
 tuamal@hotmail.com, jgulfo26@hotmail.com

(Colombia)

Resumen. En este trabajo se comunican los resultados de una investigación donde se analizaron los errores que cometen estudiantes del octavo grado de educación básica secundaria tratando de resolver una expresión aritmética. Este análisis se hace con los temas habituales, que según los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas, que rigen en Colombia, deben desarrollarse en tal grado. Los errores encontrados fueron de tres tipos: de entrada, de operación y de escritura. Estos errores fueron sistemáticos: se dieron en serie, unos como consecuencia de los otros. En su mayoría estos errores se debieron a la prioridad que los estudiantes dan a las operaciones, realizando primero operaciones aditivas que multiplicativas o porque operaron con números que no estaban en la expresión.

Palabras clave: - errores, pensamiento algebraico, transición aritmética-álgebra

Abstract. In this paper we communicate the results of an investigation where the mistakes made by students of the eighth degree of basic secondary education trying to solve an arithmetic expression were analyzed. This analysis is done with the usual subjects that according to the Basic Skills Standards in Mathematics in Colombia, must be developed to a certain extent. The errors found were of three types: input, operation and writing. These errors were systemic, occurred in series, one following the other. Most of these errors were due to the priority students give to the operations, performing first additive to multiplicative operations or because they operate with numbers that were not in the expression.

Key words: mistakes, algebraic thinking, transition arithmetic-algebra

Marco teórico

Según Sessa (2005) para los profesores, el álgebra representa la herramienta por excelencia de la matemática, considerando que los profesores se forman en una matemática algebraica, mientras que del lado de los alumnos el álgebra se presenta como una fuente inagotable de pérdida de sentido y de dificultades operatorias muy difíciles de superar.

No es un secreto que la mayoría de los estudiantes cometen errores en el desarrollo de las operaciones matemáticas, errores que son mucho más notorios cuando se inicia el trabajo algebraico en el octavo grado de educación básica. La recurrencia de estos errores va creando vacíos conceptuales que a corto o mediano plazo se convierten en serios problemas para el desempeño académico de los estudiantes, llevándolos incluso, hasta la deserción escolar. Del Puerto, Minnaard y Seminara, (2004) consideran que el análisis de los errores que cometen los estudiantes en su proceso de aprendizaje proporcionan una rica información acerca de cómo se construye el conocimiento matemático; se constituyen en una excelente herramienta para revelar el estado del conocimiento de los alumnos, imprescindible a la hora de realimentar el proceso de enseñanza y aprendizaje con el fin de mejorar sus resultados académicos. Además, estos vacíos que van quedando, pueden impedir el correcto aprendizaje de otros temas

importantes en cursos posteriores y frustrar desarrollos académicos futuros. Para Vergnaud (1991, citado por Carrión, 2007), el análisis de las producciones de los estudiantes conduce al análisis de sus aciertos y errores. La necesidad de analizarlos es evidente, ya que sólo mediante su análisis se puede saber qué dificultades enfrenta el alumno. Lo que permite determinar los medios para corregir tales dificultades, además, “se requieren los errores para afinar la idea individual sobre lo que es falso y lo que es correcto, según una norma dada” (Carrión, 2007, p. 21), es decir, los errores son necesarios para que el estudiante pueda distinguir lo correcto de lo incorrecto, lo peligroso es que se quede con el error considerándolo como lo correcto.

Ruano, Socas y Palarea (2008), plantean que los errores aparecen en el trabajo de los alumnos sobre todo, cuando se enfrentan a conocimientos novedosos que los obliga a hacer una revisión o reestructuración de lo que ya saben. Por lo que los errores que cometen los alumnos son muy buenos indicadores de los procesos intelectuales que ellos desarrollan. Bachelard (1938, citado por Del Puerto et al, 2004) ya consideraba que los entorpecimientos y confusiones, que causan estancamientos y retrocesos en el proceso del conocimiento, provienen de una tendencia a la inercia, a la que da el nombre de obstáculo; que se conoce en contra de un conocimiento anterior, destruyendo conocimientos mal hechos, superando lo que en la mente hace de obstáculo y, por lo tanto, los errores son constitutivos del propio acto de conocer. Bajo este punto de vista pretender que los estudiantes no cometan errores sería pretender que dejaran de aprender, es decir, “el error es considerado parte inseparable del proceso de aprendizaje.” (Del Puerto, et al, 2004, p. 2). Estos mismos autores consideran que la presencia de errores algebraicos obstaculizan con frecuencia la articulación exitosa de contenidos imprescindibles en la formación matemática del alumno y además, que el error es posible en todo proceso de adquisición y consolidación de conocimientos, por lo que su análisis y tratamiento puede evitar “consecuencias que, para un país, ocasiona formar profesionales con un aprendizaje en un ambiente de errores” (Carrión, 2007, p. 20); Carrión además considera que para usar un error de manera productiva, es necesario que un individuo pueda comprenderlo, analizarlo, corregirlo y utilizarlo para desarrollar estrategias de prevención de nuevos errores.

Para Carrión (2007), el error es un conocimiento deficiente, insuficiente, imperfecto, defectuoso, escaso o incompleto; una desviación de un conocimiento establecido. En general, el error es un conocimiento que puede funcionar en un contexto y en otro no hacerlo. Según Charnay, (1991) los errores se consideran significativos, y poseen las características de ser reproducibles cuando se manifiesta una cierta persistencia, por lo tanto no es considerado al azar, o por distracción. Además sostiene que estos hechos no son aislados, pueden ponerse en relación con otros, formando una suerte de red o de sistema de errores. Por lo que los

errores así conformados propician la creación de patrones de comportamiento equivocados en la ejecución de las actividades planteadas.

Carrión (2007), clasifica los errores cometidos en el proceso pre-algebraico en tres tipos: 1) errores de entrada, en estos los estudiantes aunque realizan los cálculos en forma correcta, operan una expresión diferente a la que se les propone, es decir, eligen el proceso correcto, pero presentan errores en su proceso de solución, cambiando por ejemplo los términos de las expresiones o alterando el uso de los paréntesis o inventando números que no están en la expresión; estos errores por lo general conducen a resultados incorrectos. 2) errores de operación, en estos los estudiantes distorsionan el proceso de obtener el resultado de cada operación realizada en forma independiente, por mal uso de las operaciones o de los signos. Y 3) errores de escritura, se presentan al comunicar el procedimiento de transformación de la expresión, aunque se escojan las operaciones adecuadas y estas se realicen correctamente; en los errores de este tipo, el estudiante realiza los cálculos secuencialmente sin cometer errores en la ejecución de las operaciones y es muy común que se obtengan resultados correctos.

Metodología

En este trabajo se hace el análisis de los errores que cometen estudiantes del octavo grado de educación básica secundaria tratando de resolver una expresión aritmética que incluye sumas, restas y potenciación. Esto se hace en el desarrollo ordinario de un curso de octavo grado, con los temas habituales que según los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas, que rigen en Colombia, deben desarrollarse en tal grado. Se detectaron los errores en los escritos de los estudiantes, por observación directa de su producción en clase, en su trabajo individual o en grupos. El análisis se hizo con la ayuda de los estudiantes de los mejores promedios académico de cada grupo, quienes en el trabajo en clases debían repartirse cada uno, entre el resto de sus compañeros conformando grupos libres de tres o cuatro. En reuniones extra clases donde éstos también se reunían en grupos libre de tres o cuatro estudiantes; cada grupo designaba un relator quien explicaba a los demás los errores que habían visto cometer a sus compañeros en la clase, se analizaba la postura de cada grupo y se clasificaban de acuerdo a una clasificación propuesta por Carrión (2007). El trabajo se llevó a cabo en el segundo semestre académico del año 2009. Participaron 91 estudiantes del octavo grado de educación básica secundaria de la Institución Educativa Madre Amalia de Sincelejo Colombia, del sector oficial, todos de la jornada matinal, repartidos en tres grupos: A (30), B (29) y C (32), con edades entre 13 y 14 años, provenientes de estratos socioeconómicos 1 y 2. Todas las expresiones que se presentaron fueron descontextualizadas, es decir, no se presentaron situaciones que se pudieran modelar con estas expresiones.

El trabajo se realizó en varios momentos en los cuales se citaron a los estudiantes de mejores promedios en contra-jornada y se procedió a hacer:

- Discusiones preliminares para conceptualizar el problema de investigación y acordar la metodología de trabajo.
- Conformación de grupos donde cada uno debía hacer lecturas, análisis y discusión de algunas bases teóricas sobre análisis de errores, luego se analizaban y discutían en plenaria entre todos los grupos.
- Análisis y discusión en los grupos de los errores encontrados en la clase.
- Socialización y discusión en plenaria de los errores encontrados por los estudiantes e implementación de nuevas estrategias.

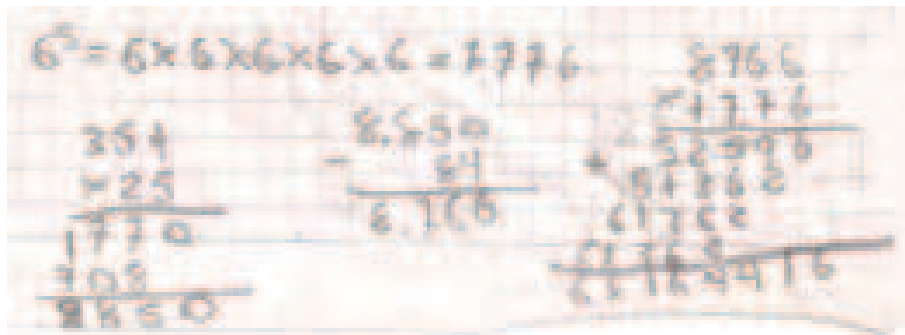
Resultados

Para el análisis se escogieron dos de las expresiones que se les propusieron a los estudiantes, se clasifican y analizan los errores cometidos por algunos de ellos, de acuerdo al tipo de error cometido, en cada expresión:

Expresión 1. $25 \times 354 - 84 \times 6^5 + 8 \times 21$

En relación con la expresión 1, el 50,55% (46) de los estudiantes cometió algún error al tratar de resolver esta expresión. Así mismo, fue amplia la variedad de errores que se presentaron. A continuación se muestran algunos de estos errores, presentados por los estudiantes y algunos de sus manuscritos al tratar de realizar los cálculos en cada una de las expresiones propuestas.

Ejemplo 1



Error de entrada

$$25 \times 354 = 8850 - 84$$

Error de entrada

$$8766 \times 7776 = 68164416$$

Este

estudiante comete un par de errores de entrada, como se puede ver en su manuscrito,

además, omitió realizar la última operación. Puede apreciarse que los cálculos realizados los ejecutó correctamente y por separado; los errores están en la combinación de términos.

Ejemplo 2

Este estudiante agrupa los términos con igual signo y realiza cada operación por separado. Al realizar la operación con los términos que tienen signo negativo, omite el signo, desarrolla la potencia y posteriormente comete un error de escritura al continuar secuencialmente con los cálculos sin separarlos. Al final vuelve y considera el signo negativo. Cuando ya tiene las cantidades positivas y negativas correspondientes procede a hacer la adición y comete un error de operación, al realizar el cálculo en forma incorrecta. Este estudiante fue uno de los pocos que obtuvo un resultado negativo en sus cálculos.

Handwritten work for Example 2:

Left side: $8850 + 168 = 9018$ (No hay error)

Right side: $6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6 = 7776 \times 84 = -653184$ (Error de)

Bottom: $9018 - 653184 = -655834$ (Error de operación)

Ejemplo 3

Este estudiante al igual que el anterior, realizó cada operación por separado. Cometiéndolo un par de errores de operación al ignorar el signo en la diferencia al realizar el primer cálculo y luego no tener en cuenta que el resultado debía ser negativo para el último. El segundo error se dio como consecuencia del primero, formándose lo que Charnay (1991) llama red o cadena de errores.

Expresión 2 $\left(\frac{2}{3}\right)^4 \times \left(\frac{5}{4}\right)^3$

En relación con la expresión 2, el 73,62% (67) de los estudiantes cometió algún error al hacer la transformación de esta expresión en otra equivalente y al igual que en la anterior, fue diversa la variedad de errores que se presentaron. A continuación mostramos algunos ejemplos.

Handwritten student work showing two multiplication problems on grid paper. The first problem is $\frac{52}{354} \times 2.25$, resulting in 653.184. The second problem is $\frac{84}{21} \times 2.25$, resulting in 168. Below the work, two boxes labeled "Error de operación" point to the results. The first box points to $653184 - 0050$ and the second to $653184 + 168$.

Ejemplo 4

Aquí el estudiante ejecuta correctamente las potencias en ambos fraccionarios, sin embargo al realizar la multiplicación comete un error de operación cuando en lugar de realizar la multiplicación que tiene planteada, lo que hace es multiplicar en cruz cada término de los fraccionarios y luego los denominadores, como si fuera una suma y finalmente los suma.

Handwritten student work showing a fraction multiplication problem: $\left(\frac{3}{4}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{12}\right)^3 \cdot \frac{8}{20}$. The student has written $90 \times 300 = 2700$ in the numerator and 240 in the denominator. Two boxes labeled "Error de operación" point to the numerator and denominator respectively. A third box labeled "Error de operación" points to the entire fraction.

Ejemplo 5

Aquí el estudiante parte de sendos errores de operación al considerar $\frac{2^4}{3^4} = \frac{2 \times 4}{3 \times 4} = \frac{8}{20}$ y $\frac{9^4}{4^4} = \frac{9 \times 8}{4 \times 8} = \frac{19}{12}$, pretendiendo que la potenciación funcione como la multiplicación. En el tercer término comete otro error de operación al multiplicar en cruz el numerador del primer fraccionario con el denominador del segundo y el denominador del primero con el numerador del segundo, como en una suma de fraccionarios. Y finalmente en lugar de ejecutar la multiplicación que tenía planteada, lo que hace es la suma de los factores que aparecen en el numerador de la fracción.

$$\left(\frac{2}{3}\right)^4 \times \left(\frac{5}{4}\right)^3 = \frac{16}{81} \times \frac{125}{64}$$

$$\frac{16}{81} \times \frac{125}{64} = \frac{10244}{5184}$$

Error de operación

Ejemplo 6

En este ejemplo el estudiante ejecuta correctamente las potencias, pero comete errores de escritura y finalmente obtiene un resultado correcto, que no lo es por ser producto de un proceso inadecuado.

$$\left(\frac{2}{3}\right)^4 \times \left(\frac{5}{4}\right)^3 = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{16}{81} \times \frac{5}{4} \times \frac{5}{4} \times \frac{5}{4} = \frac{16}{81} \times \frac{125}{64}$$

$$= \frac{2000}{5184}$$

Error de escritura

Los errores de entrada fueron los más sistemáticos, se dieron en serie, unos como consecuencia de los otros, lo que Perrot (1989, citado por Charnay, 1991) llama coherencia entre errores. Coincidimos con Carrión (2007) en que, cuando se cometieron este tipo de errores, aunque los estudiantes eligieran el algoritmo correcto, parte de ellos presentaron errores en el proceso de resolución. La mayoría de estos errores se debieron a la prioridad que los estudiantes dan a las operaciones, realizando primero sumas o restas que multiplicaciones; aunque las potencias si las resolvieron primero, dándole la prioridad adecuada.

Los errores de operación fueron una constante en todo el proceso; se hacían actividades para remediarlos, según el tipo (Charnay, 1991), y volvían a aparecer de la misma forma o de otra similar o diferente, pero siempre aparecían. Este tipo de error fue el más constante, los mismos estudiantes tendían a cometer los mismos errores. Por lo general se produjeron por cambios en los signos de las operaciones, por invertir los factores en un fraccionario, uso inadecuado de las leyes de la potenciación, omisión de alguna operación o de un número y

cambio de operaciones, como potenciación por multiplicación o multiplicación por división o por suma. Se presentó con mucha frecuencia entre los estudiantes, cambiar el minuendo con el sustraendo, cuando el sustraendo era mayor, persistiendo la idea de que al restar dos números, el minuendo debe ser mayor que el sustraendo.

Con los errores de escritura sucedió lo contrario que con los de entrada: aunque aparecieron en cada tema, fueron más evidentes al final, cuando se estaba próximo a una evaluación. Este tipo de error fue el menos admitido por los estudiantes, lo cometían y como casi siempre obtenían la respuesta correcta, sostenían que eso no podía ser un error porque el resultado estaba bien. Los mismos monitores no los veían como error. Estos errores se debieron más que todo a formas inadecuadas en la sintaxis, al encadenar varios signos de igualdad operación tras operación sin alterar el orden ni la prioridad de las operaciones y en la mayoría de los casos realizando cálculos correctos. La mayoría de los estudiantes encontraron en sus errores una oportunidad de aprendizaje y se esforzaban al máximo para no cometerlos. Sin embargo, la recurrente naturaleza de los errores persistía, como queriendo mostrar que “el dominio completo de las estructuras aditivas se logra a lo largo de un tiempo bien largo. Y que hay que subrayar la importancia del ‘largo plazo’ en los aprendizajes” (Charnay, 1991, p. 6-7), además, que “el error es posible en todo proceso de adquisición y consolidación de conocimientos” (Del Puerto, et al, 2004, p. 2).

Conclusiones

La mayoría de los errores cometidos por los estudiantes en el trabajo pre-algebraico están relacionados con el uso incorrecto de las cuatro operaciones básicas de matemática (suma, resta, multiplicación y división) debido a las insuficiencias de los conocimientos adquiridos en niveles de enseñanza anteriores; al uso inadecuado de la sintaxis o a la prioridad en el orden al ejecutar las operaciones.

Fueron muy frecuentes los errores por la mala utilización e interpretación de los signos y por la distorsión de las operaciones; esto generó conflicto en los estudiantes sobre todo al operar fraccionarios.

El hecho de analizar las producciones de los estudiantes, permite conocer sus errores más frecuentes y plantear actividades de remediación (Vergnaud, 1991, citado por Carrión, 2007) en función de estos errores, lo que podría llevar a los profesores a realizar algunas modificaciones en el currículo, basado en una realidad muy propia, además, puede permitirle al profesor “diseñar problemas de investigación adaptados al nivel de los alumnos” (Carrión, 2007, p. 55).

Uno de los aspectos más importantes del trabajo lo constituyó el trabajo en grupo de los estudiantes, permitiendo un acercamiento de tú a tú, el mismo hecho de que fueran los propios compañeros los que los hicieran caer en cuenta de los errores cometidos, permitió que los estudiantes que cometían errores con mucha frecuencia, perdieran el temor de admitir cuando tenían resultados errados, lo que les fue dando autoridad para encontrar errores en los demás.

Referencias bibliográficas

- Carrión, V. (2007). Análisis de errores de estudiantes y profesores en expresiones combinadas con números naturales. *Unión, Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, N° 11, 19-57.
- Charnay, R. (1991). *Del análisis de los errores en matemáticas a los dispositivos de remediación: algunas pistas* Equipo de Investigación en didáctica de la Matemática INRP. Michel Mante del IREM de Lyon. En: *Grand N*, 48 (pp. 37-64)
- Del Puerto, S. Minnaard, C. y Seminara, S. (2004). Análisis de los errores: una valiosa fuente de información acerca del aprendizaje de las Matemáticas. *Revista Iberoamericana de Educación* 38(4), 1-13.
- Ruano, R. Socas, M. y Palarea, M. (2008). Análisis y clasificación de errores cometidos por alumnos de secundaria en los procesos de sustitución formal, generalización y modelización en álgebra. *PNA: Revista de Investigación en Didáctica* 2(2), 61-74.
- Sessa, C. (2005). *Iniciación al estudio didáctico del álgebra: orígenes y perspectivas*. Buenos Aires, Argentina: Libros del Zarzal.