

INTERACTUANDO CON EL CONCEPTO FUNCIÓN EN SITUACIONES DE MODELACIÓN

Landy Sosa Moguel, Eddie Aparicio Landa
Universidad Autónoma de Yucatán.
smoguel@uady.mx, alanda@uady.mx
Campo de investigación: Gráficas y funciones

México

Nivel: Medio

Resumen. *A decir de algunos especialistas en matemáticas y matemática educativa, lograr que los estudiantes tengan un entendimiento profundo del cálculo y con ello, contribuir al desarrollo de futuros ingenieros, matemáticos y científicos en general, precisa del favorecimiento de formas de pensamiento y lenguaje de naturaleza variacional, asociados al concepto función. En este sentido, en el presente escrito se describen algunas ideas y referentes teóricos que motivaron y guiaron la producción de un cuaderno de estudio sobre dicho concepto, como es el caso de la modelación matemática en tanto actividad y práctica matemática.*

Palabras clave: funciones, modelación matemática, práctica escolar, material

Introducción

La matemática escolar es entendida como el resultado de las transformaciones de la matemática científica con el fin de hacerla un saber sociocultural susceptible de ser enseñado y aprendido. En este sentido y desde nuestro particular punto de vista, la matemática en tanto ciencia deductiva, axiomática, se genera a partir de los planteamientos y búsqueda de soluciones a situaciones que le son propias o bien, relativas a otros campos disciplinares. La matemática escolar en cambio, se genera a partir de la necesidad específica de educar matemáticamente a la sociedad en su conjunto. Por tanto, es posible distinguir al menos dos tipos de actividades matemáticas: la actividad matemática científica y la actividad matemática escolar. La primera, encierra un conjunto de acciones complejas que el matemático pone en juego ante determinadas situaciones, por ejemplo, estimar, medir, razonar, argumentar, reconocer modelos y estructuras, entre otras. Por su parte, la segunda se orienta más al entendimiento del lenguaje y las estructuras de la matemática misma (Cordero, 2005). De esta manera, las formas en que los estudiantes habrán de comprender y proceder en el ámbito escolar, serán típicamente diferentes de aquellas que se esperan realicen en ámbitos distintos a este. Se dice pues, en un sentido amplio, existe un problema de transferencia de los saberes.

Es así que, partiendo de este contexto y apoyados en la idea de que el sujeto y el objeto de conocimiento se construyen mutuamente a través de la actividad, presentamos en este escrito,

algunas de las ideas y consideraciones teóricas-prácticas que motivaron y guiaron el proceso de producción de un cuaderno de estudio referente al concepto función real de variable real para estudiantes de bachillerato.

Se trata de un material impreso cuyo contenido se desarrolla esencialmente en dos ejes:

- i. *La modelación matemática* de fenómenos y situaciones en donde hay presencia de variaciones y cambios con el fin de poder dar una descripción cuantitativa y cualitativa de los mismos.
- ii. El estudio de saberes matemáticos propios de la variación y el cambio, como es el caso de las funciones y sus propiedades en la formulación de modelos matemáticos.

Presencia del concepto función en los libros de texto

La presencia del concepto función (de variable real) en los libros de precálculo o de introducción al cálculo, suele “justificarse” desde lo que hemos denominado: discurso escolar intramatemático. Dicho en otras palabras, aun cuando los autores refieran la importancia de las funciones en las ciencias y sus obras proporcionen ejemplos o ejercicios aplicativos en estas, lo cierto es que la estructura, tratamiento y discurso desplegados en torno a dicho concepto, se rige bajo una visión deductiva de las matemáticas. Esto es (en el mejor de los casos), se orienta el pensamiento hacia una forma de razonamiento lógico deductivo, que se hace visible en la presentación secuencial de definiciones, propiedades y ejemplos de conceptos matemáticos. Si bien este tipo de razonamiento, es una forma de pensamiento matemático, también es cierto dejan fuera acciones como el establecimiento de relaciones matemáticas en situaciones específicas, la generalización de observaciones, la argumentación y la generación de ejemplos por inducción, para la formulación de conjeturas imprevistas que, a la postre, también son formas matemáticas de pensar, empero, poco favorecidas en los textos.

Según (Chevallard, 1998) las transformaciones para adaptar los saberes matemáticos a libros de texto se verifican, entre otras acciones, a través de procesos de delimitación, fragmentación y despersonalización de esos saberes, produciendo su descontextualización, así como su desvinculación de la red de problemáticas que les otorgan sentido y significados, y que los fueron constituyendo como objetos matemáticos del saber.

Esto puede observarse en las formas en que se introduce y trata el concepto de función en los libros, donde es posible identificar definiciones más o menos análogas a las siguientes:

- Una función es *una regla (de correspondencia) que asigna a cada elemento x de un conjunto A , exactamente un elemento llamado $f(x)$, de un conjunto B .*

En palabras de Freudenthal (1983), citado en Ruiz (1998), esta definición de carácter lógico-formal, oscurece el significado esencial de una función, perdiendo su carácter dinámico para transformarse en algo estático.

- “*y es una función de la variable x , definida en un intervalo tal que $a < x < b$, si para todo valor de la variable x en ese intervalo, le corresponde un valor determinado de la variable y ”*

Ambas definiciones, provienen de los trabajos desarrollados por matemáticos como Cauchy, Dirichlet y Cantor, quienes en la corriente de conformar sistemas axiomáticos para las distintas ramas de las matemáticas en el siglo XIX, intentaron dar una definición formal de función. De esta manera y en mayor o menor medida, los resultados de estos trabajos, las restricciones que impone el funcionamiento del sistema didáctico y la economía de los tiempos, han perneado el discurso escolar del concepto función en los libros de texto, desligándolo de todo proceso de producción, y dejando a un lado la evolución del mismo. Se ha desatendiendo su origen y reducido al mínimo su utilidad y pertinencia, mostrándose como un saber anónimo, bajo el aspecto de verdades innatas (Chevallard, 1982).

La modelación matemática

En nuestro material, centramos la atención en la práctica de modelación matemática como objeto de estudio y como práctica escolar, donde el entendimiento de la modelación no se reduce a una habilidad cognoscitiva individual (Blomhoj y Hojgaard, 2003), sino como parte constitutiva de la práctica matemática, concretamente, la práctica matemática escolar. Así, se intenta promover y favorecer el estudio de situaciones fenomenológicas donde el énfasis es puesto en la variación de las variables, a fin de dotar de significados a la función.

La *matematización* de fenómenos de distinta naturaleza, influenciados o generados por *variables* o magnitudes que van cambiando de un estado a otro, normados por *prácticas sociales* como la

predicción, ha regido la construcción de conceptos matemáticos durante varios siglos. Sucede que en ciertas situaciones se requiere conocer el valor que tomará una magnitud con el paso del tiempo. Se precisa entonces, determinar el valor que tomará una variable que depende de otra (variable independiente) cuando ésta cambia de un estado a otro. Sin embargo, restringidos para manipular el tiempo según nuestros designios, se recurre a la práctica predictiva, es decir, saber cuál es el valor que tomará nuestra variable después de transcurrido cierto tiempo a partir de un modelo matemático de la situación o fenómeno. De modo que, considerando valores iniciales es posible describir y cuantificar la forma en que ellos cambian y cómo cambian sus cambios (Cantoral y Farfán, 2000).

La necesidad de predecir, estimar y aproximar los cambios o variaciones en fenómenos de la física y de la mecánica de los cuerpos celestes, como el fluido de líquidos (Newton), la transmisión del calor (Fourier) y la velocidad con que se mueve un cuerpo (Fermat, Descartes, Laplace y otros), concitaron la generación de modelos matemáticos para describir y explicar tales fenómenos a partir del desarrollo de conceptos matemáticos del Cálculo y el Análisis matemático (Cantoral, 2001).

Se sabe (Hernández, Muñoz, y Buendía, 2007) que prácticas sociales como la predicción y la interpolación en la modelación matemática de fenómenos, favorecen la reconstrucción del cálculo escolar. Bajo esta idea se aborda el estudio de funciones en esta propuesta, utilizándolas como una herramienta matemática que permita entender, describir y explicar fenómenos y situaciones de distintas disciplinas científicas y de la cotidianeidad, que su vez vaya fortaleciendo la estructura conceptual del estudiante y su entendimiento del Cálculo.

Aspectos didácticos asociados al aprendizaje de funciones

En Kieran (1995), citado en Monzoy (1998) se considera que describir el mundo es describir el cambio y al hacerlo se crean objetos viables en los que las funciones son un tipo especial de dependencia de algo que varía libremente a algo que varía bajo ciertas restricciones, esto supone que en el estudio de funciones, los alumnos deben desarrollar ideas y estrategias variaciones. Por ello, consideramos en la modelación de las situaciones propuestas en el material, los siguientes aspectos para su estudio.

- a) *La noción de predicción.* Esta noción se construye socialmente a partir de actividades cotidianas en las que se requiere determinar el valor de una variable con el paso del tiempo, cuando un fenómeno cambia de un estado a otro. Esto requiere de la construcción de un instrumento que permita mirar la variación continua para representarla en el contexto matemático (Cantoral y Farfán, 2000).
- b) *Estudio de la variación, ¿cómo cambia lo que cambia?* En la matematización de las situaciones se pone atención en identificar qué, cómo y cuánto cambia lo que cambia, mediante el análisis de la variación de los valores de las magnitudes o variables que intervienen en la situación o fenómeno, esto permite describir las variaciones (directa, inversa, periódica, constante, con “rapidez”, creciente, decreciente, etc.) y, por consiguiente, caracterizar los distintos tipos de funciones.
- c) *Análisis e interpretación local-global, cualitativa-cuantitativa de gráficas de funciones.* Entre las acciones para generar un modelo matemático, se hace necesario saber interpretar gráficas de funciones, de modo tal, que sea posible analizar aspectos globales, locales, cualitativos y cuantitativos.

Analizar una situación o fenómeno *localmente* consiste en centrar la atención en zonas, intervalos o puntos específicos de la gráfica que lo representa. Por el contrario, analizar *globalmente* significa centrar la atención en la totalidad de la gráfica o bien, en zonas o intervalos muy prolongados. Cuando se hace una descripción o análisis detallado, ya sea de la forma o comportamiento gráfico, se dice que el análisis es *cualitativo*. En cambio, si el análisis gráfico se realiza con un enfoque numérico o referente a cantidades o valores, se le llama análisis *cuantitativo*.

- d) *La construcción de gráficas.* Establecer relaciones entre las operaciones algebraicas y su representación gráfica provee de significados geométricos a las operaciones con funciones y conocer el comportamiento tendencial de sus gráficas. Tener una idea sobre los comportamientos gráficos de un conjunto básico de funciones resulta oportuno al momento de interpretar gráficas y obtener sus expresiones algebraicas o fórmulas. Para ello es importante conocer las transformaciones que sufre la gráfica de una función a partir de la información que brinda la variación de parámetros, la multiplicidad de raíces, reflexiones y simetrías con respecto a los ejes de coordenadas.

Enfoque y estructura del material

Cada actividad ejemplificativa así como los ejercicios y tareas propuestas en el material, constan de la descripción verbal, numérica, gráfica, analítica e icónica sobre elementos de estudio de una función en tareas de construcción, interpretación local-global o cualitativa-cuantitativa y de visualización para estimar, describir y predecir situaciones fenomenológicas, siguiendo la estructura mostrado en la figura 1.

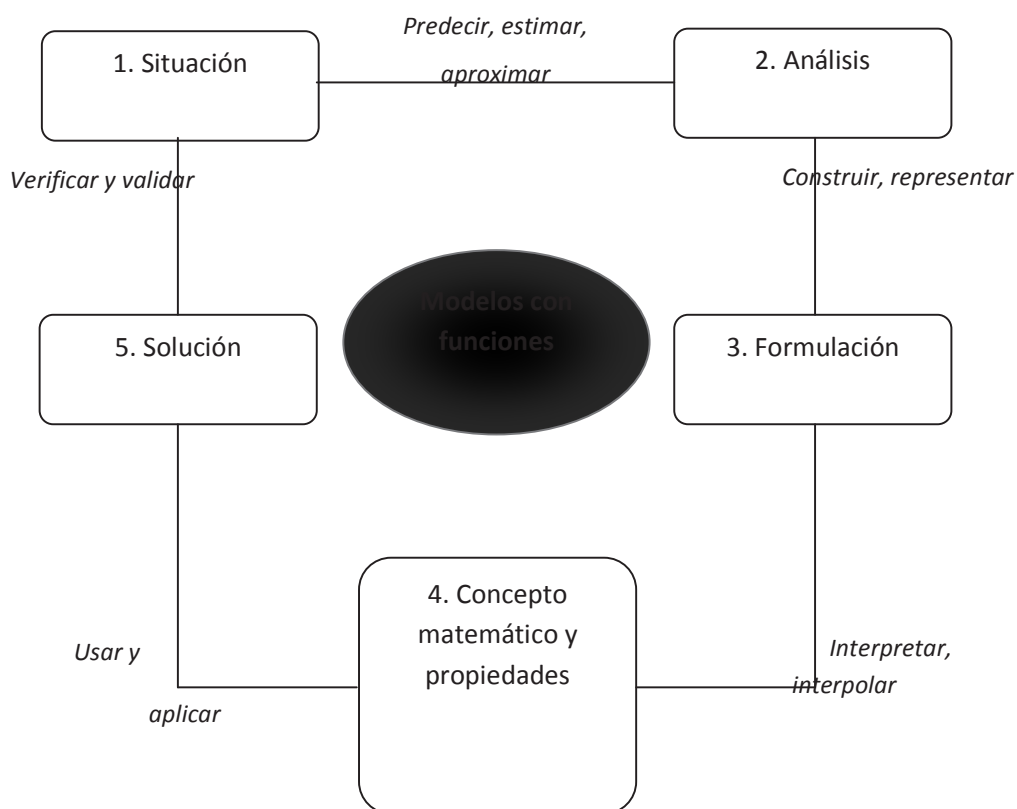


Figura 1. Estructura seguida en las situaciones de modelación

Modelación de situaciones o fenómenos con funciones

En este apartado se ilustra, mediante la modelación matemática de un proceso biológico, el tratamiento didáctico que del concepto función se hace en esta propuesta.

1. Situación

Descripción de una situación o fenómeno en el que se requiere estimar, predecir o aproximar valores del mismo, a partir de la información y datos iniciales sobre este, que se dan de forma verbal, gráfica o numérica.

Se describe una situación de reproducción celular, conocido como *meiosis*, en el que una célula cumple su ciclo en 24



horas, es decir, la célula diploide inicial se convierte en 4 células haploides. Se requiere predecir, ¿cuántas células se tendrán después de 5 días?

2. Análisis

Entendimiento del contexto, su interpretación y la identificación de variables, tanto del fenómeno como del contexto.

Para generar el modelo matemático del proceso, se consideran:

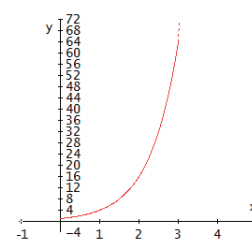
- i) Las variables que intervienen: el tiempo en que se reproduce cada célula y el número de células producidas;
- ii) La relación entre variables, es decir, la forma en que se reproducen las células.

3. Formulación del modelo

Tareas de análisis, construcción, interpretación o interpolación para generar una representación matemática del fenómeno.

Se construye una tabla o gráfica con valores iniciales del proceso, a fin de obtener una expresión analítica que lo modele, mediante el análisis de la variación de los datos.

Día	Reproducción de células
0	1
1	4
2	16
3	64
⋮	⋮
5	?



4. Uso y aplicación del concepto

matemático y sus propiedades

Presentación del contenido (concepto, relaciones matemáticas, propiedades o procedimiento) y establecimiento de una conexión con la pregunta planteada en la descripción de la situación.

5. Solución y validación

Interpretación de los resultados matemáticos para la explicación del fenómeno. Determinación del grado de exactitud del modelo y comparación de la predicción con los datos iniciales.

Del análisis de variación, se observa que:

- Las imágenes de la función que modela la situación crecen rápidamente conforme aumenta el número de días transcurridos
- Cada día se tendrán 4 veces el número de células que se tenían el día anterior

Estos aspectos caracterizan la función exponencial $y = 4^x$ (modelo analítico), x representa el número de días transcurridos.

La solución del problema se obtiene sustituyendo $x = 5$ en la expresión analítica, resultando que después de transcurridos 5 días, se tendrán 1024 células producidas. Posteriormente, se valida el modelo contrastando los datos iniciales y se predicen otros valores de la situación.

Recomendaciones

Los procesos de transformación que sufren los saberes matemáticos cuando adquieren el estatus de objetos de enseñanza, nos hacen mirar en la preparación didáctica del estudio de funciones en el cuaderno, las ideas germinales de su desarrollo conceptual. De modo que, atendiendo a la génesis, desarrollo y evolución del concepto función, se recomienda considerar en su tratamiento didáctico, los siguientes aspectos: la matematización de fenómenos; la práctica de predicción, como mecanismo de construcción del conocimiento matemático en situaciones de variación y cambio; la cuantificación del cambio y la noción de función, como relación entre variables y como regla de correspondencia.

Es preciso, también, en orden de entender el comportamiento tendencial de las funciones, promover un análisis puntual y global de sus gráficas, y de sus transformaciones.

A partir de la experiencia expuesta, advertimos la necesidad de promover, tanto en procesos instruccionales como programas de curso y materiales “didácticos”, un entendimiento conceptual de función como una forma de relacionar cantidades variables; que permite por un lado, resolver problemas de otros campos disciplinares y por otro, constituir una práctica escolar que guía los procesos de construcción del conocimiento relativo a funciones.

Referencias bibliográficas

Biembengut, M., Hein, N. (2004). Modelación matemática y los desafíos para enseñar matemática. *Educación Matemática 16(2)*, 105-125.

Blonhoj, M., Hojgaard, T. (2003). Developing mathematical modeling competence: conceptual clarification and educational planning. *Teaching mathematics and its applications 22(3)*, 123-139.

Cantoral, R. (2001). Matemática Educativa. *Un estudio de la formación social de la analiticidad*. México, D. F, México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Cantoral, R., Farfán, R. (2000). Situaciones de cambio, pensamiento y lenguaje variacional. En R. Cantoral, R. Farfán, F. Cordero, J. Alanis, R. Rodríguez y A. Garza (Eds) *Desarrollo del pensamiento matemático* (pp. 185-203). México: Trillas.

Chevallard, Y. (1998). *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado*. Argentina: Aique. (Versión original en francés, 1991).

Chevallard, Y., Joshua, M. (1982). Un exemple d'Analyse de la transposition didactique - la notion de distance. *Recherches en didactique des mathematiques, 3(2)*, 157-239.

Cordero, F. (2005). El rol de algunas categorías del conocimiento matemático en educación superior. Una socioepistemología de la integral. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa 8 (3)*, 265-286.

Hernández, H., Muñoz, G., Buendía, G. (2007). La modelación matemática en el contexto de ingeniería civil a través de la interpolación y la predicción. En C. Crespo Crespo (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 20* (pp. 567-572). México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Monzoy, J. (1998). El estudio del concepto de función en el nivel medio superior mediante la simulación de un contexto. En Hitt, F., Senties, M., Pérez, E. y Cortés, C. (Eds). *Memorias del IX Seminario Nacional de Microcomputadoras en la Educación Matemática* (pp. 45-53). México: Escuela Normal Superior de México.

Ruiz, L. (1998). *La noción de función: análisis epistemológico y didáctico*. Jaén: Universidad de Jaén.