

## ESTUDIO SOCIEPISTEMOLÓGICO DEL DESARROLLO DE LA RECTA TANGENTE

Luis Arturo Serna Martínez, Apolo Castañeda Alonso, Gisela Montiel Espinosa

CICATA-IPN

(México)

luisarturo\_sernamartínez@yahoo.com.mx, apcastane@gmail.com, gisela.montiel@gmail.com

**Resumen.** Diferentes investigaciones han mostrado la existencia de un fenómeno didáctico cuando en las clases de Cálculo Diferencial la representación geométrica de la derivada es estudiada. Nuestra investigación en curso tiene como propósito rescatar elementos a partir del análisis de los usos del conocimiento en obras antiguas. La Socioepistemología reconoce que el origen del conocimiento depende del escenario sociocultural en donde nace.

Nuestra intención es reconocer el significado que hubo en la recta tangente así como los usos que permitieron su construcción y poder usar ese conocimiento en el diseño de secuencias didácticas y la puesta en escena de las mismas para que los estudiantes puedan construir la recta tangente variacional y arribar a partir de este conocimiento a la noción de derivada.

**Palabras clave:** usos del conocimiento, rectas tangente variacional, significado, reconstrucción del significado

**Abstract.** Different investigations have shown that there is an educational phenomenon, when in the classes of differential calculus; the geometric representation of the derivative is studied. Our ongoing research has the purpose of rescuing items use analysis knowledge in antique books. The Socioepistemology recognizes that origin of knowledge depends on the cultural scene where born. Our intention is recognize the meaning that there were in the tangent, as well as applications that allowed its construction and can use this knowledge in the design of teaching sequences and staging to the students can construct the variational tangent and arriving from this knowledge to the notion of derivative.

**Key words:** uses of knowledge, variational tangent, meaning, reconstruction of meaning

### Presentación

Una de las más grandes fallas en la educación se encuentra en la materia de Cálculo (Marcolini y Perales, 2005), un tema que es visto en Cálculo Diferencial (CD) es la interpretación geométrica de la derivada y la forma en cómo tradicionalmente es visto con los estudiantes es fuente de dificultades tanto en el nivel medio superior como en la Universidad (Cantoral, 2000; Dolores, 2007; Serna, 2007). En el presente reporte de investigación mostramos los avances de nuestra investigación en curso, inicialmente damos una muestra a partir del análisis de investigaciones hechas en Cálculo que existe una problemática en su enseñanza aprendizaje, la cual se manifieste en los libros de texto, programas de estudio, profesores y los modelos de enseñanza aprendizaje; después vamos a definir nuestro problema de investigación, posteriormente en este reporte mostramos algunos hallazgos hechos por investigaciones sobre el CD en el siglo XVII donde es tomada en cuenta la componente epistemológica pero considerando que el nacimiento del conocimiento es situado y su significado depende del escenario sociocultural en donde nace, a continuación indicaremos cuál es el marco teórico

con el cual trabajaremos y que aún nos encontramos estructurando para finalmente dar un bosquejo de la metodología que pretendemos implementar en nuestra investigación.

### **Los libros de texto y programas de estudio**

Consideramos que los libros de texto ejercen gran influencia en la concepción que se tiene de las matemáticas en general, así como el Cálculo Diferencial (CD) en particular, es decir las ideas, formas de enseñanza aprendizaje, formas de trabajo de los y las profesoras de Cálculo Diferencial y las percepciones de los mismos estudiantes se van formando a partir de los contenidos y manejo que se da a las ideas matemáticas en los libros de texto. De acuerdo a Dolores (2007) la mayoría de los textos de CD tienen una secuenciación de los temas similar a la del Análisis Matemático, además la forma en cómo son tratados es considerando a las matemáticas bajo un enfoque formalista en donde el rigor y la lógica son primordiales, los temas tratados en la mayoría de los textos bajo este enfoque son abordados desde la matemática misma ya que no se relacionan con otras asignaturas como son Física, Economía u otras ciencias, tampoco se le relaciona con problemas de variación y cambio. Regularmente los programas de estudio son tratados en los mismos términos que se hace en los libros de texto, con la misma estructura y enfoques (Dolores, 2007); en nuestra investigación hemos hecho un análisis del programa de Cálculo Diferencial del Edo. de México el cual se encuentra trabajando bajo el enfoque de las competencias y que ha sido modificado por la reforma que se está llevando a cabo a nivel nacional, en la revisión que efectuamos pudimos observar que en la presentación que se hace del programa se hace mucho énfasis en dejar a un lado la memorización y utilizar el pensamiento crítico, se menciona también acerca de la importancia que se tiene de poner especial atención en los procesos de aprendizaje más que en la enseñanza, se dice en el plan que su enfoque es operacional e intuitivo y que no pretende justificar rigurosamente la fundamentación lógico axiomática ya que los conceptos fundamentales se introducen en la medida de lo posible en un contexto que sea familiar al estudiante, también se menciona que en el curso se analiza el cambio que sufren las cantidades que varían en todas aquellas funciones que sirven de modelos teóricos experimentales que resultan de la investigación.

Sin embargo cuando se revisan la forma en cómo está estructurado el programa observamos que se parece mucho a los programas tradicionales, hay un intento por cambiar, como observamos por ejemplo en la primera unidad ya que plantea la resolución de un problema de optimización, para posteriormente tener una secuencia de temas muy similar a la de cualquier programa tradicional de CD, al inicio de cada unidad se da un ejemplo de aplicación con el cual se pretende abordar la misma, esto último se puede inferir por el número de horas sugerido

se aplique a la resolución del problema, sin embargo desde nuestro punto de vista creemos hay una discordancia entre el discurso que se maneja en la presentación con la secuencia de los temas así como su contenido, con respecto al tema que nos ocupa que es el de la recta tangente, el cual se aborda prácticamente en los mismos términos que cualquier programa de estudio y es mediante la idea de que la recta tangente a la curva es el resultado de una familia de rectas secantes cuyo límite deviene en una recta tangente en un punto y que además ha sido reportado es causa de dificultades para la construcción del concepto (Cantoral, 2000; Dolores, 2007). Vemos entonces de que a pesar de lo que se menciona en la presentación y los ejemplos de problemas de aplicación esto no está de acuerdo a los contenidos que se presentan en el programa lo cual da pie a la ambigüedad entre los profesores y profesoras que consulten los mismos.

### Los profesores

La concepción que de las matemáticas tienen los profesores y profesoras de CD es determinante en los procesos de enseñanza aprendizaje que se da en las aulas de clase; Es muy frecuente que los profesores de matemáticas conciban a las mismas como un sistema lógico y coherente de axiomas, postulados, teoremas, definiciones y conceptos, en donde no hay falla alguna (Parra, 2005), además que se considera a los objetos matemáticos como algo ya dado y acabado que no sufre modificaciones, no obstante los elementos conceptuales de CD en varias ocasiones son de gran dificultad, lo que ocasiona dificultades para la construcción de los conceptos entre los estudiantes e inclusive en ocasiones entre los mismos profesores (Castañeda, 2004; Dolores, 2007) lo que puede ocasionar que la clase entre en crisis, para salvar tal situación se recurre frecuentemente a el empleo de algoritmos de naturaleza algebraica (Cantoral, 2000).

El uso de algoritmos permite que los estudiantes aprendan a derivar, encontrar límites, máximos y mínimos entre otras cosas, pero este hecho no implica que estén construyendo los conceptos por otro lado cuando se pretende en las clases que los estudiante apliquen los conceptos vistos en problemas, regularmente los profesores y profesoras recurren a los problemas que los mismos libros de texto proponen, pero muchos de estos problemas frecuentemente no tiene prácticamente que ver nada con la realidad, el resultado de esta forma de enseñanza propicia por un lado que los mismos estudiantes consideren que los argumentos de tipo visual no sean considerados de importancia (Castañeda, 2009); y por otro lado al no construir los elementos conceptuales, no saben reconocer el uso de los mismos en situaciones en donde se les requiere para resolver problemas (Dolores, 2007). Cuando en las clases se aborda el enfoque geométrico de la derivada surge el tema de recta tangente, es un

tema que regularmente se ve en la clase ya que se encuentra en los planes de estudio, y se toca como por requisito curricular, sin embargo después de esto no se vuelve prácticamente a utilizar (Serna, 2007). En nuestro caso consideramos que la construcción de la noción de recta tangente es un objeto matemático a construir antes inclusive de la derivada ya que este hecho permitirá construir otros conceptos como son el derivada, máximos y mínimos, así como el punto de inflexión.

### **Los modelos de enseñanza-aprendizaje**

El modelo de enseñanza-aprendizaje utilizado en las clases de CD tradicionales es aquel en que el o la profesora da una definición para posteriormente resolver un ejemplo para que posteriormente los alumnos y alumnas hagan algo similar, es decir se pretende transmitir habilidades por repetición de ejercicios, (Parra, 2005). Las matemáticas son presentadas como una colección de hechos y procedimientos los cuales son transmitidos del Profesor a los alumnos. Otra idea fuertemente arraigada es aquella referente a la actuación del profesor o profesora en la clase en donde se considera que él o ella tiene una acción predominante en la clase ya que es quien expone, aclara dudas, ilustra, enfatiza algunos puntos, da ejemplos, da instrucciones acerca de los métodos o procedimientos, para llegar a resultados correctos, determina cuales serán las tareas (Andrade, Perry, Guacaneme y Fernández, 2003); bajo este actuar quien tiene la última palabra en la clase es el profesor o profesora y no la razón, la cual podría también podría ser construida a partir de la argumentación por los alumnos, pero esto último no es con frecuencia empleado como mecanismo en para la construcción de conocimientos ya que además como el conocimiento es concebido como algo inmutable y ya dado de antemano los y las estudiantes sólo tendrían que asumir una actitud pasiva ante la acción del profesor o profesora.

### **Problema de investigación**

Las problemáticas mencionadas en las clases de CD se ven reflejadas en el tema que es de nuestro interés particular en que es el de la recta tangente, este es presentado a los y las estudiantes en la asignatura de CD cuando se trata la interpretación geométrica de la derivada; anterior a esta asignatura se han cursado otras como son Geometría y Trigonometría, así como Geometría Analítica, en estas asignaturas el tema de recta tangente es visto en clases, por ejemplo en el caso de la Geometría Euclidiana se considera que la recta tangente a la curva toca a esta misma en un sólo punto y no en otro, en Geometría Analítica se le considera como un lugar geométrico con un carácter estático, por lo tanto tiene una posición fija. Cuando el tema de recta tangente es presentado en las clases de CD se hace frecuentemente asumiendo que una familia de rectas secantes a una curva que giran alrededor de un punto devienen en

una recta tangente, esta forma de presentar el tema ha sido demostrado es causa de grandes dificultades entre los estudiantes (Cantoral, 2000; Dolores, 2007); el considerar de esta forma a la recta tangente ocasiona algunas ideas erróneas como son el hecho de que la curva toca a la misma en sólo un punto sin volver a tocarla (o cortarla) en otro punto, esto a pesar de que hay libros que aclaran lo contrario (Canul, 2009), además bajo este enfoque se pone especial énfasis en el punto de contacto que es donde la recta toca a la curva, ocultándose el carácter variacional que tiene la recta tangente a la curva (Dolores, 2007; Serna, 2007).

Existe entre los estudiantes una dificultad en crear una conexión o vínculo entre la idea que tienen de recta tangente vista en sus cursos anteriores al de CD con su carácter estático y global (considerando por global que la recta tangente toca a la curva en un solo punto dejando a toda la curva al otro lado de la recta) con la idea de una recta tangente dinámica o variable y local ( es decir tangente en la zona de contacto) tal y como es requerida en CD (Cantoral, 2000; Dolores, 2007; Martínez, 2005). De acuerdo a Serna (2007) cuando los estudiantes ven el tema de máximos y mínimos en donde se requiere tener clara la idea de recta tangente variable ya que la pendiente de esta tiene un signo que cambia después de los puntos críticos, sin embargo se ha observado que esta no es una idea que quede estabilizada entre los y las estudiantes y por lo tanto se tiene que recurrir a aprenderse los pasos de manera mecánica para encontrar los máximos y mínimos de una curva. Por lo tanto el objetivo de nuestra investigación es el diseño y puesta en escena de secuencias didácticas las cuales serán construidas a partir del análisis de obras eruditas en donde se tomará en cuenta la componente epistemológica haciendo la consideración que el conocimiento es situado ya que su significado tiene que ver con el escenario social en donde nacen las ideas, consideramos que el análisis de los usos nos permitirá recuperar el significado de los objetos (D'Amore, 2005). El reconocimiento de estos significados servirá para diseñar las secuencias didácticas las cuales tendrán el fin de que los alumnos y alumnas puedan construir la recta tangente desde un punto de vista variacional y a partir de esto se pueda arribar al concepto de derivada.

### Estado del Arte

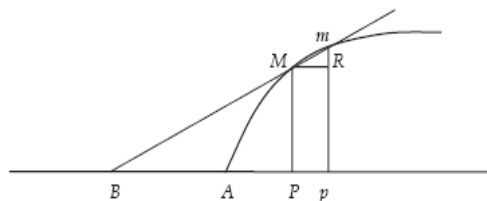
En la tesis de Castañeda (2004) se hace un análisis de dos obras de difusión del Cálculo estas son escritas por el Marqués de L'Hospital y María Agnesi en el análisis hecho a la obra de L'Hospital se da una amplia explicación sobre las diferencias, esta es una idea fundamental ya que a partir de ella se van a ir construyendo todos los demás conceptos matemáticos que van surgiendo en la obra, la comparación entre dos magnitudes se puede llevar a cabo a partir de la diferencia entre dos ordenadas de una misma curva que se encuentran infinitamente cercanas entre sí, cuando esta comparación se va llevando a cabo de manera consecutiva entonces se

puede caracterizar a la curva, por ejemplo si las diferencias se mantienen constantes entonces se trata de una línea recta, si por el contrario para los mismos cambios infinitesimales de la variable independiente no hay los mismos cambios de la variable dependiente entonces se trata de una curva; al hacer la comparación entre dos puntos de una curva por medio de la diferencia también se le puede atribuir un signo a la diferencia y por lo tanto determinar en qué regiones la curva es creciente y en que regiones decreciente, inclusive haciendo un análisis más exhaustivo que tan “rápido” va creciendo o decreciendo una variable con respecto de la otra. La diferencia fundamental:  $\rho(a + da) - \rho(a)$  “mide el desequilibrio en la naturaleza, su reconocimiento permite anunciar la presencia de flujos, así como también da cuenta de los procesos de acumulación de lo que fluye...” (Cantoral, 2001, p.348).

Observamos entonces la importancia de la diferencia ya que es la noción con la que se pueden medir cambios, ya sean estos manifestados en una curva o en los fenómenos de la naturaleza, estos cambios y su variación y la variación de la variación y así sucesivamente permiten determinar completamente la evolución de un sistema. Un aspecto muy importante en el análisis llevado a cabo en Castañeda (2004) es la descripción de los comportamientos de las curvas a partir de elementos gráfico-visuales, para esto explica en base a lo que se manejaba en el siglo XVII y XVIII, que cada punto de una curva tiene asociado una abscisa y ordenada, de tal forma que al tomar un punto de la misma y dejarlo fluir durante un instante se tendrá otro punto y al comparar las magnitudes de las ordenadas de estos dos puntos (los cuales están infinitamente cercanos) por medio de una diferencia se obtendrán los infinitesimales, los cuales son magnitudes infinitamente pequeñas y estrictamente hablando no se deberían de poder ver, sin embargo el uso de las gráficas permite ilustrarlos ya que estas magnitudes son representadas por medio de pequeños segmentos, gracias a estas representaciones se presentan explicaciones de los comportamientos infinitesimales.

En Serna (2007) se llevó a cabo un análisis de los diferentes métodos de resolución del problema de las tangentes, a partir del trabajo encontramos que se puede tratar el problema a partir de las ideas que se manejaban en el siglo VII, por ejemplo en L'Hospital se define a la curva como un conjunto de segmentos infinitamente pequeños unidos entre sí, bajo esta perspectiva podríamos definir a un punto como un segmento infinitesimal, la tangente se obtendría entonces prolongando en ambos lados uno de estos pequeños segmentos infinitesimales, de esta manera se puede intuir más claramente que en cada punto de la curva la recta tangente va a ir cambiando. Retomando los usos que se le dieron a los segmentos infinitesimales, en la investigación hecha por Castañeda (2004) en donde se reporta sobre Agnesi, ella llega por medio de argumentos geométricos a través de la semejanza de triángulos entre dos triángulos uno de dimensiones finitas y otro de dimensiones infinitamente pequeñas

a la idea de recta tangente, para llegar a esta noción se hace necesario las magnitudes infinitamente pequeñas las cuales por sí mismas representan variaciones de un punto de la curva tanto en las abscisas como en las ordenadas, al comparar estas dos magnitudes por medio de una razón es como aparece la recta tangente en la figura I, se muestra lo anteriormente dicho:



(Agnesi, 1748, pág. 433)

Figura I (Recta tangente)

En la gráfica se ilustran los infinitesimales, este tipo de argumentos permiten la construcción de la recta tangente a la curva, usando argumentos geométrico-visuales, con ellos se puede observar de manera más intuitiva una construcción de la recta tangente, en comparación con la forma tradicional de presentarla en los libros de Cálculo. Consideramos que el utilizar las magnitudes infinitesimales en conjunción con conceptos como semejanza de triángulos y el de razón de cambio son ideas que se presentan bajo esta forma de presentar a la noción de recta tangente y que pueden ser utilizadas en la didáctica actual. Planteamos como objetivo de investigación el construir la noción de recta tangente variable a partir de una epistemología en la cual se toman en cuenta argumentos como son: Diferencia, infinitesimales, magnitudes infinitesimales, variación, semejanza de triángulos, la consideración que un punto es un segmento infinitesimal, análisis de los cambios a partir de la idea de “dejar fluir” todo esto a partir de un contexto geométrico visual; así como algunos otros elementos de tipo contextual que puedan ser considerados para la construcción de la noción de recta tangente variable.

El propósito que persigue nuestra investigación a partir de los elementos encontrados los cuales surgen del análisis de obras antiguas y que consisten en determinar cuáles fueron los usos que se les dieron a las nociones que permitieron construir la noción de recta tangente desde un punto de vista variacional.

### Marco teórico

El marco teórico que vamos a utilizar es el de la teoría de la Socioepistemología, esta dota a la investigación en matemática educativa de cuatro componentes que son: la epistemológica, la cognitiva, la didáctica y la componente social, (Cantoral, 2000). La teoría considera que el

origen del conocimiento matemático depende del escenario sociocultural en donde nace, por lo tanto este va a surgir dependiendo de la época, lugar, circunstancias y necesidades de la sociedad en donde se gesta, por lo tanto el conocimiento matemático no es único absoluto e inmutable ya que el surgimiento de este es relativo y depende del contexto en donde surge.

La Teoría Socioepistemológica, plantea que para la construcción de los objetos matemáticos no se requiere centrar la atención en los objetos matemáticos, sino en las prácticas sociales que los generaron. Los usos que se les da a los objetos matemáticos tienen que ver con el significado que se le da a los mismos y esto depende de cada cultura y sociedad, de tal forma que podemos hablar de un conocimiento situado. Por lo tanto el conocimiento no es preexistente ya que depende de cada escenario en donde aparece y es ahí donde adquiere significado. Bajo la perspectiva socioepistemológica consideramos la importancia que tiene el recuperar el significado, puesto que este nos permitirá reconocer el vínculo existente entre la cognición de los estudiantes y la construcción del conocimiento matemático.

### **Metodología**

Nuestra metodología a utilizar tiene que ver con primero reconocer que existe un fenómeno didáctico que se encuentra presente en la enseñanza aprendizaje del CD, este fenómeno se refiere a la dificultad existente entre los estudiantes de poder estabilizar la idea de la interpretación geométrica de la derivada que tradicionalmente se presenta en las clases de CD, como en los libros y los mismos programas como el límite de la sucesión de una familia de rectas secantes que giran alrededor de un punto y devienen en la recta tangente a la curva, sin embargo de acuerdo a reportes de investigación esta forma de enseñanza ha sido una fuente de dificultades entre los y las estudiantes (Cantoral, 2000; Dolores, 2007; Serna, 2007). Una vez que ha caracterizado el problema se hará una revisión de corte socioepistemológico de obras antiguas en donde se indagará sobre los usos del conocimiento y el análisis de los mismos para reconocer el significado propio de la época y por medio del cual se pudo resolver el problema de las tangentes mediante elementos de tipo variacional, utilizando ideas como son: los infinitesimales, la semejanza de triángulos y la razón de cambio, la revisión se hará primero con Copérnico que es donde surgen algunas primeras ideas de tipo variacional (Serna, 2007).

Posteriormente reconocemos una evolución de los usos del conocimiento se revisarán otros matemáticos como Newton, L'Hospital y Euler en donde la intención es reconocer una evolución en los usos del conocimiento. El poder observar y analizar los usos del conocimiento y su evolución permitirá el diseño de secuencias didácticas en donde se pondrán en marcha esos usos de conocimiento matemático con la intención de que se generen nuevos significados



entre los y las estudiantes, significados que regularmente han quedado ocultos bajo el enfoque tradicionalista formal del Cálculo Diferencial (Dolores, 2007). Se tiene como intención también resignificar el conocimiento y dar cuenta de la viabilidad de la secuencias didácticas que se pretenden diseñar y como a partir de esta se puede construir un conocimiento matemático funcional que para nuestro caso es la construcción de la recta tangente desde un punto de vista variacional y que tiene como intención construir a partir de esta noción la función derivada.

### Referencias bibliográficas

- Andrade, L., Perry, P., Guacaneme, E. y Fernández, F. (2003). *La enseñanza de las Matemáticas: ¿en camino de transformación?*. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*. 6 (2), 80-106.
- Cantor, R. (1988). Historia del cálculo y su enseñanza: Del trazado de tangentes al concepto de derivada. En Hitt, F., Figueras, O., Radford, L. y Bonilla, E., *Memorias de la Segunda Reunión Centroamericana y del Caribe sobre formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa*. (Vol. Único, pp. 381-386) Guatemala
- Cantor, R. (2000). *Desarrollo del pensamiento matemático*. México: Trillas.
- Cantor, R. (2001). *Un estudio de la formación social de la analiticidad* México: Iberoamérica.
- Canul, E. (2009). *De la concepción euclidiana a la concepción Leibniziana. El caso de la recta tangente en el marco de la convención matemática*. Tesis de Maestría, Universidad Autónoma de Guerrero, México.
- Castañeda, A. (2004) *Un acercamiento a la construcción social del conocimiento: Estudio de la evolución didáctica del punto de inflexión*. Tesis Doctoral, CICATA-IPN, México.
- Castañeda, A. (2009) Aspectos que fundamentan el análisis del discurso matemático escolar. En P. Lestón (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 22, 1379-1387. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.
- D'Amore, B., (2005). *Bases filosóficas, pedagógicas, epistemológicas y conceptuales de la Didáctica de la Matemática*: México: Reverté.
- Dolores, C., (2007). *Elementos para una aproximación variacional de la derivada*. México: Díaz de Santos.
- Marcolini, M. y Perales, J. (2005). La noción de predicción: Análisis y propuesta didáctica para la educación universitaria. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 8 (1), 25-68.

- Martínez, R. (2005). *La Pendiente y su variación: un estudio didáctico y cognitivo*. Tesis de Maestría, Cimate-Facultad de Matemáticas, Universidad Autónoma de Guerrero, México.
- Parra, H. (2005). Creencias matemáticas y la relación entre actores del contexto. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 8 (1), 69-90.
- Serna, L. (2007). *Estudio Socioepistemológico de la tangente*. Tesis de Maestría, CICATA-IPN, México.