

LAS FIGURAS DE ANÁLISIS EN EL AULA DE MATEMÁTICA

Mónica Lorena Micelli, Cecilia Rita Crespo Crespo

Instituto Superior del Profesorado “Dr. Joaquín V. González”

(Argentina)

Centro de Investigaciones en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada. CICATA

(México)

monikmathis@gmail.com, crccrespo@gmail.com

Resumen. Este trabajo forma parte de una investigación llevada a cabo sobre la utilización de las figuras de análisis en geometría y su presencia en el aula de matemática. La investigación, dentro de los lineamientos de la construcción social del conocimiento matemático, se enmarca en la socioepistemología. Se centra en el proceso de visualización en el cual las figuras de análisis juegan un papel importante, analizando cuáles son los obstáculos que pueden encontrar los alumnos al realizar dichas figuras. Se presentaran situaciones de aula en las cuales se analizan las formas en que los estudiantes hacen uso de las figuras de análisis y los obstáculos que se ponen de manifiesto en cada caso.

Palabras clave: figura de análisis, obstáculos, visualización

Abstract. This work is part of an investigation about the use of the figures of analysis in geometry and its presence in the classroom of mathematics. The investigation about the social construction of the mathematical knowledge is framed in the socioepistemological theory. This paper reports results on the visualization process in which the analysis figures play an important role, analyzing which are the obstacles that students can find when they use them. We describe classroom situations in which students use analysis figures and obstacles that appeared in each case.

Key words: analysis figures, obstacles, visualization

Las figuras de análisis en geometría

Poincaré afirmaba que “la géométrie est l’art de bien raisonner sur des figures mal faites” (Poincaré 1913, p.27), lo que podría traducirse que la geometría es el arte de razonar bien sobre figuras mal hechas”. Pero la pregunta que surge es el ¿por qué de esta afirmación, proveniente de un gran matemático? Puede encontrarse respuesta en las explicaciones dadas por Santaló “Los griegos (...) dibujaban las figuras en la arena, que tenía la ventaja de poder borrar, pero faltaba precisión. Por esto se dijo que la Geometría era el arte de sacar consecuencias de figuras mal hechas” (citado en Galina, 2008, p.15). Pero actualmente, aún esas figuras mal hechas realizadas sobre el papel a modo de bosquejo de ideas internas es que surgen conclusiones correctas, pero ¿cómo se logra encontrar dicho éxito?

El presente trabajo forma parte de una investigación llevada a cabo sobre las dificultades de la utilización de las figuras de análisis en la clase de geometría con alumnos que serán futuros docentes (Micelli, 2010). En dicha investigación se intentó dar respuesta a una serie de preguntas que tienen su origen en una problemática detectada en la dificultad de los alumnos de nivel terciario al usar figuras de análisis, especialmente en la materia geometría del profesorado de Matemática. Durante las clases, pudo observarse que los estudiantes no representan correctamente los datos dados en los enunciados de un problema o toman figuras

que representan casos particulares, obviando situaciones generales llegando a conclusiones erróneas o incompletas. Ante dicha problemática se formularon las siguientes interrogantes:

- ¿Cómo surge el uso de las figuras de análisis en el ámbito escolar?
- El uso de las figuras de análisis en geometría, ¿es comprendido por los estudiantes como necesario y útil o como algo impuesto por el discurso matemático escolar?
- ¿Qué factores influyen en el uso que se da a las figuras de análisis en las clases de geometría?

Los objetivos que se intentaron alcanzar fueron:

- Detectar los factores que llevan a resultados erróneos en problemas de geometría.
- Descubrir la naturaleza de las figuras de análisis en la clase de matemática
- Detectar si las figuras de análisis son impuestas por el discurso escolar o nacen naturalmente en la resolución de problemas de geometría

La investigación se enmarca dentro de los lineamientos de la construcción social del conocimiento matemático. Se ha elegido esta línea de investigación porque en ella se considera a la matemática no sólo como un saber dado sino que se la ubica en un escenario donde se juegan variables sociales, además de las variables didácticas, cognitivas y epistemológicas.

En el presente trabajo, se presenta sólo uno de los aspectos desarrollados en la investigación mencionada centrándonos en el proceso de visualización en el cual las figuras de análisis juegan un papel importante, se analizan además cuáles son los obstáculos que se pueden presentar a los alumnos al realizar una figura de análisis frente a un problema a resolver, este problema puede ser un ejercicio donde deba aplicarse conceptos geométricos, construcciones geométricas con uso de regla y compás o demostraciones.

Para comenzar, es importante determinar a qué se hace referencia cuando se habla de figuras de análisis. Las mismas pueden definirse como aquellos dibujos que pueden ser realizados a mano alzada o con el uso de regla pero sin respetar la medida o estar elaborada según una determinada escala numérica. Ampliando esta idea puede decirse que son “figuras o bosquejos que no poseen rigurosidad geométrica, en donde se vuelca la información dada como primer paso ya sea para resolver un problema geométrico, una demostración o realizar una construcción geométrica” (Micelli, 2010, p. 11). Estas figuras de análisis podrían categorizarse dentro de las nociones paramatemáticas (Chevallard, 1997) que no se encuentran dadas en forma explícita, muchas veces, dentro del discurso matemático escolar pero que viven en su hacer diario. Existen libros de texto escolares que promueven su uso aunque muchas veces no

se especifica a que se refiere al hablar de figuras de análisis, también llamada figura auxiliar o bosquejo en otros países. Como antecedente de su existencia dentro del aula se encuentran las afirmaciones de Nieto, “hacerlo [refiriéndose al dibujo] es la primera tarea que debemos realizar”, fundamentando que “un dibujo nos ayuda en primer lugar a comprender el problema. Además estimulará nuestra imaginación y es posible que nos sugiera algún plan para hallar la solución. Si tiene a mano instrumentos geométricos úselos; sin embargo incluso un bosquejo aproximado suele ser de mucha ayuda” (2004, p.22).

Las figuras de análisis en el proceso de visualización

Las figuras de análisis cumplen un rol importante en el proceso de visualización pues permiten representar en el papel las imágenes mentales que el sujeto se construye al leer los datos del problema y sobre las cuales se van pensando ideas hasta arribar a la solución buscada. Para definir que se entiende por proceso de visualización se tomaran las palabras de Zazkis y otros “el acto por el cual un individuo establece una fuerte conexión entre una construcción interna y algo cuyo acceso es adquirido a través de los sentidos” (en Torregrosa y Quesada, 2007, p.278).

Con respecto a las figuras geométricas y los dibujos realizados en la clase de geometría, Fischbein hace una distinción entre estas dos ideas, refiriéndose a estas últimas establece que son “modelos materializando las entidades mentales con las que el matemático trata”, mientras que para las primeras afirma que “no es un mero concepto. Es una imagen, una imagen visual” (Fischbein, 1993, p.2). Otros autores como Torregrosa y Quesada (2007) emplean otros términos como “figura” entendido por tal a la “imagen mental” o “imagen conceptual”, mientras que el objeto físico es el “dibujo” propiamente dicho. Muchas veces los alumnos confunden estos conceptos, estas imágenes conceptuales, en el propio hacer, ejemplo de ello es cuando sacan una conclusión basándose solo en lo que ven en el dibujo, pero dicha conclusión no pertenece a la figura geométrica, concepto abstracto, acción que conduce a los errores observados en el inicio de esta investigación y la lo cual para lograr interpretarlos se trabajo sobre los hechos que conducen a dichos errores. Estos dos mundos tan distintos, el conceptual y el físico, coexisten y es el alumno quien debe aprender a vivir en ambos terrenos. “El alumno pasa así del ‘universo de los dibujos’ al ‘universo de las figuras’. Este pasaje requiere una serie de rupturas en donde el alumno deberá aprender que no todo lo que se ve es verdadero y que una figura es una representación de los objetos geométricos ‘perfectos’ o ‘ideales’” (Rodríguez, 2005, p.1).

Pero no siempre estas figuras de análisis realizadas por los alumnos se convierten en una verdadera herramienta útil, sino que presentan obstáculos que ellos no pueden franquear y la

herramienta cambia su finalidad inicial, pero si no es un herramienta útil ¿Por qué, los alumnos, las siguen realizando?

Como trabajos que se pueden referir como antecedentes a esta investigación, trabajos que aluden a los obstáculos en la visualización al emplear figuras de análisis se encuentra los trabajos de Crespo Crespo y Farfán quienes mencionan que “las figuras de análisis dificultan la comprensión de los razonamientos cuando se utiliza argumentaciones por el absurdo” (2005, p.303), pero en la investigación lo que se intentó hacer fue ampliar el campo y ver que sucedía no sólo con aquellos problemas que se demostraban por el absurdo sino a los problemas que se pueden plantear en una clase de geometría en general.

Por otro lado, como se ha señalado las figuras de análisis tienen un papel importante en el proceso de visualización, y como tal dicho proceso a veces acarrea errores particulares (de Guzmán, 1996). Muchos de esos errores están asociados a lo que los ojos perciben y lo que el cerebro interpreta ante dicha figura, estos obstáculos son denominados “falacias de tipo geométricas” (de Guzmán, 1996) o también conocidas como ilusiones ópticas, relacionadas con imágenes que engañan al ojo humano conduciéndolo a generar ideas que son erróneas.

Muchas veces los alumnos afirman que un determinado cuadrilátero es cuadrado solo valiéndose por la estimación que los lados tienen igual longitud, sin hacer una lectura profunda de los datos, solo guiado sobre lo observable quedando al alcance de las ilusiones ópticas, que puede provocar verdaderos engaños. Ilusiones ópticas hay muchas, pero a continuación se detallan algunos casos geométricos para ejemplificar y verificar que vulnerables que es el ojo humano.

En la ilusión de Jastrow (figura 1) puede suponerse a simple vista que los segmentos a, b, c y d no tiene igual longitud, pero este es un engaño producido por el ángulo de inclinación de los segmentos de menor longitud que se encuentran en los extremos. En verdad, los cuatro segmentos tienen igual longitud.

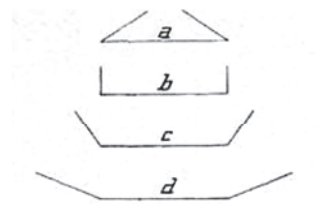


Figura 1: Ilusión de Jastrow referida a la longitud

En la figura 2 pueden observarse dos rectángulos que “parece” tener sus bases distintas según la forma en que es intersectado por un segmento (Perelman, 1975).

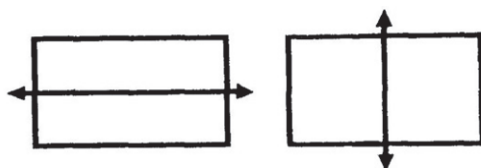


Figura 2: Ilusión óptica sobre rectángulos

En un tercer ejemplo (figura 3), los segmentos internos del paralelogramo, AB parece de mayor longitud que el AC, pero en realidad esto es falso, pues son congruentes (Perelman, 1975).

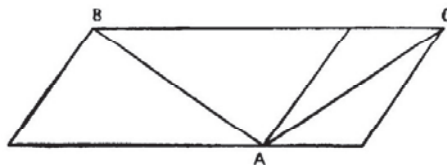


Figura 3: Ilusión de Sander sobre la longitud

Estas falacias evidencian a los engaños que pueden estar expuestos los alumnos frente a sus propias construcciones, hay situaciones visuales pueden conducir a aceptar relaciones que son tan evidentes que no hay necesidad de justificarlas (de Guzmán, 1996).

Adams, en lugar de hablar de dificultades frente a la visualización, hace referencia a “bloques mentales”, entendiéndolos por ellos a las “barreras que nos impiden percibir un problema en la forma correcta y encontrarle solución” (Nieto, 2004, pp.6-7). A estos bloques mentales los clasifica en: perceptivos, emocionales, culturales, ambientales, intelectuales y expresivos. Muchos de estos bloques pueden relacionarse con las figuras de análisis, entre ellos los bloques perceptivos que son estereotipos, relacionado con los que Scaglia y Moriena llaman prototipos; o los bloques intelectuales que refiere a la “inhabilidad para seleccionar un lenguaje apropiado para el problema (verbal, matemático, visual); uso inadecuado de las estrategias; falta de información o información incorrecto” (Nieto, 2004, p.7).

Volviendo al tema de los prototipos, estos son otro obstáculo estudiado por varios autores, que se puede relacionar con la utilización de las figuras de análisis. Entendiéndolos por prototipos a los “ejemplos que tienen un mayor ‘parecido familiar’ con el resto de los ejemplos del concepto” (Scaglia y Moriena, 2005, p.109), son modelos “de imágenes que tienen los alumnos de los conceptos geométricos” (Scaglia y Moriena, 2005, p.106). Estos prototipos, de gran utilidad didáctica, pueden llegar a tornarse en obstáculos a la hora de resolver problemas.

A continuación se recopilan algunos prototipos identificados en varios trabajos:

Una posición preferida en el plano, por ejemplo el triángulo rectángulo: se encuentran graficados “con el ángulo recto en la posición vertical-horizontal” (Plasencia, 2000, p.54).

Determinadas proporciones que guardan las figuras, volviendo al caso del triángulo, se encuentra que su altura, por lo general, se encuentra contenida en el mismo (Scaglia y Moriena, 2005, p.109).

Preferencia por las figuras simétricas, encontrando al cuadrado “como ejemplo prototípico de los cuadriláteros” (Scaglia y Moriena, 2005, p.110).

Estos y otros prototipos están asociados a los esquemas mentales elaborados por los alumnos que se ven, muchas veces, reflejados en sus figuras de análisis y que pueden conducir a conclusiones incompletas, pues solo son validas para un caso en particular, perdiendo la generalidad del enunciado del problema.

Otro obstáculo, esta planteado por Hegarty y Kozhevnikov quienes identifican dos tipos de representaciones diferentes: representaciones esquemáticas (dentro de las cuales se pueden incluir a las figuras de análisis) y representación pictóricas las cuales dificultan la comprensión. Afirman que las representaciones utilizadas en la resolución de un problema de matemática tiene su influencia en el resultado obtenido, considerando que las representaciones esquemáticas pueden conducir a un buen resultado mientras que las representaciones pictográficas harán más difícil el camino y la llegada a la meta deseada (Ferrero, 2009).

En este reporte, se muestran ejemplos de situaciones de aula en las que los estudiantes del nivel superior, utilizan figuras de análisis y se analiza en ellas la manera en las que hacen uso de las figuras y los obstáculos que se manifiestan.

Ejemplo A: “Calcular el perímetro y el área de un cuadrado sabiendo que un lado mide $3x-1$ cm y el otro $x+3$ cm.”

En esta resolución se arrastra al trabajo algebraico el error cometido al construir la figura de análisis. No sería un error haber confeccionado un rectángulo, no cuadrado, cuando el enunciado habla de un cuadrado, sino que el error fue al momento de simbolizar los lados como de longitud diferente. Con respecto a los estereotipo puede observarse que la base tiene una dirección horizontal y que dicha base es de mayor longitud que la altura (Scaglia y Moriena, 2005).

Figura 5: resolución del ejemplo A

Ejemplo B: “Las dimensiones de un prisma recto se dan a continuación: ancho $3x+4$, largo $3x$ y alto $3x-6$. Hallar la expresión desarrollada del área total del prisma e indicar de qué grado resulta.”

En este ejemplo la figura de análisis no es funcional ya que no existe correlación ni entre los datos del ejercicio y la figura realizada, así como tampoco entre la misma figura y el desarrollo algebraico. Este ejemplo puede, además, relacionarse con el “bloqueo expresivo” (Adams, en Nieto, 2004) por el uso inadecuado de una técnica al registrar una idea. Error que se parece agravarse pues las figuras de análisis deben ser una técnica desarrollada por el mismo sujeto, porque es el propio alumno quien desarrolla sus propios códigos ya que no es necesario intercambiar con un otro.

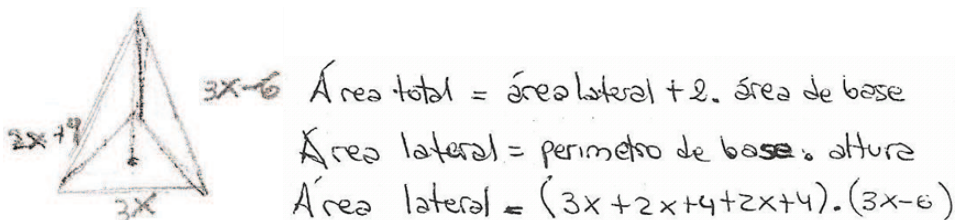


Figura 6: resolución del ejemplo B

Ejemplo C: “Toda paralela a la mediana de un triángulo abc, determina en las rectas de los lados y segmentos y proporcionales a esos lados.”

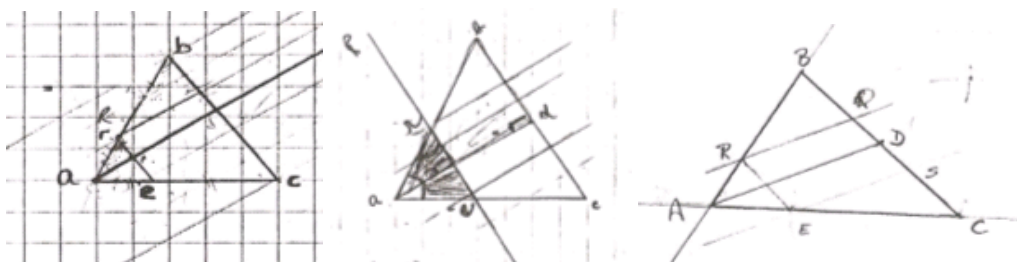


Figura 7: resoluciones del ejemplo C

En estas tres resoluciones de un mismo problema puede observarse las similitudes entre las tres construcciones, aún habiendo resuelto, los alumnos, el ejercicio en forma aislada. Puede además identificar estereotipos como es un triángulo escaleno y acutángulo que tiene su base horizontal (Scaglia y Moriena, 2005). Otra similitud, para destacar, es que las rectas paralelas trazadas mantienen una dirección semejante y en algunos casos hasta equidistantes (error que se arrastra a la demostración).

“Para esbozar una figura de análisis, es necesario tener un conjunto de conocimientos de la Geometría (figuras, cuerpos geométricos, construcciones geométricas, etc.) y un conjunto de habilidades (intelectuales y prácticas) que le permitan, a partir de la imaginación, sintetizar en una figura una situación dada y explicarla. Por ello, asegurar, que el alumno tenga creadas estas condiciones, es un elemento determinante en la consecución del objetivo de aprender a modelar gráficamente” (González, García y Lamothe, 2005).

Entre las conclusiones a las cuales se arriba son que se ha observado errores de distinta naturaleza, por ejemplo representaciones pictóricas, representaciones esquemáticas, no generalizadas o de lectura e interpretación de datos. Además, puede notarse la presencia de los estereotipos en las figuras de análisis, estereotipos que tienen que ver con una transmisión social que también puede observarse en las graficas que se encuentran presente en los libros de texto escolares. Aunque son un objeto de construcción propia, están explícitamente o implícitamente normadas en quehacer del docente o los libros de texto, aspectos del discurso matemático escolar.

Referencias bibliográficas

- Crespo Crespo, C. y Farfán, R. (2005). Una visión socioepistemológica de las argumentaciones en el aula. El caso de las demostraciones por reducción al absurdo. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 8 (3), 287-317.
- Chevallard, Y., Bosch, M. y Gascón, J. (1997). *Estudiar matemáticas: El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*. Barcelona: Horsori.
- de Guzmán, M. (1996). *El Rincón de la Pizarra*. Madrid: Pirámide.
- Ferrero, M. (2009). Caracterización de representaciones visuales en una demostración en geometría. En H. Blanco (Ed.), *Acta VIII CAREM* (pp.596-603). Sociedad Argentina de Matemática. Buenos Aires
- Fischbein, E. (1993). The Theory of figural concepts. *Educational Studies in Mathematics* 24, 139-162.
- Galina, E. (2008). *Medida, geometría y el proceso de medir*. LVIII Reunión Anual de la Unión Matemática Argentina. Mendoza.
- González, M., García, L. y Lamothe, M. (2005). *Resolución de problemas geométricos a través de la modelación gráfica*. Instituto Superior Pedagógico “Raúl Gómez García”, Guantánamo, Cuba. Recuperado el 16 de marzo de 2009, de <http://www.revistaciencias.com/publicaciones/EEEluVAupkSELGakrT.php>

- Micelli, M. (2010). *Las figuras de análisis en geometría. Su utilización en el aula de matemática*. Tesis de Maestría no publicada, Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada - IPN, México.
- Nieto, J. (2004). *Resolución de problemas Matemáticos. Material de apoyo de un taller de formación matemáticas en la Licenciatura de Matemáticas*. Maracaibo. Recuperado el 30 de marzo de 2009, de <http://ommcocolima.ucoj.mx/guias/TallerdeResolucionproblemas.pdf>
- Perelman, Y. (1975). *Problemas y experimentos recreativos*. Moscú: Mir.
- Plasencia, I. (2000). *Análisis del papel de las imágenes en la actividad matemática. Un estudio de casos*. Tesis de Maestría no publicada, Universidad de La Laguna, España.
- Poincaré, H. (1913). *Dernières pensées*. París: Flammarion.
- Rodríguez, R. (2005). *El aprendizaje de la demostración en geometría: el pasaje de la geometría experimental a la geometría deductiva*. IUFM de Basse-Normandie Caen Francia. Recuperado el 12 de enero de 2009, de www.math.unicaen.fr/irem/internat/Ruben/geometria.doc
- Scaglia, S. y Moriena, S. (2005). Prototipos y estereotipos en geometría. *Educación Matemática* 17 (3), 105-120.
- Torregrosa, G. y Quesada, H. (2007). Coordinación de procesos cognitivos en geometría. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 10 (2), 275-300.