

INDEPENDENCIA Y DEPENDENCIA ESTOCÁSTICA EN EL AULA DE SEGUNDO GRADO DE SECUNDARIA

Saúl Elizarrarás Baena, Ana María Ojeda Salazar

Escuela Normal Superior de México

México

Cinvestav del IPN

elizarrarasaul@yahoo.com.mx, amojeda@cinvestav.mx

Campo de investigación: Pensamiento relacionado con probabilidad, estadística

Nivel: Básico

Resumen. *Se presentan resultados de un estudio realizado en el aula de segundo grado de secundaria pública para identificar variaciones en los conocimientos de 40 alumnos de 13-15 años de edad, acerca de la comprensión de ideas fundamentales de estocásticos (Heitele, 1975) y, en particular, sobre independencia y dependencia estocástica. Se aplicó un mismo cuestionario, antes y después de la estrategia de enseñanza, la cual utilizó una propuesta institucional (Briseño et al, 2006). Las dificultades evidenciadas por los estudiantes y por la enseñanza apuntan a la necesidad de tratar el tema vía el enfoque frecuencial (Elizarrarás, 2004), de tal modo que se promueva la interrelación de concepto, signo y objeto (Steinbring, 2005) en la interacción social en el aula.*

Palabras clave: independencia, epistemología, cognición, secundaria

Introducción

De acuerdo con el libro de texto empleado como medio para desarrollar una estrategia de enseñanza (Briseño et al, 2006), para quienes escriben estas líneas se pretendió indagar sobre posibles respuestas acerca de las dificultades que tienen los estudiantes de segundo grado de secundaria pública para comprender las ideas de independencia y dependencia estocástica y, paralelamente, las dificultades en su enseñanza.

Elementos teóricos

La perspectiva de este estudio pone de relevancia aspectos epistemológicos, cognitivos y sociales sobre la comprensión de eventos independientes y dependientes de la probabilidad.

Epistemológicos. Heitele (1975) señala que la enseñanza de estocásticos debe iniciar tan pronto como sea posible, mediante el desarrollo de conexiones significantes de la experiencia del alumno con la realidad. Para ello propone diez ideas fundamentales de estocásticos para un curriculum en espiral: medida de probabilidad, espacio muestra, regla de la adición, regla del producto e independencia, equidistribución y simetría, combinatoria, modelo de urna y simulación, variable

estocástica, ley de los grandes números y muestra. Su carácter de fundamental radica en que proporcionan al individuo modelos explicativos en cada etapa de su desarrollo, que se diferencian en su forma lingüística y en sus niveles de elaboración, pero no en su estructura.

Cognitivos. Frawley (1999) considera al ser humano a la vez como máquina y como persona, pues la parte interna y la externa de la mente humana confluyen simultáneamente. Por tanto, caracteriza tres tipos de subjetividad: el procesamiento no consciente, la conciencia y la metacognición. Por otro lado, Fischbein (1975) enfatiza que la adquisición temprana de intuiciones equivocadas sobre estocásticos se debe prevenir con la enseñanza, pues a falta de éstas esas intuiciones se tornan de más en más difíciles de erradicar y obstaculizan el pensamiento analítico y reflexivo. En este sentido, Gigerenzer y Hoffrage (1995) plantean que el formato de frecuencias activa naturalmente el razonamiento probabilístico de los sujetos.

Sociales. Según Steinbring (2005), la práctica de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas se caracterizan por una gran variedad de construcciones e interpretaciones matemáticas, concibiendo el aprendizaje de los estudiantes como un objetivo a largo plazo.

Elementos de método

Este estudio es de carácter cualitativo (Eisner, 1998).

Escenarios. La investigación se dirigió al *libro de texto* utilizado como medio para desarrollar una estrategia de enseñanza —el cual se relaciona con el Plan y Programas de Estudio de Secundaria para Matemáticas (SEP, 2006)—, al *aula* y al desempeño de los *alumnos*. En los dos últimos escenarios participaron 40 estudiantes (13-15 años) y el docente titular de un grupo de segundo grado de secundaria pública.

Criterios de análisis. Los elementos teóricos devinieron criterios de análisis, tanto de programa de estudios y libro de texto como de datos recogidos. Se consideraron: ideas fundamentales de estocásticos, otros conceptos matemáticos, recursos semióticos para presentar la información, términos utilizados, situación planteada y estructura de la lección.

Aula. El docente titular desarrolló diez sesiones de enseñanza (cada una de 50 minutos), de las cuales seis trataron sobre la independencia de eventos. En total, se implementaron seis

actividades para tratar nociones sobre independencia de eventos y otras diez para formalizar la independencia de eventos; las 16 actividades estaban contenidas en sólo una lección propuesta en un libro de texto para segundo grado de educación secundaria (Briseño, et al, 2006). Las sesiones fueron videograbadas y transcritas para su análisis; en bitácora escrita se anotaron datos fuera de cinta y lo que se consideró conveniente señalar. La *estrategia de enseñanza*, basada en las actividades propuestas en la lección, consistió en coordinar la lectura de cada una; los estudiantes leían en forma alternada y respondían preguntas planteadas en el texto; se confrontaron las respuestas incorrectas; algunas dificultades se fueron remontando conforme se iba avanzando en las sesiones. En forma complementaria, se organizó a los alumnos en equipos de tres personas para que resolvieran algunos de los problemas propuestos en el libro de texto antes citado y, luego, cada equipo presentó la solución de uno de los problemas ante todo el grupo, aquí también se confrontaron respuestas. La enseñanza excluyó el enfoque frecuencial.

Desempeño del alumno. Previamente a las diez sesiones de enseñanza, se administró un cuestionario y, al cabo de dos meses, se aplicó tal cual el mismo cuestionario, con el propósito de identificar variaciones en el desempeño de los estudiantes.

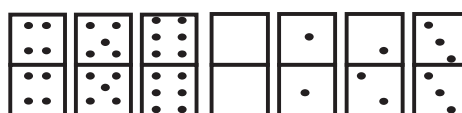
El cuestionario consistió en ocho problemas en total, dos problemas se refirieron al enfoque clásico de la probabilidad y dos al frecuencial; derivados de cada problema se planteó un problema que implicaba a la probabilidad condicional. El cuestionario se diseñó en formato de opción múltiple con cinco incisos, sólo uno correcto y el último permitía alguna otra posible respuesta del estudiante; para cada selección realizada se solicitó justificación escrita y se permitió la corrección de respuestas; su presentación, con rayas para las respuestas, insinuó la justificación en lengua natural. La contestación, individual, requirió de 50 minutos en su primera aplicación y de aproximadamente 100 minutos en la segunda. Alternadamente, se presentaba un problema para el enfoque clásico y, luego, otro para el frecuencial (por ejemplo, ver respectivamente problemas 1, 2 y 7 en la Figura 1); el primer problema se había aplicado en estudios previos (Elizarrarás y Ojeda, 2008), aunque aquí se modificó el uso de una tabla como recurso semiótico con el fin de facilitar la identificación del espacio muestra asociado al fenómeno aleatorio en cuestión.

Las opciones propuestas en el problema 1 completan las posibilidades con las fichas de dominó: con los incisos **a, c y d** se consideraron tipos de sesgos identificados en estudios previos (Fischbein, 1975), los cuales dan cuenta de dificultades de comprensión para las ideas de espacio muestra,

regla de la adición, regla del producto e independencia y combinatoria; con el inciso **b** (correcto) se consideró el evento que incluye todos los casos favorables en relación a los casos posibles, lo cual incorpora las ideas fundamentales ya citadas. Para el problema 2, los incisos se propusieron por lo siguiente: el inciso **a** (correcto) manifiesta la reducción del espacio muestra; mientras que el inciso **b** toma en cuenta las respuestas basadas en todas las fichas (28) que conforman todo el espacio muestra; los incisos **c** y **d** consideran dificultades con las ideas fundamentales implicadas (combinatoria, espacio muestra y variable aleatoria). Para el problema 7, las opciones **a**, **c** y **d** corresponden a la nula asociación de las ideas fundamentales implicadas (espacio muestra, regla de la adición, regla del producto e independencia y combinatoria).

1. Considera las **28** fichas de un dominó con la cara de sus puntos hacia abajo, Completa la tabla para que identifiques todas las parejas ordenadas que corresponden a los puntos de sus fichas.

SUMAS POSIBLES	0	(0, 0)			
	1	(0, 1)			
	2	(0, 2)	(1, 1)		
	3				
	4				
	5				
	6	(0, 6)	(1, 5)	(2, 4)	(3, 3)
	7				
	8				
	9				
	10				
	11				
	12	(6, 6)			



¿Cuál es la probabilidad de que al voltear una ficha al azar, se obtenga alguna cuya suma de puntos sea menor a seis puntos?

D) $\frac{2}{13}$

A) $\frac{1}{28}$

B) $\frac{12}{28}$

C) $\frac{6}{22}$

¿Por qué?

2. Para iniciar una partida de dominó, ni Aquiles ni Benito obtuvieron alguna ficha con los mismos puntos en sus divisiones (**mula**); iniciará el juego quien tenga la ficha cuya suma de puntos sea mayor. Aquiles mostró una ficha cuya suma es nueve, ¿cuál es la probabilidad de que Benito tenga una suma mayor a nueve puntos?

A) $\frac{4}{21}$

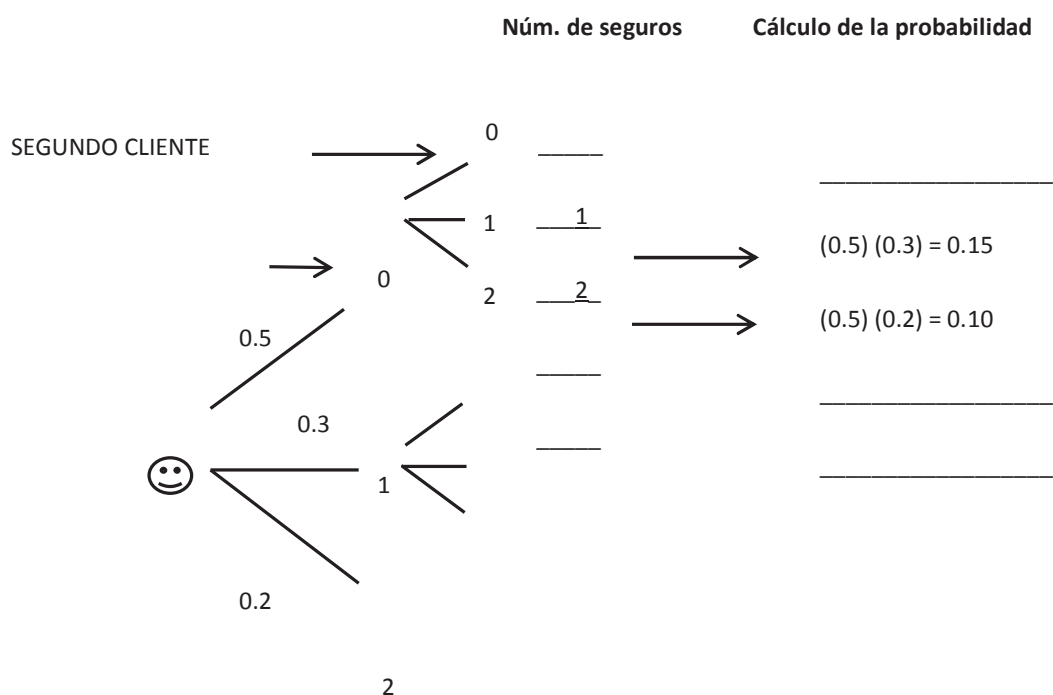
B) $\frac{4}{28}$

C) $\frac{3}{10}$

D) $\frac{1}{7}$

¿Por qué?

7. Ana se dedica a vender seguros, al visitar un cliente, sabe que: la probabilidad de venderle 2 tipos de seguros es de 0.2, la probabilidad de vender sólo uno es de 0.3 y la probabilidad de no vender es de 0.5.



Completa el diagrama de árbol anterior y responde lo siguiente:

Al visitar dos clientes, ¿cuál es la probabilidad de que les venda **exactamente** dos seguros en total?

- A) 0.2 B) 0.29 C) 0.09 D) 0.04

¿Por qué?

Figura 1. Ejemplos de problemas propuestos en el cuestionario.

Resultados del análisis de la propuesta institucional para probabilidad

La Tabla 1 presenta resultados del análisis de la lección del libro de texto citado como ejemplo del examen al que se sometió la propuesta institucional. En general, el libro de texto está organizado en cinco bloques, en concordancia con el *Plan y Programas de Estudio* (SEP, 2006); el contenido de organiza en tres ejes temáticos (Sentido numérico y pensamiento algebraico; Forma, espacio y medida y Manejo de la información) relacionados entre sí. La propuesta de estocásticos en el libro de texto se desarrolla en una sola lección (bloque 4), con sólo antecedentes de conteo (bloque 1).

El uso de notaciones simbólicas es escaso; se carece de ejemplos y de ejercicios complejos. Las situaciones planteadas hacen alusión predominantemente al enfoque clásico, las cuales son susceptibles de tratarlas mediante el enfoque frecuencial; sólo un problema propone ensayos independientes mediante lanzamientos de dados, sin pretender un análisis completo de las frecuencias absolutas y relativas obtenidas por los estudiantes.

Tabla 1. Análisis de la lección propuesta en el libro de texto (Briseño et al., 2006).

Criterio	Ideas fundamentales	Otros conceptos matemáticos	Recursos semióticos	Términos utilizados
Lección única	Medida de la probabilidad. Espacio muestra. Regla de la adición. Regla del producto e independencia. Equidistribución y simetría. Combinatoria. Modelo de urna y simulación. Variable aleatoria.	Números naturales y su orden. Operaciones con números naturales. Potencias de base 2. Desarrollo plano del hexaedro regular (cubo). Parejas ordenadas	Lengua natural, tablas de una y de doble entrada, y expresiones numéricas. Figuras. No hay símbolos numéricos en forma explícita. No se hace uso de gráficas.	Frecuencia relativa, escogió, azar, posibles probabilidad, dependen, resultados, experimento aleatorio, ocurrir, casos, selecciona, lancen lanzar, rifa, eventos, distintos, independencia, reemplazar, experimento clásico, dado cargado, simultáneamente, salga, definición clásica.

En el desarrollo de las actividades propuestas en el libro de texto utilizado, para formalizar la regla del producto se descarta la formalización matemática y, en su lugar, se plantea una proposición: *“Regla del producto: cuando dos eventos A y B son independientes, la probabilidad de que ocurran ambos eventos simultáneamente es el producto de las probabilidades de A y B.”* (Briseño, et al, 2006; p. 210).

Resultados de la enseñanza en aula

Según la secuencia de las actividades propuestas en el libro de texto (Briseño et al, 2006), la enseñanza trató vagamente la idea de independencia tal como se muestra en los pasajes transcritos que se presentan enseguida; en cambio, se limitó al cálculo de las probabilidades de los eventos implicados, dejando la formalización sistemática de la regla del producto hasta después, reproduciendo la secuencia establecida en el libro de texto citado. (Las intervenciones se denotan por: “P” (profesor), “T” (todos), “A” (alumno)).

P: Se lanza una moneda dos veces, ¿cuál es la probabilidad de obtener sol en el primer volado y sol en el segundo volado?

T: Una de cuatro.

P: Una de cuatro. Ahora bien, si yo lanzo la primera moneda, ¿los eventos son independientes o uno implica que ocurra el otro (hace una pausa) o son eventos separados?

T: Separados.

A: Independientes.

P: Independientes. ¿Quién sí encontró que la probabilidad es un cuarto? (Algunos alumnos levantan la mano). Fíjense, se va a basar en las combinaciones y para eso es el diagrama de árbol, bien. Siguiendo problema: Se lanzan tres monedas... (la enseñanza sigue la misma secuencia para este problema y también para un problema subsecuente que plantea el lanzamiento de cuatro monedas).

Durante el desarrollo de las actividades, la enseñanza fue inconsistente en el tratamiento de las ideas fundamentales de estocásticos. El pasaje anterior se refirió exclusivamente a las ideas de medida de probabilidad, espacio muestra, regla de la adición, regla del producto e independencia y combinatoria; por tanto excluyó las ideas de muestra y de ley de los grandes números. Así, descartó el enfoque frecuencial como un acercamiento natural a la idea de azar (Gigerenzer y Hoffrage, 1995), el cual ofrece la oportunidad de alimentar la comprensión del enfoque clásico de la probabilidad (Elizarrarás, 2004).

Resultados generales del cuestionario

Enseguida se muestran resultados sobre la comprensión de ideas fundamentales de estocásticos implicadas en la aplicación del cuestionario en sus dos fases (ver Figura 2).

Primera aplicación. En el problema 1, 30% de los estudiantes completaron la tabla correctamente, 47.5% lo hace en forma determinista o incompleta y 22.5% no la completa. Sólo 5% de los alumnos (dos) contestaron en forma correcta el problema 2 (referente a la probabilidad condicional); una de las respuestas fue: *Dice el problema que nadie sacó una mula, por lo que el total de fichas se redujo a 21 fichas de las 28, después dice que Benito debe de sacar un número mayor a nueve y el número total de combinaciones mayores a nueve es de 4 fichas.* Para el problema 7, el 82.5% de los estudiantes no contestaron, el 25% completaron el diagrama de árbol en forma incorrecta o parcial y sólo 2.5% (un alumno) contestó y completó el diagrama correctamente, y su argumentación fue: *Porque al sumar los diagramas [en los que] se venden dos seguros me da 0.29.*

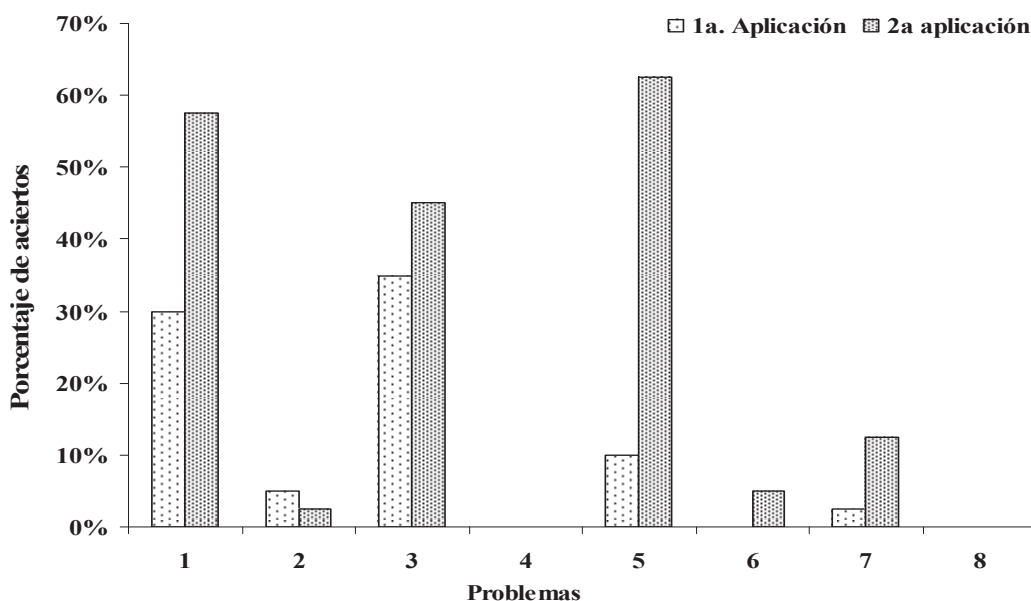


Figura 4. Resultados obtenidos en el cuestionario (antes y después de la enseñanza).

Segunda aplicación. Para el problema 1 se obtuvieron los resultados siguientes: 57.5% de los alumnos completaron correctamente la tabla, y 42.5% en forma determinista o incompleta. Sólo un alumno (2.5%), diferente a quienes habían contestado el problema 2 en la primera aplicación,

lo contestó correctamente; sin embargo, su respuesta reveló dificultades para diferenciar entre el enfoque clásico y el enfoque frecuencial de la probabilidad (*Porque son 3 casos favorables [de] que venda 2 [seguros] y si sumamos la probabilidad de cada uno de estos $(0.1 + 0.9 + 0.1)$ nos da el resultado de 0.29*); además, complementariamente, de este mismo estudiante se revelaron dificultades con otros conceptos matemáticos, tales como operaciones con números racionales y su conversión decimal ($P(\text{venta 2 seguros}) = 3/9 = 0.29$). En el problema 7 se obtuvieron 10% de respuestas nulas, 77.5% de respuestas incompletas e incorrectas y 12.5% de respuestas correctas basadas en el llenado del diagrama de árbol.

Comentarios generales

En la segunda aplicación del cuestionario, la mayoría de los estudiantes sólo lograron transitar de la etapa subjetiva del procesamiento no consciente a su frontera con la conciencia (Frawley, 1999). Las respuestas otorgadas en este instrumento por algunos estudiantes, ya sea al inicio o al final de la enseñanza, señalan la conveniencia de explicitar la dependencia de eventos como parte del currículo formal, ya que en este estudio la enseñanza se basó en el libro de texto citado, el cual privilegió la idea de independencia.

La enseñanza enfocó su práctica alrededor del enfoque clásico; descartando la comprensión de la idea de independencia vía la ley de los grandes números (Steinbring, 2005); no obstante, contribuyó a que algunos estudiantes contestaran correctamente los problemas referidos al enfoque frecuencial, pero sus argumentaciones evidenciaron una comprensión parcial de este enfoque. Lo anterior ratifica la importancia de la lectura comprensiva e interpretación de los datos contenidos en una tabla o gráfica (ver aquí los problemas 1 y 7).

En estudios previos (Ojeda y Elizarrarás, 2008) se enfatizó la necesidad de realizar una investigación más amplia en cuanto al número de sesiones de enseñanza y de lecciones que se pongan en práctica, pues se requiere proveer a los alumnos de más elementos de estocásticos en su formación. También se plantea la necesidad de realizar estudios durante la formación de docentes y hacer un seguimiento de su práctica cuando se encuentren en ejercicio profesional como titulares de un grupo en secundaria.

Referencias bibliográficas

Eisner, E. (1998). *El ojo ilustrado. Indagación cualitativa y mejora de la práctica educativa*. Barcelona: Paidós.

Elizarrarás, S y Ojeda, A. M. (2008). Implicaciones epistemológicas en la comprensión de probabilidad en tercer grado de secundaria. En P. Lestón (Ed.) *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 21* (pp.383-393). México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Elizarrarás, S. (2004). *Enseñanza y comprensión del enfoque frecuencial de la probabilidad en segundo grado de secundaria*. Tesis de Maestría no publicada. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados, Instituto Politécnico Nacional.

Fischbein, E. (1975). *The intuitive Sources of Probabilistic Thinking*. Netherlands: Reidel.

Frawley, W. (1999). *Vygotsky y la ciencia cognitiva*. Barcelona: Paidós.

Gigerenzer, G. y Hoffrage, U. (1995). How to improve bayesian reasoning without instruction. frequency formats. *Psychological Review* 102, 684-704.

Heitele, D. (1975). An Epistemological View on Stochastic Fundamental Ideas. *Educational Studies in Mathematics* 6, 187-205.

SEP (2006). *Programas de Estudio 2006. Educación Secundaria. Matemáticas*. México: SEP.

Steinbring, H. (2005). *The Construction of New Mathematical Knowledge in Classroom Interaction. An Epistemological Perspective*. New York: Springer.