El Proceso de Elaboración de Significados de la Definición de Espacio Topológico: Un Estudio de Caso

John Edilberto Gómez Triana

Universidad Distrital Francisco José de Caldas
Facultad de Ciencias y Educación
Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas
Bogotá DC
2009

El Proceso de Elaboración de Significados de la Definición de Espacio Topológico: Un Estudio de Caso

John Edilberto Gómez Triana

Director

Álvaro Arturo Sanjuán Cuéllar
Magíster en Matemáticas

Universidad Distrital Francisco José de Caldas
Facultad de Ciencias y Educación
Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas
Bogotá DC
2009

FIRMAS

Álvaro Arturo Sanjuán Cuéllar
Director

Jaime Romero Cruz
Jurado

Rodolfo Vergel Causado
Jurado

La Universidad Distrital Francisco José de Caldas no será responsable de las ideas expuestas por el graduando en el trabajo de grado.
Artículo 117, Capítulo 05, Acuerdo 029 de 1998

Agradecimientos

Quiero agradecer en primer lugar a mi padre Edilberto Gómez y a mi madre Ana Triana quienes, con su apoyo, hicieron posible la culminación de mi carrera. En segundo lugar, agradezco al profesor Arturo Sanjuán quien es el director del presente trabajo y mi maestro.

Tabla de Contenido

Introducción 7

CAPÍTULO I
ELEMENTOS TEÓRICOS

Problema y resolución de problemas 9
Pensamiento matemático 11
Pensamiento matemático avanzado 15
Dificultades asociadas al estudio de la definición de un concepto matemático 16
Una concepción no mentalista del pensamiento 18
Pregunta de investigación 19

CAPÍTULO II
METODOLOGÍA

Metodología 22
Objetivos 25

CAPÍTULO III

Resultados 26

CAPÍTULO IV

Discusión 56

CAPÍTULO V

Conclusiones 63

Bibliografía 65
Anexos 67

INTRODUCCIÓN

Este trabajo es presentado para optar por el título de Licenciado en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas (Lebem) de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas de Bogotá Colombia. Así mismo, es el primero de una serie de trabajos de grado en la implementación de la línea de investigación *de la transición del pensamiento matemático elemental al pensamiento matemático avanzado* del grupo de investigación de Matemáticas Escolares de la Universidad Distrital (Mescud).

En la propuesta curricular de Lebem (Lebem, 1999), en concordancia con la comunidad investigadora en educación matemática y los lineamientos curriculares (NCTM, 2000, MEN, 1998), se privilegia "la actividad matemática". Es decir, se considera como objetivo general y principal, el que los estudiantes "aprendan a pensar matemáticamente" a través de la *resolución de problemas*. Esto es, el poner énfasis en los procesos característicos como clasificar, particularizar, generalizar y argumentar (Mason, Burton & Stacey, 1989).
Ahora bien, cuando el énfasis está en los procesos de demostrar, definir y abstraer o en objetos matemáticos avanzados cómo función, límite, espacio topológico, etc., se trata del *pensamiento matemático avanzado* (PMA) (Tall, 1988).

Por *pensamiento* entendemos reflexión, es decir, un movimiento dialéctico entre una realidad constituida tanto histórica como culturalmente y un individuo que la refracta y la modifica según las interpretaciones y sentidos subjetivos propios (Radford, 2006). En este sentido, la resolución de problemas no es un fin sino un medio para alcanzar tal reflexión cultural.

Las *definiciones* son ejemplo de objetos presentes en la cultura de la comunidad matemática. En este contexto, la definición es una forma de palabras usada para especificar un concepto (Tall & Vinner, 1981, p. 152) y satisface las reglas de la lógica (Poincaré, 1908), citados en Puig (1996). Por sí misma, la definición en matemáticas no es un problema. Es cuando el estudiante elabora significados y la dota de sentido que se convierte en problema. Es así como el problema depende, por lo menos, del sujeto que lo enfrenta (Puig, 1996).

El cómo ocurre la problematización, entendida cómo elaboración de significados, de la definición de espacio topológico por un estudiante para profesor de matemáticas es lo que se tratará en el presente trabajo.

Finalmente, el presente trabajo posee cinco capítulos. El capítulo I (*Elementos Teóricos*) está escrito en impersonal teniendo en cuenta que corresponde a los aspectos teóricos construidos como sustento de la investigación, el capítulo II (*Metodología*) y el capitulo III (*Resultados*) están escritos en primera persona y en pasado, ya que corresponden a la descripción de la investigación y al desarrollo de misma, los apartes de los resultados que están escritos en impersonal corresponden a las afirmaciones y conclusiones inferidas a partir del análisis de los datos obtenidos en la investigación y pueden ser vistos como aportes a los elementos teóricos construidos para el presente trabajo. El capítulo IV (*Discusión*) está escrito en impersonal y en el se consigna la argumentación de las conclusiones más relevantes producidas del análisis de los datos obtenidos en la investigación, dicha argumentación tiene en cuenta los elementos teóricos que sustentan este trabajo.

Capítulo I

Elementos Teóricos

La resolución de problemas de matemáticas
ha llegado a ser calificada por los matemáticos
profesionales como el corazón de éstas
Paul Halmos

Problema y Resolución de Problemas

Schoenfeld (1992), citado en Puig (1996), afirma que la literatura sobre resolución de problemas de matemáticas es difícil de interpretar, porque «problema» y «resolución de problemas» tienen y han tenido significados variados y en ocasiones contradictorios. Algunas caracterizaciones de estos términos se pueden encontrar en Bohórquez & Sanjuán (2008) y en Puig (1996).

Puig (1996) clasifica el término problema dependiendo los actores que aparecen en escena, teniendo en cuenta lo que es propio de cada uno de los personajes y las relaciones entre ellos. Es así como propone tres niveles de análisis. En el Nivel I, aparece sólo el problema. En el Nivel II es necesario considerar el problema y el estudiante o

resolutor que se enfrenta a él. Por último, en el Nivel III intervienen problema, estudiante y profesor.

Para efectos de este trabajo, centraremos el análisis en el proceso llevado por el sujeto que se enfrenta al problema. Es decir, una idea de problema de Nivel II. Algunas caracterizaciones de problema de este nivel, se encuentran en Polya (1945) y Brown (1985) citado en Puig (1996). No obstante, en este trabajo no se adoptará ninguna caracterización de problema. Esto corresponde con Puig (1996), quien termina por decidir que no se puede definir problema.

Por el proceso de resolución de problemas se entiende “la actividad mental y manifiesta que desarrolla el resolutor desde el momento en que, presentándosele un problema, asume que lo que tiene delante es un problema y quiere resolverlo, hasta que da por acabada la tarea.” (Puig, 1996, p.34)

De otra parte, se distinguirá entre *resultado, solución y resolución;* para hacer tal distinción se tendrá en cuenta lo planteado en Puig (1996) donde se describe que el término *resultado* indica lo que contesta a la pregunta del problema, ya sea un número, una fórmula, una expresión algebraica, una construcción geométrica, una demostración, etc. El término *solución* está asociado a la presentación final del conjunto de pasos que conducen de los datos a la incógnita o de la hipótesis a la conclusión. Finalmente, el término *resolución* se usará para indicar el conjunto de acciones que se pongan en uso, como resolutor, durante el proceso, que pueden conducir a obtener la solución o no.

Ahora, si nos centramos en la idea de que ``las matemáticas no son un producto acabado, sino un conocimiento dinámico que está constantemente expandiéndose y reajustándose de acuerdo con nuevas situaciones problemáticas" (Santos, 2007, p. 24); entonces, como lo afirma Santos (2007), es importante considerar la resolución de problemas como una forma de pensar en la que continuamente se tienen que desarrollar diversas habilidades y utilizar diferentes estrategias en el aprendizaje de las matemáticas, es decir, se debe problematizar el estudio de la disciplina.

Partiendo de lo anterior, debemos considerar que en el proceso de resolución de problemas, es posible que el estudiante que se enfrenta al problema, transforme el problema en otro a través de un cambio de registro, la simplificación del problema original,

un caso particular o un problema general. Esto hace parte de lo que Polya (1945) llama *heurísticas*. Pero al transformar el problema en otro, es lo que Puig (1996) llama *herramientas heurísticas*. Las herramientas heurísticas y la búsqueda en fuentes de información está clasificado como *estrategias de resolución* (Santos, 2007).

Por último, en este trabajo los problemas no están diseñados desde los conceptos como ocurre en una perspectiva de resolución de problemas como la de Brousseau (1986). Lo anterior no va en detrimento de querer ganar comprensión del concepto de espacio topológico a través del objeto definición. En este sentido, nos situamos en el mundo de la pura resolución de problemas (PRP) que de acuerdo con Puig (1996) es el mundo en el que los problemas no son vistos desde conceptos si no desde los propios problemas. Es decir, se estudiará un proceso de resolución de problemas considerado para observar el impacto que dicho proceso puede tener en la elaboración de aspectos relacionados a conceptos asociados al pensamiento matemático avanzado. De esta manera surge la necesidad de precisar qué se entiende por pensamiento matemático y por pensamiento matemático avanzado.

Pensamiento Matemático

El *pensamiento matemático* es entendido como "un proceso dinámico que, al permitirnos aumentar la complejidad de las ideas que podemos manejar, extiende nuestra capacidad de comprensión" (Mason, Burton y Stacey, 1982, p. 167). Mason et al. (1982) en su libro titulado Pensar Matemáticamente, realizan una propuesta metodológica basada en la resolución de problemas, que permite el desarrollo del pensamiento matemático por medio de la sistematización y reflexión del proceso de resolución de problemas de cada individuo. Dicha propuesta, está influenciada por los planteamientos de Polya (1945) sobre la manera de resolver problemas de matemáticas.

Mason, Burton & Stacey (1982) identifican tres fases en el proceso de resolución de problemas de matemáticas: ***Entrada, Ataque y Revisión***. Estas fases están presentes en el proceso de resolución de una serie de problemas propuestos en el libro, los autores afirman que en el momento en el que un individuo haga explícita cada una de estas fases en el proceso de resolución de cualquier problema de matemáticas, podrá tener herramientas que faciliten el desarrollo del pensamiento matemático.

En el obra citada se presenta una metodología que puede ser utilizada para resolver ciertos problemas de matemáticas que no están alejados del contexto real de cualquier individuo. De esta manera, se propone una serie de estrategias para que el resolutor las utilice en el proceso de resolución. Estas estrategias están enmarcadas en las tres grandes fases enunciadas anteriormente y están asociadas a lo que los autores llaman ***rótulos***. Los rótulos son unas etiquetas que aconsejan utilizar durante la resolución de cualquier problema de matemáticas y que se convierten en una manera de sistematizar el proceso de resolución, para que pueda ser analizado durante el mismo. Las características de cada una de las fases con sus respectivos rótulos son descritos a continuación:

1. *Fase de abordaje:* Esta fase tiene que ver con formular el problema de forma precisa y decidir exactamente qué es lo que se quiere hacer. Hay que hacerse con el problema de dos maneras distintas; identificando la información que se da y determinando qué es lo que se pregunta realmente. Por último, se debe hacer preparativos técnicos para el ataque central, que pueden consistir en decidir una notación a utilizar o una forma de anotar los resultados de las particularizaciones.

   Por estas razones es útil estructurar el trabajo en la fase de abordaje respondiendo a las tres preguntas siguientes, que a su vez son rótulos: ***¿Qué es lo que sé?, ¿Qué es lo que quiero?*** y ***¿Qué puedo usar?***

2. *Fase de ataque:* La fase de ataque está determinada cuando se siente que el problema se ha instalado dentro de la mente y ya es propiedad del individuo, y se completa cuando o bien se abandona o bien se resuelve. ***Intentar, Podría ser, Pero ¿por qué?, ¡ATASCADO!*** y ***¡AJA!*** Son los rótulos propuestos en esta fase.

3. *Fase de revisión:* Está determinada cuando se consigue una resolución razonablemente buena o cuando se está a punto de rendirse, en este momento es esencial revisar el trabajo hecho. Como su nombre lo indica, es el momento de mirar atrás, a lo que ha pasado, para mejorar y ampliar la capacidad de razonamiento y para intentar situar la resolución en un contexto más general. ***Comprobar, Reflexionar, y Extender.*** Son los rótulos que se aconseja utilizar en la fase de revisión.

Un resumen de los aspectos de la metodología propuesta por Mason et al. (1982) para la resolución de problemas de matemáticas se presenta en la Figura (1).

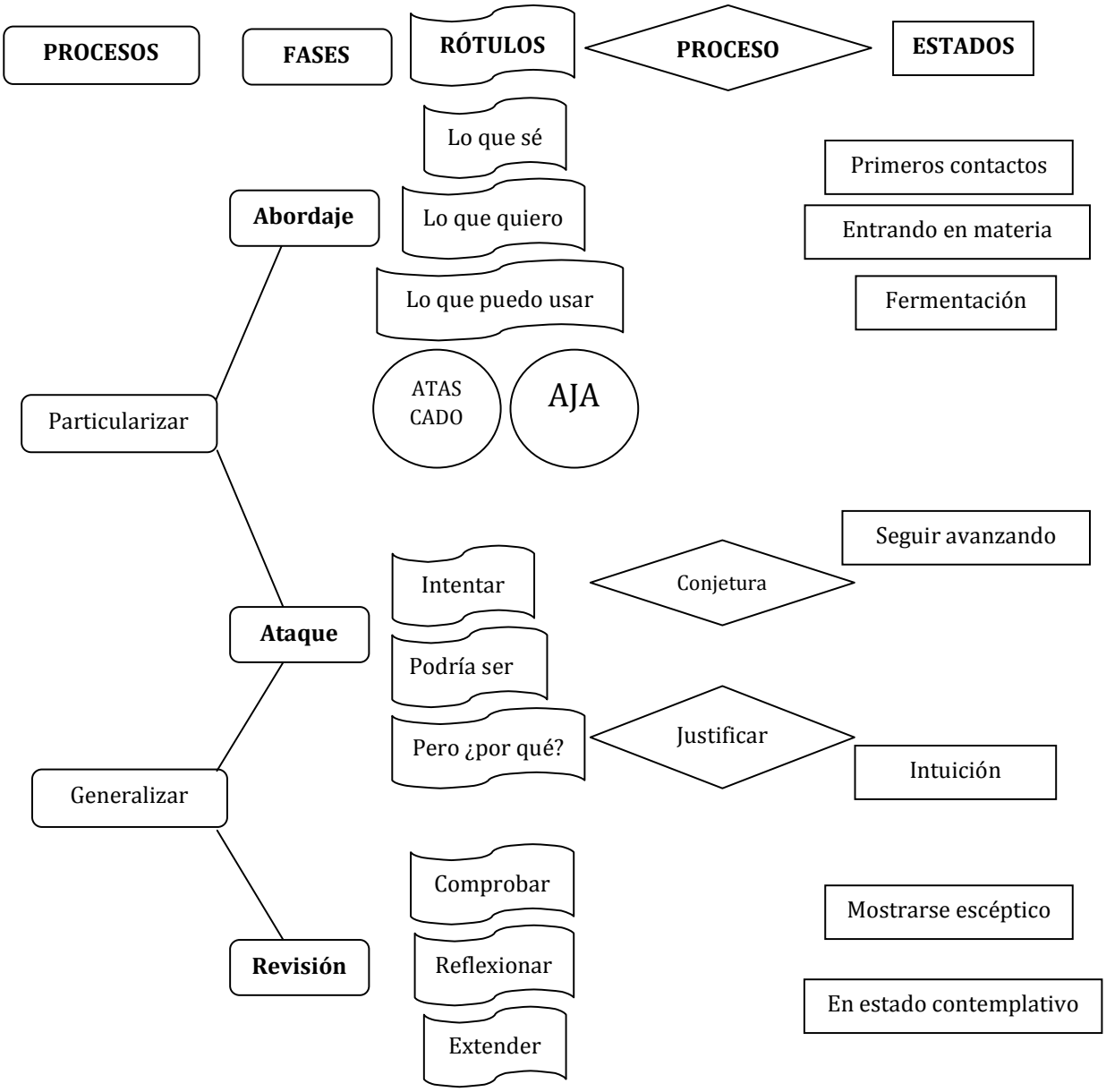


Figura (1): Episodios presentes en la resolución de problemas de matemáticas. Tomado de Mason et al. (1982)

De acuerdo con Tall (1988, p. 6) “las matemáticas avanzadas incluyen todas estas fases, enriqueciendo la fase de revisión se incluye el edificio de la estructura de conocimiento en una secuencia formal de deducciones y de definiciones de los conceptos”. Este autor afirma que la existencia de la fase final de revisión o precisión de la demostración es la diferencia significativa entre el pensamiento matemático elemental y el pensamiento matemático avanzado.

Por lo dicho anteriormente, se puede inferir que en el estudio de las matemáticas es importante aprender a pensar matemáticamente y que de acuerdo con Shoenfeld, significa:

> "[...] a) desarrollar un punto de vista que valore el proceso de matematización y abstracción y tener la tendencia a aplicarlos, y b) desarrollar una competencia con las herramientas de trabajo y usarlas en la meta de entender y construir estructuras -desarrollar el sentido matemático-" (Schoenfeld, 1994. Citado en Santos, 2007, p. 12).

Es así como la metodología propuesta por Mason, Burton & Stacey (1982) privilegia la sistematización y reflexión del proceso de resolución de problemas en aras de desarrollar el pensamiento matemático. Esto es lo que Shoenfeld (1987) llama *metacognición* y que ``[…] se refiere al conocimiento de nuestro propio proceso cognoscitivo, al monitoreo activo y a la consecuente regulación y orquestación de las decisiones y procesos utilizados en la resolución de un problema''(Santos, 2007, p. 59).

En este sentido, en un ejercicio de metacognición Shoenfeld (1987), citado en Santos (2007), identifica tres categorías:

1. El conocimiento acerca de nuestro propio proceso, la descripción de nuestro propio proceso de pensar.
2. El control y la autorregulación. Qué tan bien es capaz uno de seguir lo que se hace cuando se resuelve algún problema y qué tan bien se ajusta uno al proceso (ejecución de acciones) tomando en cuenta las observaciones que se hagan durante la evolución de éste.
3. Creencias e intuiciones. Las ideas acerca de las matemáticas que se muestran en el trabajo matemático y la forma como éstas se relacionan o se identifican con la forma de resolver problemas.

Las anteriores categorías, junto con la metodología propuesta por Mason, Burton & Stacey (1982), específicamente los rótulos presentes en cada fase del proceso de resolución, se tendrán en cuenta para realizar el análisis del proceso de elaboración de significados de la definición de espacio topológico. Ahora, después de puntualizar qué se

entiende por pensamiento matemático y cómo se piensa en matemáticas, podemos precisar lo que se concibe como pensamiento matemático avanzado.

Pensamiento Matemático Avanzado

Tall (1988) afirma que es difícil especificar una lista de atributos que diferencien o caractericen el *pensamiento matemático avanzado.* No obstante, algunos de estos atributos involucran la generalización, abstracción y el uso de definiciones de conceptos para la deducción asociativa y lógica; resaltando que:

- La ***generalización*** es el proceso de formar conclusiones generales a partir de casos particulares.
- La ***abstracción*** es el aislamiento de atributos específicos de un concepto para que éstos puedan ser considerados separadamente de los otros atributos.
- La insistencia en la ***demostración*** lógica, en lugar de la justificación coherente, que involucra:
    a. La deducción de propiedades de conceptos matemáticos (dadas las definiciones de conceptos)
    b. La implicación que si ciertas propiedades matemáticas se sostienen, entonces las otras se siguen.

Entonces el pensamiento en matemáticas avanzadas es más que sólo la estructura final de la teoría matemática ya que el "pensamiento matemático avanzado hace parte del proceso completo de resolver problemas de matemáticas, de los procesos creativos involucrando resonancias entre deducción y asociación previamente no relacionadas, o incluso indefinidas". (Tall, 1988, p. 7). En este sentido, un proceso específico puede ser designado como pensamiento matemático avanzado porque es parte, o incluso potencialmente parte, del ciclo completo de resolución de problemas de matemáticas.

De acuerdo con Tall (1988), el pensamiento matemático avanzado ocurre en un campo conceptual matemático donde son apropiadas las estructuras matemáticas abstractas disponibles para fortalecer una red de relaciones deductivas. Por consiguiente, "hay actividades preliminares poniendo el fundamento para el pensamiento matemático avanzado que introducen conceptos no inmediatamente abstraídos de la realidad, tal

como la noción matemática de un proceso infinito, la noción de un límite o el cardinal del infinito" (Tall, 1988).

Ahora, si nos centramos en el marco de la matemática avanzada, que se basa en definiciones formales de los objetos matemáticos y demostraciones de teoremas asociados a dichos objetos; entonces tenemos en cuenta que "una definición matemática o teorema se dice formalmente operable para un individuo dado, si tal individuo puede usarla o significativamente reproducirla en un argumento formal" (Tall, 1998, p. 7). Entonces, teniendo en cuenta lo anterior, se debe enunciar algunas de las dificultades que tiene un estudiante durante el proceso de estudio y comprensión de la definición de un concepto matemático y como influyen tales dificultades en el sentido que adquiere dicha definición.

Dificultades Asociadas al Estudio de la Definición de un Concepto Matemático

Cuando un estudiante se pone en la tarea de aprender conceptos de matemática avanzada, se encuentra con una dificultad relacionada con el entendimiento de las definiciones de los objetos matemáticos. Dice Tall (1992) que el problema radica en que el método individual de pensamiento sobre conceptos matemáticos no depende solamente de la forma de las palabras usadas en una definición, si no que, "dentro de la actividad matemática, las nociones matemáticas no son sólo usadas acordando su definición formal, también a través de representaciones mentales que pueden diferir con respecto a diferentes personas" (Tall, 1992, p. 5). Estas representaciones individuales son elaboradas de modelos espontáneos, que se producen en el individuo antes del aprendizaje de las nociones matemáticas y pueden originarse como producto de la experiencia diaria, dichos modelos espontáneos pueden interferir con el significado de la definición matemática.

Según el autor citado, de esta manera la experiencia de los estudiantes antes de encontrarse con las definiciones formales afecta profundamente la manera en la que ellos forman representaciones mentales de estos conceptos. En este sentido, se debe entonces distinguir entre la imagen de un concepto matemático y la definición de un concepto matemático para poder analizar la manera en la que un estudiante dota de significado a dicho concepto; para hacer tal distinción Tall (1992) proporciona una descripción de cada término:

> Debemos usar el término imagen del concepto para describir la estructura total cognitiva que es asociada con el concepto, que incluye todas las imágenes mentales, propiedades y procesos asociados […]. Cuando la imagen del concepto de desarrolla no necesita ser en todo momento coherente […]. Nosotros nos referimos a la porción de la imagen del concepto que se activa en un momento particular en el que dicha imagen es evocada. En momentos diferentes, aparentemente imágenes contradictorias pueden ser evocadas. Solo cuando aspectos contradictorios son evocados simultáneamente se presenta un sentido real de conflicto o confusión.
>
> Por otro lado, la definición del concepto es una forma de palabras usada para especificar ese concepto (Tall & Vinner, 1981, p. 152) y que satisface las reglas de la lógica (Poincaré, 1908 citado en Tall, 1992)

En general, esto es aplicable a la transición al pensamiento matemático avanzado cuando un estudiante tiene en la mente simultáneamente imágenes del concepto basadas en experiencias tempranas interactuando con nuevas ideas basadas en definiciones y deducciones, ya que la misma idea de definir un concepto puede ser opuesto a describirlo y es en principio muy difícil para comprender si además existen palabras en la definición que no son definidas.

Ahora, si tenemos en cuenta que en "un tratamiento matemático una definición es dada (quizás en conjunción con algunos ejemplos) y entonces los teoremas son probados sobre cualquier objeto que satisface la definición" (Tall, 1992), se observa que esto le trae al estudiante serias dificultades cognitivas debido a que los planteamientos dados en las definiciones y teoremas entran en contradicción con las ideas que él ha construido en experiencias previas, causando que el estudiante a menudo no le encuentre significado a lo que expone la definición formal de un concepto matemático particular. Esto teniendo en cuenta que la presentación formal de la definición, se convierte en un obstáculo para el estudiante cuando intenta encontrarle algún sentido al concepto que se está definiendo.

Entonces, ¿cómo un estudiante puede dotar de sentido a una definición de un concepto matemático asociado al pensamiento matemático avanzado? si, como lo afirma Tall (1992), el uso ambiguo de los símbolos como procesos o como objetos puede traer grandes dificultades a un individuo que se encuentra en la fase inicial de comprensión del objeto matemático al cual hace referencia la definición.

Antes de responder el anterior interrogante, se debe precisar cómo es posible observar si un estudiante dotó de sentido a una definición matemática y bajo qué mirada se puede juzgar si se adquirió algún significado del objeto matemático al cual hace referencia la definición.

Una Concepción no Mentalista del Pensamiento

Inicialmente se debe tener en cuenta que “el pensamiento es considerado como una reflexión mediatizada del mundo de acuerdo con la forma o modo de la actividad de los individuos” (Radford, 2006, p. 107); en este sentido, el carácter mediatizado del pensamiento viene dado por el papel que desempeñan los artefactos (objetos, instrumentos, sistemas de signos, etc.) en la realización de la práctica social.

Radford (2006, p. 108) plantea que “el pensamiento es una reflexión, es decir, es un movimiento dialéctico entre una realidad constituida tanto históricamente como culturalmente y un individuo que la refracta y la modifica según las interpretaciones y sentidos subjetivos propios”. Además, en el curso de la actividad matemática “los objetos matemáticos son patrones fijos de actividad reflexiva incrustados en el mundo en cambio constante de la práctica social mediatizada por los artefactos” (Radford, 2006, p. 111).

En este contexto, ``el aprendizaje no consiste en construir o reconstruir un conocimiento. Se trata de dotar de sentido a los objetos conceptuales que encuentra el alumno en su cultura. La adquisición del saber es un proceso de elaboración activa de significados". (Radford, 2006 p. 113). En este sentido, se podría afirmar que ``la resolución de problemas no es el fin sino un medio para alcanzar [...] esa reflexión cultural que llamamos pensamiento matemático". (Radford, 2006, p. 114).

Ahora, volviendo al interrogante de ¿cómo un estudiante puede dotar de sentido a una definición de un concepto matemático asociado al pensamiento matemático avanzado? Y teniendo un planteamiento basado en la resolución de problemas como metodología de aprendizaje, se desarrolla un ejercicio de investigación para buscar una respuesta a la pregunta citada, dicho trabajo gira en torno a analizar el desarrollo de mi pensamiento matemático en el proceso de elaboración de significados de la definición de espacio topológico, por medio de la aplicación de una propuesta metodológica de resolución de problemas como la de Mason, Burton & Stacey (1982)

Tomando en cuenta los anteriores planteamientos teóricos, el ejercicio de investigación estuvo centrado en observar qué elementos de la metodología propuesta por Mason, Burton & Stacey (1982) estuvieron presentes en el proceso de resolución de problemas en el marco del pensamiento matemático avanzado y se proponen unas nuevas que a mi parecer son relevantes al momento de sistematizar el proceso de elaboración de significados de la definición de un objeto matemático enmarcado en el pensamiento matemático avanzado.

De esta manera, para el desarrollo del presente trabajo, se formula la siguiente pregunta que orientó el análisis de los datos recolectados y sobre la cual recae la atención del trabajo de investigación.

Pregunta de Investigación

> *¿Qué elementos de la metodología propuesta por Mason, Burton & Stacey (1982), para la resolución de problemas de matemáticas aparecen durante la elaboración de significados de la definición de espacio topológico?*

La anterior pregunta fue formulada antes del desarrollo del presente trabajo y fue la pregunta que orientó el mismo. Después de la culminación del proceso de investigación, objeto de este trabajo, se observó que también era posible proporcionar una respuesta a la siguiente pregunta.

> *¿Cómo, por medio de la resolución de problemas, se puede problematizar el estudio de la definición de un concepto matemático enmarcado en el pensamiento matemático avanzado?*

La primera pregunta surge del interés de observar si la propuesta de Mason, Burton & Stacey (1982) puede ser utilizada como forma de sistematización del proceso de elaboración de significados de la definición de espacio topológico y en la acepción de problemas de pensamiento matemático avanzado que se tiene en cuenta en este trabajo. Lo anterior, parte del hecho de que Tall (1992, 1999) no descarta que se pueda partir de la definición, por más abstracta que parezca, siempre y cuando se pueda dotar de sentido. Lo que lleva a pensar que si se posee una herramienta metodológica apropiada

es posible utilizar la resolución de problemas como medio de elaboración de significados de la definición de conceptos asociados a la matemática avanzada, este hecho motivó la formulación de la segunda pregunta.

El planteamiento de las anteriores preguntas es pertinente en el sentido que como futuro profesor de matemáticas debo ser investigador de mi propia práctica y en este caso de mi práctica como resolutor de problemas. Es decir, es importante analizar el desarrollo de mi pensamiento matemático avanzado. De hecho, este pensamiento es uno de los núcleos problémicos de la estructura curricular de la Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas (Lebem) y debido a la ausencia de trabajos, en el proyecto curricular Lebem en esta dirección, es importante desarrollar un trabajo que arroje información con respecto a la manera en la que un estudiante de la licenciatura adquiere elementos que posibiliten el desarrollo del pensamiento matemático avanzado por medio de la resolución de problemas y la reflexión sobre el proceso de resolución.

Por otro lado y teniendo en cuenta que “una de las consecuencias más excitantes de aprender a exponer, usar y desarrollar tu propio pensamiento matemático es que te haces más sensible al razonamiento matemático de otras personas" (Manson, Burton & Stacey, 1982, p. 151), es conveniente para un futuro profesor de matemáticas el realizar un ejercicio en el cual se ponga de manifiesto el proceso de elaboración de significados de un concepto matemático en particular, partiendo de la definición del mismo, a través de la resolución de problemas y así poder ofrecerle a los demás las herramientas utilizadas en la compresión de mi proceso de aprendizaje.

Finalmente, realizar una descripción de un proceso como el descrito anteriormente, puede brindar elementos para el planteamiento de herramientas metodológicas para el aprendizaje, esto partiendo del hecho que

> Describir el pensamiento como un “discurso mental”, como una especie de conversación del individuo consigo mismo, no es un error. Los diálogos en cuestión muestran los progresos de la solución; aquel que intenta resolver problemas hablando consigo mismo puede progresar siguiendo un curso similar (Polya, 1965, p. 104).

El planteamiento anterior pone de manifiesto, que en la actividad matemática, es aconsejable hacer explícito el proceso de pensamiento que se esté llevando acabo, por

medio de la utilización de diferentes herramientas o, en palabras de Radford (2006), por medio de los artefactos que permiten mediatizar el pensamiento. Desde este punto de vista es posible caracterizar el pensamiento desde una concepción no mentalista.

En este sentido, este trabajo puede aportar herramientas a todo aquel que desee enfrentarse por si solo a la resolución de problemas en el pensamiento matemático avanzado, ya que el objetivo es sistematizar mi experiencia como resolutor de problemas de matemática avanzada por medio de una metodología de resolución de problemas en la que se plantea una forma de organizar y aprovechar el proceso de resolución apuntando al desarrollo del pensamiento matemático y en este caso del pensamiento matemático avanzado.

Capítulo II

Metodología

El trabajo tuvo carácter *naturalista, exploratorio, teórico y empírico* (Puig, 1996, p.16). Es de tipo *naturalista* porque se tomó como ámbito del trabajo el desarrollo de mi proceso de elaboración de significados de la definición de espacio topológico tomando la resolución de problemas como metodología de aprendizaje, con lo que no pretendo que los resultados obtenidos sean representativos de ninguna población más amplia. Es *exploratorio* porque se pone bajo observación mi proceso de comprensión de la definición utilizando como herramienta, de sistematización de mi proceso de resolución, la propuesta de Mason, Burton & Stacey (1982), tal proceso es observable con la teoría de la que se dispone y se tomó como datos todos los hechos de cognición y metacognición presentes en la elaboración de significados de la definición. Es *teórico* porque la elaboración de los elementos teóricos, y la ida y vuelta de ellos a los datos empíricos, fue una de las intenciones del trabajo, y es *empírico* porque los elementos teóricos se elaboraron para dar cuenta de datos empíricos y se circunscriben a ellos.

El presente trabajo de investigación es un estudio de caso, en el que se observó y se analizó mi proceso de elaboración de significados de la definición de espacio topológico utilizando como herramienta la metodología propuesta por Mason et al (1982) para la resolución de problemas de matemáticas. Finalmente, se formularon una serie de conclusiones teniendo en cuenta el análisis de los datos obtenidos, vistos bajo la luz de los elementos teóricos construidos para tal fin.

Para la obtención de los datos realicé un monitoreo del desarrollo de mi pensamiento matemático avanzado por medio de un ejercicio de metacognición de mi proceso de elaboración de significados de la definición de espacio topológico así como del proceso de resolución de problemas en el contexto del pensamiento matemático avanzado utilizados con el fin de dotar de significado a la definición.

Tales datos fueron recogidos utilizando como instrumento de recolección principal un cuaderno que llamé cuaderno de trabajo y en el que se almacenó mi proceso de estudio y comprensión de la definición de espacio topológico, teniendo en cuenta la propuesta metodológica de Mason et al. (1982) y centrando la atención en los rótulos propuestos para cada una de las fases presentes en el proceso de resolución de problemas. Como instrumento de recolección auxiliar se optó por grabaciones en audio en las que están plasmados los aspectos de mi proceso de pensamiento que se escapan de la expresión escrita, es decir, las grabaciones fueron utilizadas para registrar aquellas ideas que difícilmente quedan plasmadas en el proceso de sistematización de la información en el cuaderno de trabajo, ya que corresponden a los procesos de pensamiento que se llevan a cabo cuando se reflexiona acerca del proceso llevado de manera escrita. El cuaderno de trabajo y las grabaciones puede considerarse como lo que Radford (2006) llama artefactos, ya que por medio de ellos, se refracta el pensamiento y son pensamiento mismo. Por esto, es posible observar el pensamiento y el proceso de elaboración de significados desde esta concepción no mentalista del mismo.

Como se mencionó anteriormente, las categorías planteadas por Schoenfeld (1987), citado en Santos (2007), sirvieron para realizar el análisis de los datos obtenidos en el ejercicio de metacognición. Teniendo en cuenta la importancia de estas categorías para el análisis de los datos obtenidos en el ejercicio de metacognición, es importante traerlas a colación y explicitar cómo fueron utilizadas para el análisis de dichos datos. Entonces, en un ejercicio de metacognición se identifican tres categorías:

1. **El conocimiento acerca de nuestro propio proceso, la descripción de nuestro propio proceso de pensar.** Uno de los propósitos del presente trabajo fue realizar una descripción de mi proceso de elaboración de significados de la definición de espacio topológico, entonces tal descripción se convirtió en si misma en un dato de

la investigación y puede ser categorizada utilizando esta primera categoría presente en un ejercicio de metacognición.

2. **El control y la autorregulación. Qué tan bien es capaz uno de seguir lo que se hace cuando se resuelve algún problema y qué tan bien se ajusta uno al proceso (ejecución de acciones) tomando en cuenta las observaciones que se hagan durante la evolución de éste.** Para la sistematización de los datos obtenidos se utilizó como herramienta los rótulos propuestos en la metodología propuesta por Mason et al. (1982), dichos rótulos permitieron llevar a cabo el control y la autorregulación de mi proceso de pensamiento. Para efectos de la investigación dicho proceso de pensamiento fue considerado como uno de los datos.

3. **Creencias e intuiciones. Las ideas acerca de las matemáticas que se muestran en el trabajo matemático y la forma como éstas se relacionan o se identifican con la forma de resolver problemas.** Utilizando esta categoría se realizó el análisis de las situaciones en las que se pusieron en evidencia mis creencias acerca de las matemáticas y como éstas influyeron en el proceso de elaboración de significados de la definición de espacio topológico. Teniendo en cuenta la influencia que tuvo las creencias acerca de las matemáticas en mi proceso de elaboración de significados de la definición, dichas creencias también fueron consideradas como datos de la investigación.

De esta manera, se realizó una descripción de mi experiencia como resolutor de problemas de matemática avanzada, tomando como problema el estudio de la definición de espacio topológico y sistematizando el proceso de elaboración de significados de la misma. Así mismo, se realizó un ejercicio de metacognición de mi proceso como resolutor con el fin de plantear algunas consideraciones acerca de si la metodología utilizada se adapta al proceso de elaboración de significados de la definición y a la resolución de problemas asociados al pensamiento matemático avanzado o si fue necesario agregar, suprimir o modificar elementos a dicha metodología y de esta manera proponer una forma de problematizar el estudio de la definición de un concepto matemático enmarcado en el pensamiento matemático avanzado. Esto teniendo en cuenta el análisis realizado de los datos obtenidos.

Objetivos

El propósito de este trabajo fue utilizar la metodología propuesta en el libro de Mason, Burton & Stacey (1982) para la resolución de problemas de matemáticas y observar si tal metodología es adaptable al proceso de resolución de problemas asociados al pensamiento matemático avanzado y al proceso de elaboración de significados de la definición de espacio topológico.

De lo anterior se desprenden los siguientes objetivos:

Generales

1. Identificar qué elementos de la metodología propuesta por Mason et al. (1982) para la resolución de problemas de matemáticas aparecen durante la elaboración de significados de la definición de espacio topológico.
2. Proponer una manera de problematizar el estudio de la definición de un concepto matemático enmarcado en el pensamiento matemático avanzado.

Específicos

1. Realizar un ejercicio de metacognición de mi proceso de elaboración de significados de la definición de espacio topológico así como de la resolución de problemas asociados al pensamiento matemático avanzado, mediante la utilización de la metodología propuesta por Mason et al. (1982).
2. Sistematizar la información obtenida del ejercicio de metacognición utilizando los aspectos y los rótulos planteados en la metodología propuesta por Mason et al. (1982).

Capítulo III

Resultados

Un gran descubrimiento resuelve un gran problema,
pero hay una pizca de descubrimiento
en la solución de cualquier problema.
Tu problema puede ser modesto,
pero si es un reto a tu curiosidad
y trae a juego tus facultades inventivas,
y si lo resuelves por tus propios métodos,
puedes experimentar la tensión
y disfrutar del triunfo del descubrimiento.
George Polya

En este apartado aparece un análisis de los datos obtenidos en el ejercicio de metacognición que se realizó del proceso de elaboración de significados de la definición de espacio topológico. La transcripción de los datos se presenta de manera textual a la que aparecen en el cuaderno de trabajo y en las grabaciones, para indicar que un párrafo corresponde a una transcripción de datos será escrito en cursiva y sangrado. También se distinguirá entre los apartados que corresponden a mi proceso de pensamiento y los que corresponden a las acciones realizadas asociadas a dicho proceso de pensamiento, tal distinción se hará por medio de los siguientes símbolos:

⇒ Indica que lo escrito corresponde al ejercicio de metacognición, es decir, hace referencia a mi proceso de pensamiento llevado a cabo durante la elaboración de significados de la definición y a las reflexiones realizadas durante dicha elaboración.

» Indica que lo escrito, corresponde a una acción realizada asociada al proceso de pensamiento, como lo es el desarrollo de una idea, la solución de un ejercicio, la comprobación de una conjetura, etc. Esto es, por medio de la utilización de este símbolo se registra la actividad matemática propiamente dicha.

Inicialmente se parte de la definición de espacio topológico tomada del libro de Runde (2005) titulado "A Taste of Topology" (*VER ANEXO 1*. Pág. 68) en la que se plantea que:

> **Definición:** *Sea X un conjunto. Una topología en X es un subconjunto τ de $\mathfrak{B}(X)$ tal que:*
>
> *a)* $\emptyset, X \in \tau$
>
> *b) Si* $\mathcal{U} \subset \tau$ *es arbitrario, entonces* $\cup \{U : U \in \mathcal{U}\}$ *está en* τ
>
> *c) Si* $U_1, U_2 \in \tau$*, entonces* $U_1 \cap U_2 \in \tau$
>
> *Los conjuntos en τ son llamados abiertos. Un conjunto junto con una topología es llamado un espacio topológico.*
>
> *Generalmente escribimos (X, τ) para un espacio topológico X con topología τ; algunas veces, si la topología es evidente o irrelevante, podemos simplemente escribir X.*

Después de leer la definición, observé que de entrada es posible utilizar los rótulos que propone Mason, Burton & Stacey (1982) en la fase de abordaje de un problema, ya que para entender lo que plantea la definición es necesario estar familiarizado con la notación utilizada. De esta manera aparece el primer rótulo.

> ***Lo que sé:*** *inicialmente, es necesario estar familiarizado con la notación utilizada en el enunciado de la definición, en este caso, se debe tener claro qué quiere decir cada símbolo, por ejemplo, se debe conocer que el símbolo $\mathfrak{B}(X)$ denota el conjunto de todos los subconjuntos de X, es decir, $\mathfrak{B}(X)$ corresponde al conjunto llamado partes de X.*

Cabe resaltar que entre mis conocimientos previos se encuentran aspectos relacionados a los espacios métricos, como las propiedades de la unión, la intersección y la definición de conjunto abierto.

Haciendo explícito lo que sé puedo utilizar el segundo rótulo de la fase de abordaje y enunciar qué es lo que quiero.

Lo que quiero: *Elaborar significados y dotar de sentido a la definición de espacio topológico*

Ahora, para iniciar con la elaboración de significados de la definición recurro a herramientas heurísticas descritas en Puig (1996) & Polya (1945) como el cambio de registro, la ejemplificación, la particularización, la generalización y en general cualquier proceso de pensamiento que transforme la situación descrita en la definición. Estas herramientas heurísticas corresponden a lo que se puede usar para dotar de sentido a la definición y de esta manera aparece el tercer rótulo de la fase de abordaje.

Lo que puedo usar: *Cambio de registro*

- *Una topología en un conjunto X es un subconjunto τ del conjunto de partes de X tal que cumple 3 propiedades*
  a) *El conjunto vacío y el conjunto X pertenecen a la topología.*
  b) *Si un conjunto arbitrario $\mathcal{U}$ está contenido en la topología, entonces la unión de los subconjuntos U de $\mathcal{U}$ también pertenecen a la topología.*
  c) *Si dos subconjuntos U_1 y U_2 de $\mathcal{U}$ pertenecen a la topología, entonces la intersección de U_1 y U_2 también pertenecen a la topología, es decir, la intersección finita pertenece a la topología.*

Generalmente, en el estudio de un concepto de matemática avanzada, se recurre a interpretar las definiciones y los teoremas utilizando un lenguaje poco formal, esto es, se interpretan los enunciados por medio del lenguaje natural, lo que contribuye a que las ideas presentadas en el lenguaje matemático sean extraídas de tal forma que para el estudiante resulte más fácil retenerlas o recordarlas. Por estas razones es importante que se registren de manera escrita tales interpretaciones ya que se convierten en una herramienta a la hora de dotar de sentido a lo que se plantea en la definición o en el

teorema. Al escribir la definición utilizando nuestras propias palabras se avanza en la compresión de la misma.

Después de interpretar lo que se plantea en el enunciado, en la mayoría de los casos se procede a realizar ejemplificaciones de tales planteamientos; esto es los que Mason, Burton & Stacey (1982) y Polya (1945) llaman particularización de la situación. En este caso, lo que siguió fue recurrir a un ejemplo de un espacio topológico y mirar si por medio del análisis de este la definición adquiría algún significado.

Lo que puedo usar: *Ejemplicación (consideración de un caso)*

⇒ teniendo la definición escrita en mis propias palabras paso a considerar casos particulares que me permitan entender cada parte de la definición. En este momento utilizaré la herramienta heurística consideración de un caso. Trataré de escribir la definición tomando un conjunto particular, esto con el fin de explorar el significado de la definición.

» Sea X = $\{1,2,3,4,5\}$ *y sea*

$\mathfrak{B}(X) = \{\{\emptyset\},\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{5\},\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{1,5\},\{2,3\},\{2,4\},\{2,5\} \ldots.\}$

⇒ Teniendo el conjunto X y el conjunto $\mathfrak{B}(X)$ *procederé a definir el subconjunto* τ *de* $\mathfrak{B}(X)$ *y de esta manera definir la topología teniendo en cuenta las tres propiedades que debe cumplir.*

» *a)* $\emptyset, X \in \tau$

b) Sea $\mathcal{U} = \{\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{5\}\}$ $\mathcal{U} \in \tau$ *entonces*

$U_1 = \{\{1\},\{2\}\}$ $U_2 = \{\{1\},\{3\}\}$ $U_3 = \{\{1\},\{4\}\}$ $U_4 = \{\{1\},\{5\}\}$

$U_5 = \{\{2\},\{3\}\}$ $U_6 = \{\{2\},\{4\}\}$ $U_7 = \{\{2\},\{5\}\}$ $U_8 = \{\{3\},\{4\}\}$

$U_9 = \{\{3\},\{5\}\}$ $U_{10} = \{\{4\},\{5\}\}$

Los U_i *son las uniones de los subconjuntos de* $\mathcal{U}$

c) Si $U_1, U_2 \in \tau$ *entonces* $U_1 \cap U_2 \in \tau$*. Es decir que:*

$\{\emptyset\},\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{5\} \in \tau$

Ya que estos conjuntos corresponden a las intersecciones de los U_i

Teniendo en cuenta las 3 propiedades anteriores entonces

$$\tau = \{\emptyset, \{1,2,3,4,5\}, \{\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{5\}\}, \{\{1\},\{2\}\}, \{\{1\},\{3\}\}, \{\{1\},\{4\}\}$$
$$\{\{1\},\{5\}\}, \{\{2\},\{3\}\}, \{\{2\},\{4\}\}, \{\{2\},\{5\}\}, \{\{3\},\{4\}\}, \{\{3\},\{5\}\}, \{\{4\},\{5\}\}$$
$$\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{5\}\}$$

Teniendo al conjunto X y al conjunto τ *tenemos el espacio topológico* (X, τ)

Entonces, en el análisis del ejemplo construido a partir de la interpretación de la definición y teniendo en cuenta las propiedades que debe poseer el conjunto τ para que pueda ser llamado topología, surgen una serie de preguntas que tienen que ver con la comprensión de la definición en si misma; puesto que al desarrollar un caso particular de espacio topológico partiendo de las propiedades de la definición, lo que evidencia es un significado operatorio de la definición. Por medio del ejemplo, lo que se pone de manifiesto es la interpretación que se ha realizado de la definición. Registrar las preguntas que surgen en el análisis es de vital importancia en la elaboración de significados de la definición, ya que al intentar responderlas es necesario revisar el proceso que se ha llevado hasta el momento, lo que contribuye a la comprensión de los elementos presentes en la definición debido a que dichas preguntas están dirigidas específicamente a planteamientos de la definición que no son claros para el estudiante.

De esta manera, teniendo en cuenta las sugerencias hechas en Mason, Burton & Stacey (1982), es posible proponer un nuevo rótulo bajo el cual se registren las preguntas que se generen en el proceso de dotar de sentido a una definición como la de espacio topológico; este nuevo rótulo sería **PREGUNTAS**. En este caso las preguntas que me surgieron después de construir el ejemplo de espacio topológico fueron:

Preguntas

1. *En la última parte de la definición se plantea que los conjuntos en* τ *son llamados abiertos. ¿Por qué los conjuntos deben ser abiertos? ¿Qué pasa si son cerrados? ¿los conjuntos que yo tome son abiertos o cerrados? ¿será por definición?*
2. *Teniendo el espacio topológico* (X, τ) *¿Para qué sirve?*

Encontrar las respuestas a preguntas de este estilo valiéndose solo de la definición resulta muy difícil, una de las opciones es recurrir a los ejemplos que se presentan en el libro de texto, (*VER ANEXO 1*, pág. 69), inmediatamente después de enunciada la

definición y mirar si dichos ejemplos proporcionan elementos que permitan responder a alguna de las preguntas. De esta manera se observa que la utilización de herramientas heurísticas no es suficiente para elaborar significados de la definición, haciéndose necesario recurrir al libro buscando elementos que permitan avanzar en la comprensión del objeto de estudio. En este caso uno de los ejemplos analizados fue el siguiente tomado de Runde (2005):

> *Ejemplo 1: Sea (X, d) un espacio métrico, y sea* τ *la colección de todos los subconjuntos de X que son abiertos en el sentido de la siguiente definición.*
> *Definición: Sea (X, d) un espacio métrico. Un conjunto* $U \subset X$ *es llamado abierto si, para cada* $x \in U$*, existe* $\varepsilon > 0$ *tal que* $B_\varepsilon(x) \subset U$*.*

Al momento de estudiar el anterior ejemplo realicé el siguiente razonamiento

> *⇒ El ejemplo me lleva a pensar que para generar un espacio topológico el conjunto X debe ser continuo y no discreto como el caso que yo tomé. Pero no estoy seguro, aun no sé si los conjuntos que yo tome son abiertos o son cerrados. Hasta el momento creo que son cerrados.*

En este punto el ejemplo tomado no me aclaraba las dudas, por el contrario causaba confusión y si tenemos en cuenta los rótulos de Mason, Burton & Stacey (1982) podría considerarse como un **¡ATASCADO!**, pero este atascado no es de la misma naturaleza que el de la metodología de Mason, Burton & Stacey (1982), ya que no me impide seguir con el estudio de la definición, lo que causa es que al no tener claro una parte de la definición entonces no se encuentra sentido a la misma. En estos casos es aconsejable seguir con el estudio y mirar si más adelante se encuentra una situación que resuelva las dudas que causan el atasco. Una descripción del atasco se describe a continuación.

> ***¡ATASCADO!:*** *Veo que me encuentro atascado debido a que yo considero que los conjuntos de mi ejemplo son cerrados y en la definición de espacio topológico dice que deben ser abiertos […], entonces el atasco radica en la siguiente pregunta.*
> ***Pregunta:*** *¿Cómo un conjunto unitario va a ser abierto?*

Aquí entra a jugar un papel importante los conocimientos previos que el estudiante posee, en este caso, antes de estudiar espacios topológicos yo había estudiado espacios métricos y en ellos se planteaba una definición de conjunto abierto que entra en contradicción con la idea de conjunto abierto que se tiene en los espacios topológicos, dicha contradicción estaba centrada en el hecho de que la definición de conjunto abierto que se utiliza en los espacios métricos no es aplicable a los espacios topológicos, lo que se convertía en un obstáculo para la comprensión del concepto de conjunto abierto presente en los espacios topológicos. Entonces, el atasco radicaba precisamente en ésta contradicción y específicamente en lo siguiente.

> *⇒ […] además en un problema que yo resolví cuando cursé Validez y Modelos se pedía que se demostrara que todo subconjunto finito de un espacio métrico es cerrado. En este caso el conjunto* $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ *es un subconjunto finito de* $\mathbb{R}$*, es decir, X es cerrado.*

De esta manera se observa un ejemplo de lo que Schoenfeld llama creencias e intuiciones ya que al tener interiorizada la definición de conjunto abierto en un espacio métrico, yo creía que en todo momento dicha definición se debería cumplir y si no se cumplía era porque algo estaba haciendo mal. Esto lo confirma una conversación que tuve con un profesor de la Licenciatura y que se describe a continuación.

> ***John****: Profe estoy atascado, le comento pero no me vaya a decir nada porque la idea es que yo salga solo del atasco.*
> ***Profesor:*** *listo*
> ***John:*** *Profe, en la definición de espacio topológico dice que los subconjuntos de la topología son abiertos…*
> ***Profesor:*** *Si, por definición*
> ***John:*** *Profe, le dije que no me dijera, ese era mi atasco yo no entendía porque eran abiertos y no quería considerar la opción de que era por definición […]*

Al conocer que los conjuntos de la topología son llamados abiertos por definición, entro en un estado emocional que me generaba decepción hacia las matemáticas, ya que de un momento para otro se me cambió la idea que yo tenía sobre los conjuntos abiertos por otra que se debe aceptar por definición y que al parecer no tiene una razón fundamentada

desde el punto de vista de la definición de conjunto abierto trabajada en los espacios métricos. Esto pone de manifiesto la influencia que tienen las creencias e intuiciones que uno tenga acerca de las matemáticas al momento de iniciar el estudio de conceptos nuevos, afectando directamente la elaboración de significados de los mismos ya que al creer que si un conjunto abierto no podía ser representado gráficamente cumpliendo las propiedades de las Bolas abiertas, entonces dicho conjunto no podía ser considerado; esto puede ser categorizado como una creencia intuicionista de la matemática. Las creencias e intuiciones es una de las categorías propuestas por Santos (2007) para la metacognición.

A esta altura del proceso, me encontraba con una serie de aspectos importantes que se debía tener en cuenta para seguir con el estudio de la definición, por tal razón se hace necesario hacer una recopilación de estos aspectos y así tenerlos en cuenta. Una forma de realizar tal recopilación es crear un nuevo rótulo bajo el cual se realice la sistematización de las cosas relevantes que han surgido durante el proceso de elaboración de significados de la definición, este rótulo podría ser **RECOLECCIÓN** ya que lo que se realiza es eso, una recolección de los momentos más importantes durante el transcurso del estudio. La recolección que realice fue la siguiente.

Recolección

- *Preguntas sin responder: ¿Por qué los conjuntos de la topología deben ser abiertos? ¿Qué pasa si son cerrados?*
- *Acciones por realizar: Corregir el ejemplo de espacio topológico que yo tomé y estudiar los demás ejemplos tomados del libro.*

Este rótulo toma gran importancia teniendo en cuenta una de las categorías presentes en un ejercicio de metacognición, que tiene que ver con el control y la autorregulación del proceso de resolución o en este caso el de elaboración de significados de la definición. Al utilizar un rótulo como el anterior se realiza una sistematización del proceso llevado y por ende se está controlando y autorregulando, teniendo en cuenta las observaciones que se generan en el transcurso del estudio. Al sistematizar los momentos relevantes del proceso de elaboración de significados de la definición, se puede avanzar en la comprensión de ésta.

Es conveniente seguir el proceso partiendo de las *acciones por realizar* ya que en el desarrollo de dichas acciones se puede encontrar respuesta a las preguntas que están sin responder o en su defecto se pueden encontrar elementos que contribuyan a una respuesta posterior.

Volviendo al proceso de elaboración de significados, al corregir el ejemplo de espacio topológico (*VER ANEXO 1*, pág. 70) me encuentro con un nuevo atasco producido por la interpretación de la notación utilizada en el enunciado de la definición, específicamente en la propiedad número 2 (*Si* $\mathcal{U} \subset \tau$ *es arbitrario, entonces* $\cup \{U : U \in \mathcal{U}\}$ *está en* τ) ya que yo había tomado al símbolo $\mathcal{U}$ como un conjunto de la topología y resultó que lo que indicaba era una familia de conjuntos de la topología; esta interpretación produjo que al formar la topología tomara a $\mathcal{U} = X$ y las uniones que realice fueron entre los elementos de X y esto causo que el conjunto τ resultante no fuera una topología. Esta aclaración fue producto de una conversación con el profesor director del presente trabajo y se ratificó después al observar la sección de espacios métricos del libro que estaba utilizando. Esta situación se convirtió en un momento relevante del proceso de estudio de la definición y por tal razón es conveniente resaltarla por medio de uno de los rótulos planteados por Mason et al. (1982), tal rótulo es **AJA.**

> ***AJA:*** *Cuando yo tomé como referencia el ejemplo en el que se plantea que* $\tau = \{\emptyset, X\}$ *me surgió el interrogante ¿Dónde están las uniones arbitrarias de los subconjuntos de* $\mathcal{U}$*? Ya que yo estaba tomando a* $\mathcal{U} = X$ *, en esto radicaba mi error ya que teniendo en cuenta que* τ *es un subconjunto de* $\mathfrak{B}(X)$ *entonces en el caso en que* $\tau = \{\emptyset, X\}$ *el conjunto* $\mathcal{U}$ *debería ser* $\mathcal{U} = \{X\}$*, es decir, al conjunto cuyo único elemento es X y no es que el conjunto* $\mathcal{U}$ *deba ser igual a X.*

Además, cuando revisé el capitulo del libro referente a los espacios métricos, allí me encontré lo siguiente.

> ***AJA:*** *[…] resulta que yo estaba tomando como conjunto* $\mathcal{U}$ *a un solo conjunto de* τ *y según la notación del libro* $\mathcal{U}$ *escrita en cursiva es utilizada para denotar familias de conjuntos cuyos elementos son los conjuntos denotados por la* U *normal. […]*

Observando una situación como la anterior se pone de manifiesto las repercusiones que tiene determinada interpretación de la notación utilizada en un libro de matemática

avanzada, dichas repercusiones recaen principalmente en el significado que adquiere la definición o el teorema estudiado y en consecuencia en su compresión.

Por otro lado, en el proceso de estudio de una definición como la de espacio topológico, surgen preguntas que pueden ser consideradas como problemas ya que su respuesta no es inmediata y la pregunta en si misma es una situación en la que es necesario realizar un análisis e iniciar un proceso de resolución que apunte a encontrar una solución que satisfaga las condiciones de la pregunta. En este caso la pregunta surgió debido a los ejemplos de espacios topológicos planteados en el libro y es la siguiente.

Pregunta: *Teniendo cualquier conjunto X ¿Cuántas topologías se pueden generar?*

En la búsqueda de una respuesta a la pregunta anterior recurrí a la consulta de un libro diferente al que se ha venido utilizando y miré si en los ejemplos que en él se plantean se encuentran elementos que contribuyan a encontrar una respuesta. Tal libro tiene por título "*Topology"* de *James Munkres.* Pero antes de estudiar los ejemplos, es conveniente empezar por observar la definición de espacio topológico que propone y compararla con la que se ha venido estudiando, esto en aras de identificar nuevos aspectos que ayuden en la elaboración de significados de la misma; la definición de espacio topológico que se plantea en este libro es:

Definición: *Una topología en un conjunto X es una colección* $\Im$ *de subconjuntos de X que tiene las propiedades siguientes:*

1. $\emptyset$ *y* X *están en* $\Im$.
2. *La unión de los elementos de cualquier subcolección de* $\Im$ *está en* $\Im$.
3. *La intersección de los elementos de cualquier subcolección finita de* $\Im$ *está en* $\Im$.

Un espacio topológico es un par ordenado $(X,\Im)$ *que consiste de un conjunto X y una topología* $\Im$ *en X.*

Si X es un espacio topológico con topología $\Im$*, decimos que un subconjunto* U *de X es un conjunto abierto de X si* U *pertenece a la colección* $\Im$.

Usando esta terminología, podemos decir que un espacio topológico es un conjunto X junto con una colección de subconjuntos de X, llamados conjuntos abiertos, tal que $\emptyset$ *y* X *son abiertos, y tal que las uniones arbitrarias y las intersecciones finitas de conjuntos son abiertas.*

Lo primero que se observa en esta definición es que la notación utilizada es diferente a la que se usa en el libro de Runde (2005), en segundo lugar se puede ver que el lenguaje utilizado en el enunciado de esta definición es menos formal en términos de la utilización de lenguaje matemático, y es más descriptivo en términos de lo que es un espacio topológico, esto permite que el lector de la definición se haga una idea más concreta de un espacio topológico, siendo más fácil elaborar algún significado de lo planteado en el enunciado de la definición.

Ahora, pasando al análisis de los ejemplos me encuentro que son presentados por medio de una representación grafica (*VER ANEXO 1*. Pág. 71) permitiendo evidenciar las propiedades de la topología en dicha representación. De esta manera se pone de manifiesto la influencia que tiene tanto el lenguaje, como las representaciones utilizadas en los libros de matemática avanzada, en la comprensión y significado que se adquiere de la definición de un concepto como lo es el de espacio topológico, es decir, entre más abstracto sea la presentación de las definiciones y ejemplos de los conceptos matemáticos menos es el significado que se elabora de ellos.

Entonces, estudiando los ejemplos propuestos en el libro de *Munkres (2000)* observo que en un conjunto X se pueden generar muchas topologías pero no encuentro ningún planteamiento que me responda la pregunta: *Teniendo cualquier conjunto X ¿Cuántas topologías se pueden generar?* por tal razón elijo tomar el conjunto que se propone en el libro y explorar por mi cuenta cuántas topologías se pueden formar.

> ***»*** *Sea* $X = \{a, b, c\}$ *y sea*
>
> $\mathfrak{B}(X) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$
>
> *⇒ Para tratar de responder a la pregunta Teniendo cualquier conjunto X ¿Cuántas topologías se pueden generar? […] optaré por ordenar las topologías según el número de elementos* [(*VER ANEXO 1*, pág. 72)] *para esto usaré la herramienta heurística tabla. Creo que van a salir* 3^3.

Después de formar las posibles topologías que se pueden generar en un conjunto de 3 elementos realicé el siguiente razonamiento

⇒ Encontré que en un conjunto de 3 elementos se pueden generar 28 topologías, yo pensaba que se podían formar $3^3 = 27$ *topologías por aquello de permutar los elementos de X. teniendo en cuenta que se pasó solo por una podría pensar que hay alguna repetida pero ya revisé y parece que no. Se podría pensar que el desfase lo produce la topología trivial* $\tau = \{\emptyset, X\}$*, ya que ésta solo consta de 2 elementos y una permutación de un conjunto de 3 elementos no puede tener 2 elementos. Si esto es verdad entonces podría pensar que:*

Conjetura: *Sea X un conjunto de n elementos. El número de topologías que se pueden formar en X es igual a* $n^n + 1$ *topologías.*

Del anterior razonamiento surge un nuevo rótulo **CONJETURA**, en la metodología de Mason et al. (1982) esto es considerado como un proceso y no como un rótulo, pero para efectos del proceso seguido en la elaboración de significados de la definición de espacio topológico opté por utilizarlo como rótulo, ya que utilizándolo como tal es posible registrar los procesos de pensamiento que se producen en la exploración de un caso de una situación determinada y que apunta a responder una pregunta referida a dicha situación.

La comprobación de la anterior conjetura implicaba analizar más casos, es decir, debía tomar el siguiente conjunto (el de 4 elementos) y mirar cuántas topologías se podían generar, pero según mi conjetura se podría generar al menos $4^4 + 1 = 257$ topologías; esto implicaba que debía dedicar mucho tiempo a la formación de topologías dejando de lado el estudio de la definición, además considero que saber cuántas topologías se pueden generar en un conjunto de n elementos no constituye un aspecto relevante en la elaboración de significados de la definición de espacio topológico, por tal razón decidí dejar de lado la exploración de los demás casos y esperar si más adelante encontrara una situación que me acercara a la solución de este problema. Efectivamente, existe un artículo titulado *sobre el número de topologías en un conjunto finito* Rubiano (2006) en el que se hace una recopilación de los últimos resultados en la respuesta de la pregunta *¿Cuántas topologías se pueden construir sobre un conjunto finito X?* Al final de dicho artículo se afirma que hasta el momento no se ha encontrado una respuesta a tal pregunta, es decir, esta pregunta constituye un problema abierto.

Después de leer el artículo desistí totalmente de intentar responder a la pregunta planteada, debido a que es un problema abierto y consideré que iniciar un proceso para

encontrar alguna respuesta sería inútil. Aquí se evidencia otro ejemplo de lo que Schoenfeld categoriza como sistema de creencias, ya que al enterarme que la pregunta que estaba intentando responder es un problema abierto, entonces yo no podría encontrar una respuesta, tal creencia se convierte en un obstáculo al momento de intentar resolver un problema como éste.

Continuando con el análisis de la influencia que tienen las preguntas que aparecen en la elaboración de significados de la definición de un concepto de matemática avanzada, en este caso la de espacio topológico, tomo como referencia otra de las preguntas relevantes en mi proceso de comprensión de la definición, la cual tiene que ver directamente con el enunciado de la definición y es la siguiente

Pregunta: *¿Qué pasa si los conjuntos de la topología son cerrados?*

Para tratar de responder a esta pregunta decidí construir la definición de espacio topológico teniendo en cuenta las propiedades que deben cumplir los conjuntos cerrados, tal construcción fue la siguiente

» ***Definición:*** *Sea X un conjunto. Una topología en X es un subconjunto* τ *de* $\mathfrak{B}(X)$ *tal que.*

a) $\emptyset, X \in \tau$.

b) Si $\mathcal{F} \subset \tau$ *es arbitraria, entonces* $\cap \{F : F \in \mathcal{F}\}$ *está en* τ.

c) Si $F_1, F_2 \in \tau$, *entonces* $F_1 \cup F_2 \in \tau$.

Para mirar si la anterior definición se ajusta a un espacio topológico es necesario tomar un ejemplo y verificar si las propiedades se cumplen.

» $X = \{1, 2,3,4,5\}$

$\tau = \{\emptyset, \{1, 2,3,4,5\}, \{2,3,4\}, \{1,2,3\}, \{2,3\}, \{1, 2,3,4, \}\}$

⇒ *Al parecer nada en el espacio topológico cambia si los conjuntos son cerrados, lo que cambia es la forma de la definición, tocaría mirar más ejemplos.*

⇒ *Analizando el caso en el que* $\tau = \{\emptyset, X\}$ *bajo mi nueva definición, la topología sigue siendo la misma, entonces.*

Pregunta: *¿Cuál será la razón para que los conjuntos en τ sean llamados abiertos?*

La respuesta a la pregunta *¿Qué pasa si los conjuntos de la topología son cerrados?* Podría ser que la topología no se altera si los conjuntos son tomados como cerrados; pero de aquí surgió una nueva pregunta referida a la razón por la cual en la definición los conjuntos son llamados abiertos, dicha pregunta se respondió con un hallazgo hecho en el libro de Runde (2005) y tenía que ver con:

Hallazgo: *Mirando en el libro las definiciones siguientes a la de espacio topológico me encontré con lo siguiente.*

Definición: *Sea (X,τ) un espacio topológico. Un subconjunto F de X es llamado cerrado si $X \setminus F$ es abierto. Como para los espacios métricos tenemos lo siguiente.*

Proposición: *Sea (X,τ) un espacio topológico. Entonces:*

i. *$\emptyset$ y X son cerrados.*

ii. *Si $\mathcal{F}$ es una familia de subconjuntos cerrados de X, entonces $\cap\{F: F \in \mathcal{F}\}$ es cerrada.*

iii. *Si $F_1, F_2 \in \tau$, son subconjuntos cerrados de X, entonces $F_1 \cup F_2$ es cerrada.*

Claro, uno también puede definir una topología en un conjunto dado declarando ciertamente los conjuntos como cerrados, entonces verificando que estos conjuntos satisfacen las propiedades de la proposición anterior, y definiendo sus complementos como abiertos; está claro que esta aproximación es equivalente a la definición de espacio topológico.

⇒ Este hallazgo me respondió a las dos preguntas anteriores. Parece que no importa si los conjuntos de la topología son tomados como abiertos o cerrados, lo único es que si se toman como cerrados hay que definir a los complementos como abiertos.

Yo creo que en la definición los toman como abiertos para evitar definir lo de complemento y hacer la definición más corta.

AJA: *Teniendo en cuenta el hallazgo puedo pensar que en mi ejemplo los conjuntos son cerrados, ya que son finitos y entonces el complemento sería abierto*

y al formar la topología se cumplirían las propiedades referentes a los conjuntos cerrados y la definición de espacio topológico sería equivalente. Es decir que no importa si los conjuntos se toman como cerrados o abiertos, teniendo en cuenta que si se toman como cerrados el complemento debe ser abierto, la topología viene a ser la misma.

Lo anterior podría considerarse como un ejemplo de cómo un estudiante por medio de la sistematización de sus acciones y la posterior metacognición de las mismas, llega a recrear la experiencia que tiene un matemático profesional, es decir, a reflexionar sobre el proceso llevado en el estudio de la definición y al tratar de responder a una pregunta emergente en dicho proceso, se llegó a la construcción de una definición equivalente a la de espacio topológico y posteriormente se encuentra que en la literatura matemática también es considerada. Esto permite afirmar que cuando se realiza un estudio sistemático y reflexivo de algún aspecto de un concepto matemático, es posible recrear la experiencia de un matemático profesional y llegar a proponer afirmaciones que a continuación se pueden verificar.

En la anterior experiencia surgió un nuevo rótulo, **HALLAZGO**, que puede ser utilizado en ciertos momentos del proceso de estudio en los que, revisando la literatura matemática, se encuentren planteamientos que confirmen las afirmaciones que se han venido formulando. La utilización de este nuevo rótulo es importante al momento de realizar una comparación entre las ideas que uno tiene y las que están plasmadas en los libros de matemática avanzada, de esta manera se facilita el ejercicio de metacognición y contribuye a la elaboración de significados del concepto en cuestión. En este caso particular, me permitió dotar de sentido a una parte de la definición que correspondía a uno de los aspectos que menos significado tenía, como lo era la razón por la cual los conjuntos de la topología son llamados abiertos.

Ahora, a esta altura del proceso de elaboración de significados de la definición había respondido ciertas preguntas que se generaron, pero para poder avanzar era necesario evidenciar el punto en el que me encontraba, para esto utilicé lo que he llamado RECOLECCIÓN.

Recolección: *En este momento me encuentro estudiando la definición de espacio topológico presentada en el libro de Munkres […] seguiré en mi objetivo de dotar de*

significado a la definición y para esto voy a estudiar lo que se plantea en el libro de Kelley acerca de los espacios topológicos. […] En este libro se plantean cosas similares a los dos libros mencionados antes, pero me llamó la atención lo siguiente.

- *Los miembros de la topología $\mathfrak{I}$ son llamados abiertos relativos a $\mathfrak{I}$, o $\mathfrak{I}$-abiertos.*
- *La familia cuyos miembros solo son X y el conjunto vacío es una topología para X. Ésta es llamada la indiscreta (o trivial).*
- *La familia de todos los subconjuntos de X es llamada la topología discreta para X. Si $\mathfrak{I}$ es la topología discreta, entonces cada subconjunto del espacio es abierto.* [1]

Después de la RECOLECCIÓN fue necesario realizar una reflexión del estado en el que me encontraba, para esto utilicé el rótulo que propone Mason et al. (1982) que tiene por nombre **REFLEXIÓN**.

Reflexión: *En este momento he revisado tres textos diferentes en los que se define espacio topológico pero aún no le encuentro significado; sin embargo puedo generar espacios topológicos siguiendo las tres propiedades, pero sin entender para qué se forma o se genera un espacio topológico.*

⇒ En este punto he decidido buscar documentos en los que se trate la historia de la topología y si es posible leer el origen del concepto de espacio topológico. Esto para ver si remitiéndome a la historia podré encontrar el significado de la definición de espacio topológico.

Se observa que en un proceso de elaboración de significados de una definición como la de espacio topológico, no es suficiente con el estudio de una serie de libros en los que se traten los espacios topológicos ya que en dichos libros se presenta la definición en un lenguaje matemático formal, lo que impide que el lector identifique los aspectos que llevaron a que la definición en cuestión esté presentada de una forma o de otra, esto es, en los libros de matemática avanzada no reseñan las situaciones o necesidades que llevaron a la construcción de un concepto matemático en particular. En este punto cabe aclarar que en matemática avanzada existen conceptos que se han construidos a partir de

[1] Tomado de Kelley J. (1955), *General Topology.*

situaciones puramente matemáticas y que no tienen una conexión directa con alguna situación del mundo real. Entonces, teniendo en cuenta los anteriores planteamientos, se evidencia que al iniciar un proceso de elaboración de significados de la definición de algún concepto de matemática avanzada, no es conveniente limitarse al estudio de los libros de texto en los que se encuentra desarrollada solo la parte matemática del concepto; es aconsejable acudir a más herramientas que brinden elementos para dotar de sentido a la definición estudiada, tales herramientas pueden ser la búsqueda en la internet, conversaciones con compañeros, conversaciones con profesores, etc. Lo anterior entra en concordancia con lo que afirma Radford, "el pensamiento es considerado como una reflexión mediatizada del mundo de acuerdo con la forma o modo de la actividad de los individuos" (Radford, 2006).

Al recurrir a herramientas distintas a los libros de texto, es necesario especificar el lugar donde se realiza la consulta y los aspectos relevantes de la misma; entonces, para efectos del ejercicio de metacognición, es recomendable utilizar un nuevo rótulo que me sistematice la búsqueda en las diferentes fuentes de consulta, este nuevo rótulo podría ser **CONSULTA** y por medio de él se evidencia las características más significativas encontradas en la búsqueda. En mi proceso de dotar de sentido a la definición de espacio topológico, la consulta fue la siguiente, tomado de Wikipedia (2009).

> ***Consulta:*** *[…] el concepto fundamental de la Topología es la "relación de proximidad", que puede parecer ambigua y subjetiva. El gran logro de la Topología es dar una formulación precisa, objetiva y útil de este concepto. Para ello tomamos un conjunto de referencia X, que será el ambiente en el que nos moveremos, y al que llamaremos espacio. Tomaremos un elemento cualquiera x de X. A los elementos del espacio se les llama puntos, así que x será llamado punto, independientemente de que x sea una función, un vector, un conjunto, un ideal maximal en un anillo conmutativo y unitario... Un subconjunto V de X será un entorno de x si x es elemento de V y existe un conjunto abierto G de manera que G esté incluido en V. ¿Qué entenderemos por conjunto abierto? Aquí está el quid de la cuestión: una colección T de subconjuntos de X se dirá que es una topología sobre X si X es uno de los elementos de esa colección, si vacío es un elemento de la colección, si la unión de elementos de la colección da como resultado un elemento de la colección y si la intersección finita de elementos de la colección también es un elemento de la colección. A los elementos de la colección T se les*

denomina abiertos de la topología T, y al par (X,T) se le denomina espacio topológico.

Puede parecer extraño que de una definición tan altamente formal y conjuntista se obtenga una formulación precisa del concepto de proximidad. Lo primero que se observa es que sobre un mismo espacio X se pueden definir distintas topologías, generando entonces distintos espacios topológicos. Por otra parte, precisamente la manera en que quede determinada una topología sobre un conjunto (es decir, la elección del criterio que nos permita decidir si un conjunto dado es o no abierto) es lo que va a dar carácter "visualizable" o no a ese espacio topológico.

⇒ De lo anterior se pueden destacar dos cosas importantes

i. *Que en la definición de espacio topológico se encuentra la formulación precisa del concepto de proximidad.*
ii. *Que la elección del criterio que nos permita decidir si un conjunto dado es o no abierto es lo que va a dar el carácter visualizable o no al espacio topológico.*

También me llama la atención el carácter de punto que le imponen a los elementos del conjunto X ya que no importa el conjunto que se tome, para efectos de la topología sus elementos serán llamados puntos.

Teniendo en cuenta la anterior consulta, se evidencia que recurrir a fuentes de consulta diferentes a los libros de texto de matemática avanzada contribuye a la elaboración de significados de una definición como la de espacio topológico, ya que en dichas fuentes se puede encontrar una descripción detallada de los planteamientos de la definición y no se limitan a la mera presentación formal de la misma. De esta manera, se puede afirmar que en el proceso de elaboración de significados de una definición de un concepto asociado al pensamiento matemático avanzado, no es suficiente con el estudio de la presentación formal de la definición, si no que es necesario acudir a fuentes de información, culturalmente aceptadas, en las que se evidencie los aspectos más importantes presentes en la definición y en las que se especifique la o las situaciones que se pretende capturar en el enunciado de la definición formal. En este caso, para mi proceso de elaboración de significados de la definición de espacio topológico, fue de vital importancia la consulta realizada debido a la descripción que se realiza de los conceptos presentes en la

definición como lo es el de proximidad, concepto que en el enunciado formal de la definición no se menciona y que para efectos de la comprensión es muy significativo en términos de dotar de sentido a los planteamientos de la definición y su posterior uso en situaciones enmarcadas en la Topología.

Lo anterior se reafirma tomando en cuenta lo siguiente: tomado de [UAM] (2009).

> ***Consulta:*** *El desarrollo de la teoría ha extendido el concepto de continuidad más allá de les espacios métricos creando los espacios topológicos.*

El anterior fragmento me contribuyó a entender lo que se pretende capturar con la formulación de la definición de espacio topológico, y teniendo en cuenta que se pretende realizar una formulación precisa del concepto de proximidad; puedo afirmar que a esta altura del proceso ya había realizado una elaboración de significados de la definición, es decir, después de la consulta realizada, la definición de espacio topológico ganó un significado que me hacía sentir que había adquirido una compresión de lo que es y para qué se usa un espacio topológico. Esto se puede evidenciar en la siguiente transcripción de la *grabación 1* en la que realizo una reflexión del estado de mi proceso de elaboración de significados de la definición de espacio topológico. (Ver también la transcripción de la grabación 2 en el *ANEXO 2)*.

> **Grabación 1.**
> *Estoy en el proceso de darle sentido a la definición de espacio topológico y en este proceso he ido a buscar a la historia para ver si desde aquí intento encontrar la parte inicial en la que se creó el concepto. En este proceso, en esta búsqueda he encontrado que la definición de espacio topológico intenta dar una formulación precisa del concepto de proximidad, esto me lleva a pensar que en los espacios topológicos lo que se hace es trabajar las distancias entre los conjuntos, ya que como no se define una métrica clara no se puede hablar de distancia como tal, pero tengo la pregunta o la duda de si la proximidad es entre los elementos de la topología o los elementos del conjunto, o entre los elementos de la topología y los elementos del conjunto. No he podido encontrar una representación concreta del espacio topológico ya que en un contexto continuo me queda difícil representar el conjunto de partes de X del conjunto X y por esta razón no he podido hacer un representación gráfica de un espacio topológico, pero, sin embargo, en estos*

momentos me encuentro en la capacidad de trabajar con topologías, es decir , dado un conjunto X puedo formar una topología, claro que lo he hecho sólo con conjuntos finitos, y según lo que he leído a los conjuntos finitos no les prestan mucha atención, ya que también encontré que en la topología se trabaja fundamentalmente con el concepto de continuidad lo que implica que los conjuntos importantes o más bien interesantes son los conjuntos continuos, pero aquí tengo otro problema que en los conjuntos continuos sólo puedo formar topologías finitas pero no se si se pueden formar o existen topologías infinitas, y pues en estos momentos no se a ciencia cierta para qué es que sirve y para qué se forma un espacio topológico, en qué se usa. Otra cosa que he podido identificar es que leyendo sólo la definición y trabajando en ella no es posible comprender el concepto de espacio topológico ya que si pienso en trabajar un problema de los que se plantean en los libros que estoy trabajando, que es el de Munkres y el de Kelley, me he encontrado que es necesario leer las definiciones y los teoremas siguientes, y entenderlos claro, para poder resolver dichos ejercicios, lo que quiere decir que la definición de espacio topológico es el inicio de una serie de conceptos importantes en el estudio de los espacios topológicos.

Ahora, habiendo elaborado un significado de la definición, el proceso a seguir fue analizar los ejemplos que se habían venido estudiando bajo la luz de dicho significado y partiendo del siguiente fragmento.

***Hallazgo:** […] tomamos un conjunto de referencia X, que será el ambiente en el que nos moveremos y al que llamaremos espacio. Tomaremos un elemento cualquiera x de X. A los elementos del espacio se les llama puntos […] Un subconjunto V de X será un entorno de x si x es elemento de V y existe un conjunto abierto G de manera que G esté incluido en V. ¿Qué se entiende por conjunto abierto? […].*

Analizar los ejemplos ya analizados, después de avanzar en la comprensión de la definición, es aconsejable en el sentido de identificar aspectos que antes no habían sido identificados debido a la ausencia de dicha comprensión. (*VER ANEXO 1*. Pág. 73) Este análisis está recopilado en la grabación 3.

Grabación 3

En estos momentos estoy tratando de analizar los espacios topológicos en un contexto discreto partiendo del siguiente fragmento:

Tomamos un conjunto de referencia X, que será el ambiente en el que nos moveremos y al que llamaremos espacio. Tomaremos un elemento cualquiera x de X. A los elementos del espacio se les llama puntos […] Un subconjunto V de X será un entorno de x si x es elemento de V y existe un conjunto abierto G de manera que G esté incluido en V. ¿Qué se entiende por conjunto abierto?[2]

Analizando el espacio topológico y las topologías tomando a X como el conjunto formado por a, b y c o sea de tres elementos y empezando por la topología trivial, es decir por la topología formada por vacío y X. entonces tengo que el conjunto abierto G debe ser igual a X porque según la topología tomada no tenemos ningún otro conjunto y esto corresponde que X debe ser entorno de a siendo a igual al elemento x al punto x del conjunto, pero anteriormente había encontrado que si tomamos los conjuntos de la topología como cerrado pues la topología no se altera, entonces parece que no importa si los conjuntos son abiertos o son cerrados si no que los llaman abiertos por definición, pero analizando en este punto en un conjunto discreto si tomamos los conjuntos como cerrados entonces los complementos deben ser abiertos, por definición de conjuntos cerrado, y si el complemento es abierto si tomamos el conjunto X como cerrado el complemento pues es el mismo X pues porque tenemos como espacio de referencia al conjunto X, entonces si X es cerrado el complemento que es X debe ser abierto, es decir que X es abierto, y pues si tomamos ahora como subconjunto de X al conjunto que tiene como único elemento $\{a\}$ entonces el complemento de $\{a\}$ debe ser los otros dos que son b y c, entonces si $\{a\}$ es cerrado entonces los conjuntos $\{b\}$ y $\{c\}$ deben ser abiertos, pero en un conjunto discreto cómo van a ser abiertos, pero tomándolo por definición pues correspondería a que si son abiertos, y pues viceversa si tomamos otro conjunto que tenga como único elemento c entonces el complemento debe ser abierto, si lo tomamos como cerrado, entonces quiere decir que los conjuntos que tiene como único elemento $\{a\}$ y $\{b\}$ debe ser abierto entonces en este sentido pues corresponde, por definición de cerrado, pues que los dos conjuntos sean abiertos y pues no habría ningún problema si los llamamos abiertos a los conjuntos de la topología.

[2] Tomado de Wikipedia (2009)

Para efectos del proceso de elaboración de significados de la definición y del ejercicio de metacognición, es importante registrar de manera escrita las reflexiones que se realicen después de realizada una consulta o después de comprender algún aspecto del tema estudiado. En este caso dicha reflexión fue.

> ***Reflexión:*** *[…] si el conjunto* $\{a\}$ *es cerrado entonces* $a^c = \{b, c\}$ *es abierto (por definición de conjunto cerrado); y en este sentido un conjunto discreto puede ser tomado como un conjunto abierto.*

La importancia de registrar las reflexiones hechas durante el proceso radica en que por medio de ellas se puede llegar a comprender mejor los conceptos presentes en la definición; es decir, se puede llegar a un AJA, pero este AJA no es tomado en el mismo sentido de la metodología de Mason et al. (1982) si no que corresponde a una situación que genera una comprensión de algún aspecto que antes no se tenía, esto es, se encontró significado a algún elemento de la definición. El AJA producido fue el siguiente.

> ***AJA:*** *Entonces veo que la definición de la topología en cualquier conjunto* X *me permite hablar del concepto de proximidad entre los elementos del conjunto X por medio del entorno de un punto* x *de* X *ya que, al no tener métrica definida la única manera de hablar de proximidad entre los puntos de* X*, con la condición de que la uniones arbitrarias y las intersecciones finitas estén contenidas en la topología generada, es decir, la topología es la que me determina la proximidad entre los elementos de* X*.*
>
> *Entonces, teniendo un conjunto* X *cualquiera, las topologías que se pueden formar me definen la proximidad entre los puntos de* X*, de la misma manera en la que en un espacio métrico las diferentes métricas que se pueden definir me determinan la distancia entre cada par de puntos del espacio.*
>
> *Esto es, teniendo cualquier conjunto* X *o espacio, puedo hablar de proximidad mediante métricas (espacios métricos) o mediante topologías (espacios topológicos); si no que al definir una topología puedo hablar de proximidad entre los elementos o puntos de un conjunto de cualquier naturaleza, sea discreto o continuo.*
>
> *En síntesis, en un espacio topológico la idea de proximidad es más general y abstracta, lo que permite ampliar el concepto de proximidad a cualquier contexto.*

En la grabación 4 se puede apreciar una reflexión del análisis de los ejemplos después de la elaboración de significados de la definición de espacio topológico en correspondencia con el concepto de proximidad.

Grabación 4.

Analizando los ejemplos de las topologías formadas con un conjunto de tres elementos, creo saber el significado, más bien uno de los significados de la definición de espacio topológico, ya que teniendo en cuenta que es para formular un concepto preciso de proximidad y que sea aplicable a cualquier conjunto tanto discreto como continuo y teniendo en cuenta que no hay una métrica definida, entonces es necesario definir los entornos de cada punto del conjunto a través de subconjuntos del mismo conjunto, por esta razón creo que la topología se forma es con los subconjuntos de X y pues a través de esos subconjuntos podemos hablar de los entornos de un punto determinado en el conjunto X que se tome, entonces esto puede ser considerado como un AJA porque pues siento que estoy viendo o pude identificar la necesidad de definir el espacio topológico como esta definido, y pues, ya como dije antes es para poder establecer proximidad entre los elementos de cualquier conjunto ya sea puntos, letras, números, funciones y en general cualquier conjunto y teniendo en cuenta que no tenemos una métrica definida, es decir, no podemos establecer una distancia por medio de una fórmula o por medio de una función más bien, entonces en este sentido creo que uno de los objetivos de definir el espacio topológico de la manera en la que está definido es esa, poder hablar de proximidad entre los elementos de cualquier conjunto, ya sea discreto o continuo, y por lo que he visto en un conjunto continuo no hay mucho problema de definir los entornos a un punto determinado, pero en un conjunto discreto sí hay un problema, debido a que por ser discreto pues la definición de conjunto abierto, la que se presenta en los espacios métricos, no es posible definirla por la misma razón que no hay una métrica establecida, entonces pues la única forma de poder habla de un entorno a un punto de un conjunto discreto pues a través de los subconjuntos del conjunto X o del complemento del conjunto formado por el punto que nosotros tomemos, teniendo en cuenta que el espacio de referencia es el conjunto X, por eso hablamos que el complemento de cada subconjunto de X pues el resto de subconjuntos que forman a X o de partes de X, entonces generando los conjuntos abiertos y definiendo un subconjunto V de X que sea un entorno de x si

x es un elemento de V y si existe un conjunto abierto G de manera que G esté incluido en V, entonces podemos hablar de la proximidad de un elemento a otro, teniendo en cuenta sólo los conjuntos abiertos de la topología.

Ahora, después de observar si el significado que había desarrollado de la definición de espacio topológico lo podía utilizar como herramienta para el análisis de una serie de ejemplos de espacios topológicos presentes en los libros de texto, intenté escribir dicho significado de una manera simbólica, es decir, escribir el significado de la definición de manera formal y mirar si aplicando el significado, ya elaborado de la definición, podía generar una definición equivalente o un teorema asociado a la definición.

» *Sea $X = \{a, b, c\}$ y sea $\tau = \{\emptyset,\ \{a, b, c\},\ \{a, b\}, \{a\}\ \}$*
Sea $x = b$ y definamos $V = \{a, b\}$ como el entorno de x ya que $V \subseteq X$ y existe $G = \{a\} \subseteq V$ con G abierto debido a que $G \in \tau$.
Entonces, b está más próximo de a, puesto que $a \in V$, es decir, el punto a está incluido en el entorno de b.
Por el contrario, en esta topología el punto c no está incluido en el entorno de b, por lo tanto está más "lejos" de b que de a.

La reflexión sobre el planteamiento anterior se puede apreciar en la grabación 5.

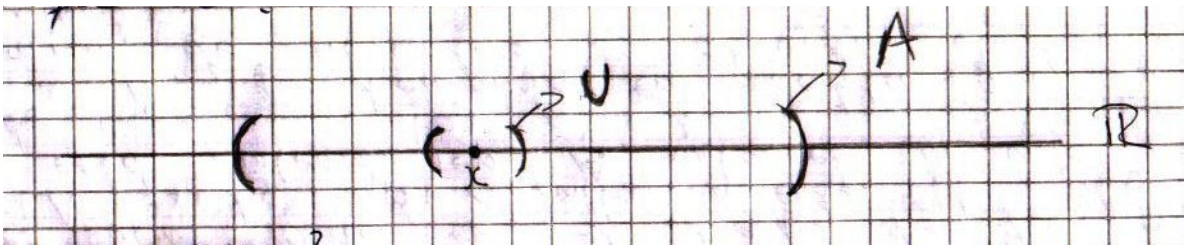
Grabación 5
Entonces como se puede hablar de proximidad en un conjunto discreto, en este caso en un conjunto de tres elementos por medio de una topología, entonces para explicar esto voy a tomar como ejemplo al conjunto X formado por los elementos a, b y c, y a la topología formada por vacío, X, el conjunto $\{a, b\}$ y al conjunto cuyo único elemento es $\{a\}$, entonces se dice que el punto a es más próximo al punto b si en el entorno de b existe un conjunto G abierto que contiene al punto a y que no contiene al punto c, ya que este conjunto G debe estar incluido en el entono del punto b entonces, según la topología escogida el punto c no está incluido en el entorno del punto b, por esta razón se puede decir que el punto a es más próximo al punto b, teniendo como base, tomando como referencia el conjunto G abierto que contiene al punto a y que está en el entorno de b.

Después de sentir que ya había dotado de sentido a la definición de espacio topológico, era el momento de enfrentarme a los problemas propuestos en el libro, pero para tal fin fue necesario estudiar las definiciones y teoremas siguientes a la definición de espacio topológico, que tenían que ver con los conceptos de base y de subbase de una topología y aspectos relacionados a la topología usual, ya que los problemas o ejercicios propuestos en los libros requerían tener un conocimiento de dichas definiciones y teoremas (Tal estudio se puede apreciar en el *ANEXO 1*. Pág. 74-76).

Al finalizar el estudio de las definiciones y teoremas complementarios a la definición de espacio topológico, paso a la resolución del primer problema planteado en el libro de Munkres (2000); el proceso de resolución de este problema tuvo en cuenta a la metodología de Mason et al.(1982).

» *Sea X un espacio topológico; sea A un subconjunto de X. Suponga que para cada $x \in A$ existe un conjunto abierto U conteniendo a x tal que $U \subset A$. Muestre que A es abierto en X.*[3]

¿Qué es lo que sé?



¿Qué es lo que quiero?: *Mostrar que A es abierto en X.*

¿Qué puedo usar?: *Lo que puedo usar es el hecho de que para cada $x \in A$ existe un conjunto abierto U conteniendo a x y U está contenido en A, entonces la unión de cada uno de estos conjuntos abiertos que contienen a x sería igual a A y teniendo en cuenta que la unión arbitraria de abiertos es abierta, entonces A es abierto.*

[3] Tomado de Munkres (2000).

Aquí se pone de manifiesto que cuando se realiza el análisis de lo que se puede usar, inmediatamente queda solucionado el problema, que en realidad no sería un problema porque al aplicar los conocimientos adquiridos en la elaboración de significados de la definición, la solución es inmediata. Dicha solución es presentada, utilizando lenguaje matemático, a continuación.

» *Sea X un espacio topológico y sea A un subconjunto de X. Definamos para cada* $x \in A$ *un conjunto abierto* U *tal que* $x \in U \subset A$*; por consiguiente*

$$x \in U_i \subset A \text{ Para todo } x \in A \text{ y con } i \in \mathbb{N}$$

Entonces

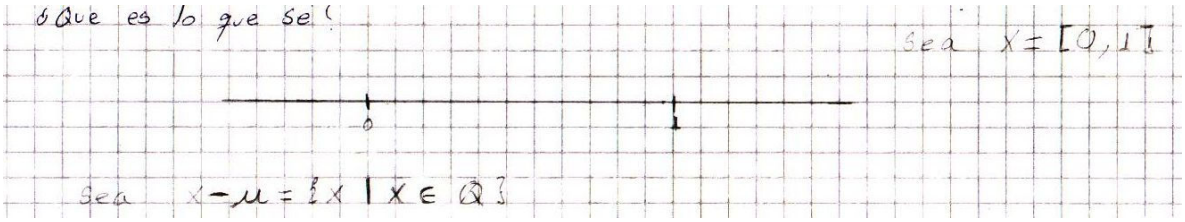
$$\cup_{i=1}^{n} U_i = A$$

Y como los U_i *son abiertos entonces su unión es abierta, lo que implica que* A *es abierto en* X*.*

Teniendo en cuenta que el primer ejercicio tomado no me resultó un problema decido tomar otro y mirar si su resolución me contribuye a ampliar el significado de la definición de espacio topológico, además si en el proceso de resolución se ajusta la metodología de Mason et al (1982). Dicho ejercicio fue:

» *Sea X un conjunto; y sea* $\Im_c$ *la colección de todos los subconjuntos* $\mathcal{U}$ *de* X *tal que* $X - \mathcal{U}$ *es contable o es todo* X*. Mostrar que* $\Im_c$ *es una topología en X.*[4]

¿Qué es lo que sé?



¿Qué es lo que quiero?: *Mostrar que* $\Im_c$ *es una topología en* X*.*

¿Qué puedo usar?: *Si en el intervalo [0,1] quitamos todos los números irracionales lo que nos queda es el conjunto de todos los números racionales entre*

[4] Tomado de Munkres (2000).

0 y 1 y este conjunto es contable. Es decir que $\mathcal{U}$ es la colección de todos los subconjuntos de X al que pertenecen sólo números irracionales; esto es

$$\mathcal{U} = \{x: x \in X, x\ es\ irracional\}$$

Ahora, $x \in \Im_c$ ya que $X - X$ es contable

$\emptyset \in \Im_c$ Ya que $X - \emptyset$ es todo X.

Entonces, si $\{\mathcal{U}_\alpha\}$ es una colección indexada de elementos de $\Im_c$ entonces $\cup\, \mathcal{U}_\alpha$ debe estar en $\Im_c$, entonces $X - \cup\, \mathcal{U}_\alpha$ es contable; lo que implica que $\cap\, (X - \mathcal{U}_\alpha)$ es contable, por consiguiente $\cup\, \mathcal{U}_\alpha \in \Im_c$.

Intuitivamente, si $X = \mathbb{R}$ entonces al tomar a $\Im_c$ como la colección de todos los subconjuntos de $\mathcal{U}$ de X tal que los elementos de $\mathcal{U}$ sean números irracionales entonces se tiene que la unión de los subconjuntos $\mathcal{U}$ también posee como elementos a números irracionales, es decir, está en $\Im_c$ y lo mismo para con la intersección finita.

⇒ Escrito de manera formal y general la demostración quedaría:

» i. *$X \in \Im_c$ Ya que $X - X$ es contable*

$\emptyset \in \Im_c$ Ya que $X - \emptyset$ es todo X

ii. *Si $\{\mathcal{U}_\alpha\}$ es una colección indexada de elementos de $\Im_c$ entonces $\cup\, \mathcal{U}_\alpha \in \Im_c$ puesto que $X - \cup\, \mathcal{U}_\alpha = \cap\, (x - \mathcal{U}_\alpha)$ que es contable*

iii. *Si $\mathcal{U}_1, \dots, \mathcal{U}_i$ son subconjuntos de $\Im_c$ entonces $\cap\, \mathcal{U}_\alpha \in \Im_c$, puesto que $X - \cap_{i=1}^{n}\, \mathcal{U}_i = U_{i=1}^{n}(X - \mathcal{U}_i)$ Que es contable. Entonces, $\Im_c$ es una topología en X.*

⇒ La demostración anterior estuvo influenciada por lo visto en la topología de complemento finito, ya que dicha demostración es análoga a la presentada en el apartado donde se define la topología de complemento finito.

Después de haber realizado dos ejercicios del libro de Munkres (2000) y encontrar que no me resultaron problemas y por ende la metodología de Mason et al. (1982) sólo es ajustable en la fase de ataque, realicé la siguiente reflexión acerca del proceso llevado hasta el momento.

Reflexión: *Hasta el momento los dos problemas trabajados no me han aportado mayor cosa a mi comprensión o al sentido de la definición de espacio topológico que tengo actualmente.*

Viendo los demás ejercicios que se presentan en el libro de Munkres observo que estos son planteados con referencia a las topologías y a realizar demostraciones referidas a las mismas, pero no veo ninguno que se refiera a la formación de espacio topológicos particulares. Por tal razón dichos ejercicios no es que aporten mucho a mi proceso de elaboración de significados de la definición de espacio topológico.

Como los dos ejercicios realizados no me aportaron elementos para ampliar o consolidar el significado que poseía de la definición, decidí realizar el análisis de una de las topologías más relevantes en los números reales, tal topología llamada la usual (Ver *ANEXO 1*. Pág. 77). De la reflexión de tal análisis el significado que poseía de la definición se puso en evidencia y entraba en concordancia con lo que se planteaba en la construcción de la topología usual, esto podía ser considerado un AJA ya que me confirmó lo que yo estaba pensando acerca del significado de la definición.

Reflexión: *Creo que en este caso la topología usual me determina la proximidad entre los elementos de* $\mathbb{R}$ *por medio de conjuntos abiertos y sus uniones.*

AJA: *Un punto* x *cualquiera de* $\mathbb{R}$ *pertenece a infinitos intervalos abiertos, esto es, existen infinitos entornos de* x *lo que me determina la proximidad entre los puntos de* $\mathbb{R}$ *capturando la idea de continuidad, ya que dado un intervalo* (a,b) *que contiene a* x *siempre es posible encontrar un intervalo* $(a',b') \subset (a,b)$ *y que contiene a* x*, de esta manera sin definir una métrica puedo definir continuidad y hablar de proximidad entre los puntos pertenecientes a* $\mathbb{R}$ *de la siguiente manera:*

» *Sea* x_1, x_2 *y* x_3 *puntos en* $\mathbb{R}$. x_1 *Es más próximo a* x_2 *que a* x_3 *si existe un intervalo* (a,b) *tal que* $x_1, x_2 \in (a,b)$ *pero* $x_3 \notin (a,b)$.

Lo anterior corresponde a un intento de escribir formalmente el significado que había elaborado de la definición de espacio topológico, partiendo del comportamiento de los conjuntos observado en la topología usual. Entonces, teniendo una idea más clara de lo

que se plantea en la definición de espacio topológico, paso a enfrentarme a un nuevo ejercicio y mirar si en su resolución aparecen nuevos elementos que contribuyan a mejorar la compresión de la definición. El nuevo ejercicio fue el siguiente (Ver la solución del ejercicio en el *ANEXO 1.* Pág. 78-79 y en el *ANEXO 3*):

> **»** *Si* $\{\Im_\alpha\}$ *es una colección de topologías en X. Muestre que* $\cap \Im_\alpha$ *es una topología en X. ¿Es* $\cup \Im_\alpha$ *una topología en X?*

La solución del anterior ejercicio tampoco resultó un problema y por ende la metodología de Mason et al. (1982) no pudo ser utilizada, esto implica que el significado elaborado de la definición no se alteró. Partiendo de estos hechos y teniendo en cuenta que los ejercicios subsiguientes del libro de texto son muy similares, me parece que los ejercicios que se plantean en los libros de texto de matemática avanzada son poco útiles al momento de elaborar significados de una definición como la espacio topológico, ya que para solucionar estos ejercicios es suficiente con conocer y manejar las propiedades que aparecen en la definición y en los teoremas asociados a la misma. Entonces, como los ejercicios no son una herramienta para la compresión de la definición, desde el punto de vista de dotarla de sentido, lo que queda es buscar en la literatura matemática otras definiciones o ejemplos en los que se pueda utilizar el significado construido; en este caso, una de las definiciones encontradas en las que se evidencia el significado de la definición de espacio topológico es la de espacio topológico de Hausdorff, en esta definición se plantea que:

> ***Consulta:*** *Un espacio topológico* (X,τ) *es llamado Hausdorff si, para cualquier* $x,y \in X$ *con* $x \neq y$*, existen conjuntos* $U,V \in \tau$ *con* $x \in U,\ y \in V$ *y* $U \cap V = \emptyset$*.*
> *Informalmente, ésta definición es frecuentemente expresada como "En un espacio de Hausdorff, los puntos pueden ser separados por conjuntos abiertos"*[5]
>
> *⇒ Observando el planteamiento de la anterior definición se pone de manifiesto que lo que yo pensaba acerca de la proximidad entre los puntos de un conjunto es acertado, es decir, lo que hace una topología es permitir hablar sobre si un par de puntos en un conjunto están próximos o no.*

[5] Tomada de Runde (2005)

Lo que se puede inferir en este punto del proceso de elaboración de significados de la definición de espacio topológico, es que esta definición va acompañada de una serie de conceptos y definiciones subsiguientes que amplían las características de los espacios topológicos, esto implica que en el momento en que se desee enfrentarse a un problema asociado a los espacios topológicos, es necesario conocer las definiciones, los teoremas y las proposiciones que se desprenden de la definición. Además, en un proceso como el aquí descrito, es poco probable encontrar en un libro de texto un problema que amplíe el significado de la definición, ya que si uno es capaz de encontrar un problema de este tipo significaría que ya se tiene elaborado un amplio significado de la definición y esto permitiría identificar un problema adecuado para que el resolutor del mismo elabore significados de la definición.

En este sentido, los ejercicios con los que uno se encuentra en el libro de texto corresponden a ejercicios de aplicación de propiedades de los conceptos definidos, esto es, si uno se sabe las propiedades de memoria muy seguramente podrá encontrar una solución a estos ejercicios sin necesidad de tener una comprensión de los planteamientos de las definiciones y de los teoremas; lo anterior permite afirmar que la definición de espacio topológico se convierte en una herramienta para comprobar si algo es topología o no, esto es, proporciona un significado de espacio topológico que es meramente operatorio pero en si misma, la definición presentada de manera formal no provee un sentido concreto acerca de los espacios topológicos. Para lograr adquirir tal sentido es necesario iniciar un proceso de análisis y búsqueda de elementos que permitan la elaboración de significados de una definición como la de espacio topológico.

Teniendo en cuenta lo anterior y para efectos del presente trabajo, decidí detener el proceso en este punto, esto no quiere decir que después del proceso aquí descrito obtuve una comprensión amplia de lo que es un espacio topológico y en qué situaciones se aplica, pero sí logré elaborar un significado de la definición que me permite poder seguir con el estudio de los posteriores conceptos inmersos en los espacios topológicos, con una ganancia enorme en el uso de las propiedades de los conceptos asociados a la definición de espacio topológico. De esta manera, teniendo los datos y el análisis de ellos procederé a plantear la discusión de los resultados obtenidos en la descripción de mi proceso de elaboración de significados de la definición de espacio topológico, para tal fin tendré en cuenta la pregunta de investigación que orienta este trabajo y los objetivos planteados en el mismo.

Capítulo IV

Discusión

Cuando a un matemático
se le acaban las ideas formula axiomas
Felix Klein

En este apartado se presenta la discusión de los resultados obtenidos después de realizado el ejercicio de metacognición, para ello se tendrá en cuenta el análisis de los datos realizado en el apartado anterior. Inicialmente, procederé a responder la pregunta de investigación formulada para el presente trabajo y que orientó el desarrollo del mismo; dicha pregunta fue: *¿Qué elementos de la metodología propuesta por Mason et al. para la resolución de problemas de matemáticas aparecen durante la elaboración de significados de la definición de espacio topológico?.*

Para formular una respuesta es necesario tomar como referencia los datos obtenidos y el análisis de éstos. En este sentido, observando el proceso de elaboración de significados de la definición de espacio topológico, se evidencia que en dicho proceso es posible aplicar la propuesta hecha por Mason et al. (1982) ya que, como se pudo ver, es posible sistematizar el desarrollo del proceso de elaboración de significados de la definición por medio de la metodología de Mason et al. (1982) esto es, en un proceso como el descrito en este trabajo, aparecen elementos de la metodología que tienen que ver principalmente con los rótulos propuestos por Mason et al. (1982) en cada una de las fases del proceso

de resolución de problemas. Los rótulos que estuvieron presentes en el proceso de elaboración de significados de la definición fueron:

Fase de abordaje.

Rótulos

- ¿Qué es lo que sé?
- ¿Qué es lo que quiero?
- ¿Qué puedo usar?

Fase de ataque.

Rótulos

- ATASCADO
- AJA

Fase de revisión:

Rótulos

- Reflexionar

Se puede observar que en la fase de abordaje se utilizó la totalidad de los rótulos propuestos en la metodología, por el contrario, en la fase de ataque y en la de revisión no estuvieron presentes todos los rótulos que propone Mason et al. (1982) Esto se debe a que el proceso de elaboración de significados de una definición como la de espacio topológico, es un proceso en el que se sistematiza el estudio de una serie de aspectos relacionados principalmente a los planteamientos de la definición, es decir, no se busca llegar a una respuesta concreta de un problema concreto. Lo que se busca es realizar una sistematización del proceso de estudio de la definición teniendo como objetivo el dotar de sentido a ésta, tal sistematización es necesaria para realizar el ejercicio de metacognición sobre el proceso llevado; lo que finalmente contribuye a la elaboración de significados de la definición en correspondencia con los conceptos presentes en la misma.

De esta manera, las fases de resolución, con los rótulos utilizados de la metodología de Mason et al. (1982) junto con los propuestos en el presente trabajo, quedarían:

Fase de abordaje.

Rótulos

- ¿Qué es lo que sé?
- ¿Qué es lo que quiero?
- ¿Qué puedo usar?

Fase de ataque.

Rótulos

- ATASCADO
- AJA
- **Preguntas**
- **Conjetura**
- **Consulta**

Fase de revisión:

Rótulos

- Reflexionar
- **Recolección**
- **Hallazgo**

Entonces, se puede observar que en la fase de abordaje no aparecieron nuevos rótulos ya que los propuestos por Mason et al. (1982) se acomodan perfectamente al inicio del proceso de elaboración de significados de la definición ya que, así como en el abordaje de un problema de matemáticas, al inicio del estudio de la definición es importante distinguir lo que se sabe, lo que se quiere y lo que se puede usar. De esta manera se puede trazar un camino a seguir para lograr dotar de sentido a la definición estudiada.

En la fase de ataque aparecen cuatro nuevos rótulos que surgieron de la necesidad de sistematizar las acciones realizadas en el proceso de estudio de la definición, para lo que los rótulos de Mason et al. (1982) resultaron insuficientes. Las acciones de

PREGUNTAR, CONJETURAR y CONSULTAR son propias de la fase de ataque del proceso de elaboración de significados de la definición y están asociadas principalmente al estudio y a la búsqueda de significados de la definición tratada; teniendo en cuenta esto, es conveniente para el ejercicio de metacognición, sistematizar y hacer relevantes tales acciones, para lo cual se pueden utilizar los rótulos propuestos y de esta manera hacer evidente la presencia de cada una de la acciones realizadas y a qué altura del proceso estuvieron presentes. Esto contribuye a la autorregulación del proceso de elaboración de significados de la definición y se convierte en una herramienta para el desarrollo del ejercicio de metacognición.

Los rótulos de **ATASCADO** y **AJA** estuvieron presentes en proceso de comprensión de la definición, sin embargo no tuvieron la misma naturaleza que poseen en la metodología de Mason et al. (1982) ya que en un proceso como el aquí descrito el estar atascado no impide seguir con el estudio de la definición; el estar atascado hace referencia a algún aspecto de la definición que no es comprendido y que impide dotarla de sentido. El AJA en el proceso de compresión y elaboración de significados de una definición como la de espacio topológico está presente en los momentos en los que, después de una serie de acciones, la definición va adquiriendo significado y tal significado puede ser confirmado por medio de una revisión del proceso llevado hasta el momento. Un AJA pone de manifiesto que la definición está siendo dotada de sentido.

Para la fase de revisión se proponen dos nuevos rótulos que buscan controlar y sistematizar el estado del proceso en un momento determinado. Los rótulos **RECOLECCIÓN** y **HALLAZGO** también están asociados a acciones que se realizan en la fase de revisión del proceso de elaboración de significados de la definición; el rótulo RECOLECCIÓN hace referencia a la sistematización de los aspectos más relevantes que han aparecido durante la elaboración de significados, esto es, al realizar una revisión del proceso es conveniente ordenar los aspectos importantes y así poder conocer el estado en el que se encuentra el proceso de resolución, en este caso, el proceso de elaboración de significados de la definición.

El rótulo HALLAZGO puede ser utilizado para indicar los elementos teóricos que se encuentran durante la revisión de la literatura que se esté manejando y que constituyen un aspecto importante en el avance de la comprensión de la definición; como lo es la verificación de un resultado, la confirmación de una conjetura y en general todo aspecto

teórico que contribuya a aportar elementos para la elaboración de significados de la definición. El rótulo **REFLEXIÓN** estuvo presente durante todo el proceso de estudio de la definición y marca los momentos en los que, después de las acciones realizadas en la fase de ataque, es importante realizar una revisión del proceso y reflexionar sobre el estado del mismo y poder analizar si, el camino que se ha venido siguiendo es el apropiado, o si es necesario realizar un cambio en el proceso para poder avanzar en la compresión de la definición.

Ahora, teniendo una recopilación de los rótulos presentes en el proceso de elaboración de significados de la definición, es importante analizar cómo su utilización contribuye al desarrollo de un ejercicio de metacognición del proceso llevado en el estudio de la definición, para esto es necesario tener en cuenta las categorías que propone Schoenfeld para un ejercicio de metacognición.

1. *El conocimiento acerca de nuestro propio proceso, la descripción de nuestro propio proceso de pensar:* Al realizar una descripción del proceso de elaboración de significados de una definición como la de espacio topológico, es importante distinguir y sistematizar el desarrollo de tal proceso; en este sentido, la utilización de los rótulos permite que dicha sistematización se lleve a cabo y por ende permite poner en evidencia nuestro propio proceso de pensar. Lo que contribuye a que durante el estudio de la definición se pueda elaborar significados de la misma, tomando como referencia el estado del proceso que se este produciendo.

2. *El control y la autorregulación. Qué tan bien es capaz uno de seguir lo que se hace cuando se resuelve algún problema y qué tan bien se ajusta uno al proceso (ejecución de acciones) tomando en cuenta las observaciones que se hagan durante la evolución de éste:* La utilización de los rótulos constituye una herramienta para el control y la autorregulación del proceso de resolución o, en este caso, del proceso de elaboración de significados de la definición. Entonces, por medio de los rótulos es posible tener en cuenta las diferentes observaciones que se hacen durante la evolución del proceso y de esta manera avanzar en la comprensión de la definición.

3. *Creencias e intuiciones. Las ideas acerca de las matemáticas que se muestran en el trabajo matemático y la forma como éstas se relacionan o se identifican con la forma de resolver problemas:* Las creencias e intuiciones juegan un papel importante en el

momento de dotar de sentido a una definición como la de espacio topológico ya que por tratarse de una definición asociada al pensamiento matemático avanzado, la abstracción toma un papel fundamental y determina el significado que se elabore de ésta. Al sistematizar el proceso de estudio de la definición, es posible construir un camino que permita realizar la abstracción de los conceptos a los que hace referencia.

En síntesis, la utilización de una metodología como la descrita en este trabajo, permite realizar un ejercicio de metacognición del proceso de estudio y posterior elaboración de significados de una definición del carácter de la de espacio topológico; lo que contribuye a dotar de algún sentido a la definición y a los conceptos asociados a ella, de esta manera se pone en evidencia que realizar una descripción del proceso de elaboración de significados de una definición, asociada al pensamiento matemático avanzado, es conveniente para la construcción de dichos significados.

Finalmente, después de realizado el ejercicio de metacognición sobre el proceso de elaboración de significados de la definición de espacio topológico, se pone en evidencia una manera de problematizar el estudio de la definición de un concepto asociado al pensamiento matemático avanzado. El ejercicio de metacognición realizado en el presente trabajo proporciona una respuesta a la segunda pregunta, *¿Cómo, por medio de la resolución de problemas, se puede problematizar el estudio de la definición de un concepto matemático enmarcado en el pensamiento matemático avanzado?* tal problematización se puede analizar teniendo en cuenta lo que plantea Puig (1996) y tiene que ver con los términos utilizados en el proceso de resolución de problemas; dichos términos son: *resultado, solución y resolución.*

En el presente trabajo se tomó como enunciado del problema el siguiente:

Problema: Dotar de sentido a la definición de espacio topológico.

Resultado: El resultado del proceso de descrito en el presente trabajo, tiene que ver con la elaboración de significados que se logró después del ejercicio de metacognición y el sentido que adquirió la definición de espacio topológico después de realizado el proceso. Dicho resultado se evidencia en la transcripción de las grabaciones realizadas de mi proceso de pensamiento.

Solución y resolución: En el proceso de estudio de una definición de un concepto enmarcado en el pensamiento matemático avanzado, y tomando como problema el tener que dotar de sentido a la definición en cuestión, la descripción del proceso viene a corresponder tanto a la solución como al proceso de resolución; esto porque no es posible realizar una presentación de la solución al problema sin tener en cuenta el proceso de resolución que en el presente trabajo corresponde a la descripción realizada del proceso de estudio. En este sentido, al problematizar el estudio de una definición de un concepto matemático, el proceso de resolución del problema corresponde también a la solución del mismo.

Capítulo V

Conclusiones

¿Qué es una definición? Para el filósofo o el científico,
es una definición que aplica a todos los objetos a ser definidos,
y aplica solo a ellos; es eso que satisface las
reglas de la lógica. Pero en la educación no es eso,
es algo que puede ser entendido por los estudiantes.
Henri Poincaré

Teniendo en cuenta que durante el desarrollo del presente trabajo se han venido planteando una serie de conclusiones, inferidas a partir del análisis de los datos y de los resultados obtenidos en dicho análisis, aquí se formularán las más relevantes y las que realizan un aporte a los elementos teóricos construidos como sustento del trabajo. Son conclusiones entonces:

- Es posible considerar como problema el tener que dotar de sentido a una definición, como la de espacio topológico, y acudir a una metodología basada en la resolución de problemas para iniciar un proceso de resolución.
- Para dotar de sentido a una definición de un concepto matemático, enmarcado en el pensamiento matemático avanzado, es aconsejable y conveniente problematizar el estudio de ésta. La problematización del estudio de la definición es un medio para alcanzar la elaboración de significados de la misma.

- Al problematizar el estudio de la definición, se hace necesaria la utilización de una metodología basada en la resolución de problemas que tenga en cuenta las acciones realizadas durante el desarrollo del proceso de estudio.
- La utilización de una propuesta metodológica que permita realizar una sistematización del proceso de estudio de la definición, contribuye a la elaboración de significados de dicha definición.
- Realizar un ejercicio de metacognición de nuestro propio proceso de pensar se convierte en una herramienta en el proceso de elaboración de significados de los objetos matemáticos o de las definiciones de los objetos matemáticos.
- La utilización de la metodología propuesta por Mason et al. (1982) junto con las consideraciones hechas en el presente trabajo, se convierte en una herramienta que permite el desarrollo del proceso de elaboración de significados de una definición enmarcada en la matemática avanzada.
- La búsqueda o consulta en referencias no formales de la matemática ayuda a la elaboración de significados de los objetos matemáticos.
- La metodología de Mason et. al. (1989) es lo suficientemente flexible como para permitir la aparición de nuevas etiquetas o de problematizar la definición.
- La cultura matemática tiene una incidencia directa en las creencias e intuiciones que pueden hacer abandonar un problema. Tal como en el caso de los problemas abiertos.
- Es posible redescubrir la matemática participando activamente en la elaboración de significados culturales de la misma, teniendo en cuenta una herramienta metodológica adecuada que permita realizar tal redescubrimiento.

Bibliografía

Bohórquez & Sanjuán (2008). *Consideraciones sobre la resolución de problemas en la actualidad.* Colombia: Conferencia en el 9º encuentro colombiano de matemática educativa. Asocolme.

Brousseau (1986). *Fundamentos y métodos de la didáctica de las matemáticas.* Francia: Universidad de Burdeos I. Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol. 7, n. 2, pp. 33-115.

Lebem (1999). *Documento de Acreditación Previa.* Bogotá: Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas.

Kelley, J. (1955). *General Topology*. Berlín: Springer-Verlag.

Mason J, Burton L. & Stacey K. (1982). *Pensar matemáticamente.* España: Labor S.A.

M.E.N (Ministerio de Educación Nacional) (1998). *Lineamientos curriculares de matemáticas.* Colombia: M.E.N.

Munkres, J. (2000) *Topology.* (2ed.) Berlín: Springer-Verlag.

Polya G. (1945). *Como plantear y resolver problemas.* México: Trillas.

Puig L. (1996). *Elementos de resolución de problemas.* España: Comares.

Radford L. (2006). Elementos de una teoría general de la objetivación. *RELIME (3)* 2. 103-129.

Rubiano G. (2006). Sobre el número de topologías en un conjunto finito. Boletín de Matemáticas Volumen XIII No. 2, pp. 136–158.

Runde V. (2005). *A Taste of Topology.* Berlín: Springer-Verlag.

Santos Trigo L. M. (2007). *La resolución de problemas matemáticos fundamentos cognitivos*. México: Trillas.

Tall D. (1988). *The Nature of Advanced Mathematical Thinking.* Hungría: el papel de la discusión para PME.

_____ (1992). *Constructions of objects through Definition and Proof.* Durham: PME Working Group on AMT.

_____ (1999). *The Chasm between Thought Experiment and Mathematical Proof* en Kadunz, G. et. al. Teubner, Stuttgart. 319-343

_____ Construccctions of objects through Definition and Proof Durham PME Working Group on AMT. Recuperado de internet.

Universidad Autónoma de Madrid [UAM] (2009). *Espacios topológicos I (definición y construcciones).* http://www.uam.es/personalpdi/ciencias/fchamizo/aptopoz/pdf.

Wikipedia (2009). *Topología.* http://es.wikipedia.org/wiki/topolog%c3%ada.

Anexos

En este apartado de presentan los anexos correspondientes al ejercicio de investigación objeto del presente trabajo. El anexo número 1 corresponde a las páginas del cuaderno de trabajo utilizado para la recolección de los datos del ejercicio de metacognición, se presentan los apartes más relevantes de dicho cuaderno y los que fueron necesarios como evidencia de las afirmaciones realizadas en el presente trabajo.

El anexo número 2 tiene que ver con la transcripción de una de las grabaciones realizadas durante la elaboración de significados de la definición de espacio topológico. Dicha grabación posee apartes del desarrollo de mi proceso de pensamiento durante la dotación de sentido de la definición en cuestión.

Por último, el anexo número 3 contiene la presentación formal de la solución de un ejercicio de Munkres (2000) que fue uno de los libros de texto utilizado en el proceso de estudio de la definición. La solución de dicho ejercicio se presenta con el fin de evidenciar la manera en la que se llega a resolver un ejercicio después de la elaboración de significados de la definición de espacio topológico y porque no es considerado como un problema; teniendo en cuenta que abordar dicho ejercicio antes de la elaboración de significados de la definición, ciertamente constituiría un problema.

Fecha: Novie 01/08 Hora: 12:00 → I sesión

Espacios Topologicos

DEFINICIÓN: Sea X un conjunto. Una topología en X es un subconjunto $\mathcal{T}$ de $\mathcal{B}(X)$ tal que:

a) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$;

b) Si $\mathcal{U} \subset \mathcal{T}$ es arbitrario, entonces $\bigcup\{U : U \in \mathcal{U}\}$ está en $\mathcal{T}$;

c) Si $U_1, U_2 \in \mathcal{T}$, entonces $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T}$.

Los conjuntos en $\mathcal{T}$ son llamados abiertos. Un conjunto junto con un topologia es llamado un espacio topologico.

Generalmente escribimos $(X, \mathcal{T})$ para un espacio topologico X con topologia $\mathcal{T}$; algunas veces, si la topologia es evidente o irrelevante, podemos simplemente escribir X.

⇒ Inicialmente, es necesario estar familiarizado con la notación utilizada en el enunciado de la definición, en este caso, se debe tener claro que quiere decir cada símbolo, por ejemplo, se debe conocer que el símbolo

$\mathcal{B}(X)$ denota el conjunto de todos los subconjuntos de X, es decir, $\mathcal{B}(X)$ corresponde al conjunto llamado partes de X

⇒ Cabe resaltar que entre mis conocimientos previos se encuentran aspectos relacionados a los espacios métricos, tales como:

- Conjuntos cerrado y abiertos
- Definición de un espacio métrico
- funciones entre conjuntos
- Cardinalidad de conjuntos

A taste of Topology, Volker Runde

Proposición: Sea (X, d) un espacio metrico. Entonces

i) $\emptyset$ y X son abiertos
ii) Si $\mathcal{U}$ es una familia de subconjuntos abiertos de X, entonces $\bigcup\{U : U \in \mathcal{U}\}$ es abierto
iii) Si U_1 y U_2 son subconjuntos abiertos de X, entonces $U_1 \cap U_2$ es abierto.

$\mathcal{T}$ es de hecho una topología. Es claro que $\mathcal{T}$ no depende de la métrica particular d, solo es una clase de equivalencia: Cualquier métrica en X equivalente a d produce la misma topología. Espacios topológicos de este tipo son llamados metrizables

(b) Sea X cualquier conjunto, y sea $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$. Esto es solo un caso especial del primer ejemplo: Equipemos a X con la métrica discreta. tal espacio topologico es llamado discreto.

(c) Sea X cualquier conjunto, y sea $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$. tal espacio topologico es llamado caotico.

(d) Sea X cualquier conjunto, y sea $\mathcal{T}$ que consiste de $\emptyset$ y todos los subconjuntos de X con complemento finito.

(e) Sea X cualquier conjunto, y sea $\mathcal{T}$ que consiste de $\emptyset$ y todos los subconjuntos de X con complemento contable.

(f) Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topologico, y sea $Y \subset X$. La topologia relativa en Y (o topologia heredada de X) es la colección

$$\mathcal{T}|_Y := \{Y \cap U : U \in \mathcal{T}\}$$

de subconjunto de Y. Esto es claramente una topologia en Y. El espacio $(Y, \mathcal{T}_Y)$ es entonces llamado un subespacio de X.

⇒ Empezaré por dos acciones que faltan, inicialmente voy a corregir el ejemplo de espacio topológico que [illegible].

» $X = \{1,2,3,4,5\}$

$T = \{\emptyset, \{1,2,3,4,5\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{1,5\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{2,5\}, \{3,4\},$
$\{3,5\}, \{4,5\}, \{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{1,2,5\}, \{1,3,4\}, \{1,3,5\}, \{1,4,5\},$
$\{2,3,4\}, \{2,3,5\}, \{2,4,5\}, \{3,4,5\}, \{1,2,3,4\}, \{1,2,3,5\}, \{1,2,4,5\}$
$\{1,3,4,5\}, \{2,3,4,5\}\}$

⇒ **[illegible]** T es un subconjunto de $\mathcal{B}(X)$ porque si el subconjunto arbitrario U es igual a X entonces por la propiedad 1 en T tiene que estar las uniones de los subconjuntos de X; dichas uniones que determinan los subconjuntos de $\mathcal{B}(X)$ a excepción de los conjuntos unitarios.

⇒ **REFLEXIÓN** Al reflexionar sobre si mi ¡AJA! estaba correcto, descubrí que en mi topología me faltaban [illegible] como [illegible]

$\{1,4\} \cap \{1,2,5\} = \{1\}$

$\{2,3\} \cap \{1,2,4\} = \{2\}$.

Observando estas intersecciones veo que aparecen los conjuntos unitarios que le hacían falta a T para ser igual a $\mathcal{B}(X)$.

Usando esta terminología, podemos decir que un espacio topológico es un conjunto X junto con una colección de subconjuntos de X, llamados conjuntos abiertos, tal que $\emptyset$ y X son abiertos, y tal que las uniones arbitrarias y las intersecciones finitas de conjuntos abiertos son abiertas.

⇒ Observando esta definición vemos que en la primera no se menciona, y es que un espacio topológico es un par ordenado $(X, \mathcal{T})$, esta podría ser determinante a la hora de entender el significado de un espacio topológico.

Ahora voy a analizar algunos ejemplos que se verán en este libro.

» Ejemplo 1. Sea X un conjunto de tres elementos, $X = \{a, b, c\}$. hay muchas topologías posibles en X, Algunas de las cuales estan indicadas esquematicamente en la figura 1

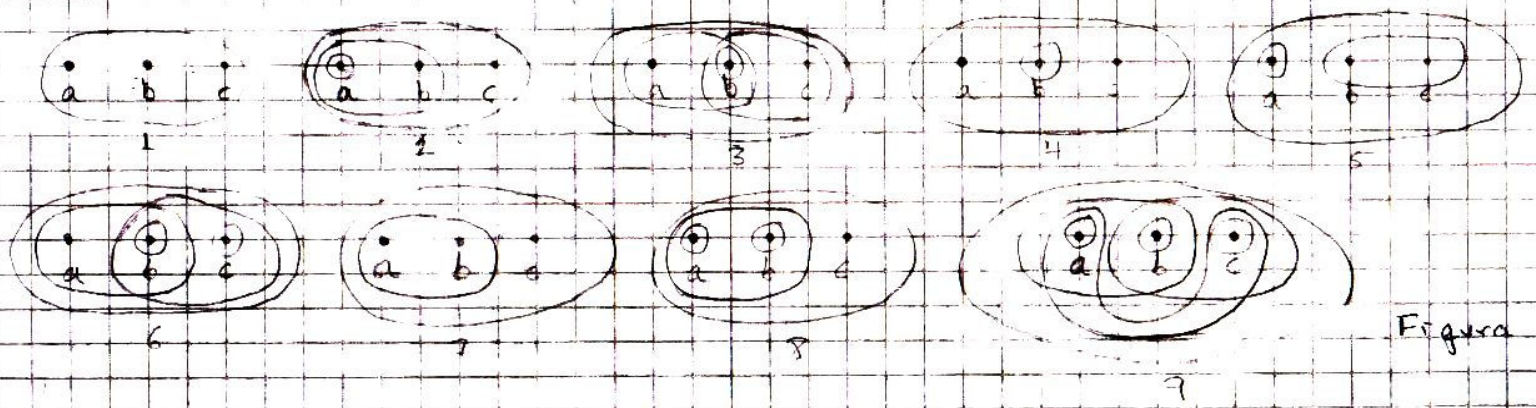


Figura 1

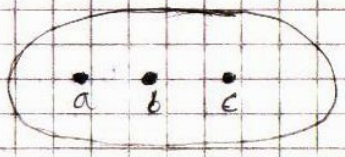
El diagrama 3 indica la topología en la cual los conjuntos abiertos son X, $\emptyset$, $\{a, b\}$, $\{b\}$ y $\{b, c\}$. la topología del diagrama 1 solo contiene a X y $\emptyset$,

3 elementos
8 elementos
4 elementos
7 elementos
no hay

Un subconjunto V de X será un entorno de x si x es elemento de V y existe un conjunto abierto G de manera que G esté incluido en V. ¿Que entendemos por conjunto abierto?...

=> Partiendo de este fragmento fragmento analizaré las topologías de X empezando por la trivial.

>> Sea $\tau = \{\emptyset, X\}$.



En ésta representación se encuentra tanto X como τ. ¿Pero es la representación del espacio topológico?

↓

Pregunta. 11

Tengo el conjunto X, es decir, tengo el espacio. Ahora sea $X = a$, es decir, tengo un punto de X.

Entonces, en este caso, el subconjunto V tiene que ser X, esto es, X es un entorno de x ya que también puedo encontrar el conjunto G que en este caso también coincida con X ya que X está incluido en X, pero si

$G = X$ entonces X debe ser abierto.

=> Pero aquí la noción de abierto no corresponde a la trabajada en los espacios métricos debido a que no se ha definido una métrica

entonces la unica opción es que X es abierto debido a que pertenece a la topología y los elementos de la topología son abiertos (por definición). Sin embargo, ya había visto que si los conjuntos son tomados como cerrados la topología no se altera. Observación 3

Ésta terminología es sugerida pensando en un espacio topológico siendo algo como un camión lleno de arena - los granos y todas las uniones de colecciones de granos son dos conjuntos abiertos. Si ahora rompemos los granos en unos más pequeños, la colección de conjuntos abiertos ha sido agrandada, tal como la arena, se dice que se ha hecho más fina por esta operación.

DEFINICIÓN: Si X es un conjunto, una base para una topología en X es una colección $\mathcal{B}$ de subconjuntos de X (llamada elementos base) tal que

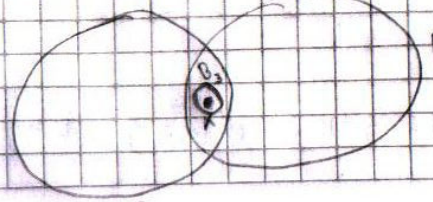
(1) Para cada $x \in X$, existe por lo menos un elemento base B conteniendo a x

(2) Si x pertenece a la intersección de dos elementos base B_1 y B_2, entonces existe un elemento base B_3 conteniendo a x tal que $B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

DEFINICIÓN: Si $\mathcal{B}$ es una base para una topología en X, la topología $\mathcal{T}$ generada por $\mathcal{B}$ es descrita como sigue: Un subconjunto U de X se dice que es abierto en X (es decir, un elemento de $\mathcal{T}$) si para cada $x \in U$, existe un elemento base $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B$ y $B \subset U$.

Notese que cada elemento de $\mathcal{B}$ es abierto en X bajo ésta definición, Así que $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$.

EJEMPLO. Sea $\mathcal{B}$ la colección de todas las regiones circulares (interiores de círculos) en el plano. Entonces $\mathcal{B}$ satisface ambas condiciones para una base. En la topología generada por $\mathcal{B}$, un subconjunto U del plano es abierto si cada x en U está en alguna región circular contenida en U.



LEMA: Sea X un conjunto; sea $\mathcal{B}$ una base para una topología $\mathcal{T}$ en X. Entonces $\mathcal{T}$ es igual a la colección de todas las uniones de los elementos de $\mathcal{B}$.

Dem/: Tomemos una colección de elementos de $\mathcal{B}$, siendo también elementos de $\mathcal{T}$. Porque $\mathcal{T}$ es una topología, su unión está en $\mathcal{T}$. Recíprocamente, dado $U \in \mathcal{T}$, tomemos para cada $x \in U$ un elemento B_x de $\mathcal{B}$ tal que $x \in B_x \subset U$. Entonces $U = \bigcup_{x \in U} B_x$, así U es igual a la unión de los elementos de $\mathcal{B}$.

LEMA: Sea $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ bases para las topologías $\mathcal{T}$ y $\mathcal{T}'$, respectivamente, en X. Entonces lo siguiente es equivalente

(1) $\mathcal{T}'$ es más fina que $\mathcal{T}$

(2) Para cada $x \in X$ y cada elemento base $B \in \mathcal{B}$ conteniendo a x, existe un elemento base $B' \in \mathcal{B}'$ tal que $x \in B' \subset B$.

Dem/ (2) $\Rightarrow$ (1). Dado un elemento U de $\mathcal{T}$, queremos mostrar que $U \in \mathcal{T}'$. Sea $x \in U$. puesto que $\mathcal{B}$ genera $\mathcal{T}$, existe un elemento $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subset U$. Decimos que existe un elemento $B' \in \mathcal{B}'$ tal que $x \in B' \subset B$. Entonces $x \in B' \subset U$, así $U \in \mathcal{T}'$, por definición.

(1) $\Rightarrow$ (2). Tomemos $x \in X$ y $B \in \mathcal{B}$, con $x \in B$. Ahora B pertenece $\mathcal{T}$ por definición, y $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$ por condición (1); Por consiguiente, $B \in \mathcal{T}'$. puesto que $\mathcal{T}'$ es generada por $\mathcal{B}'$, existe un elemento $B' \in \mathcal{B}'$ tal que $x \in B' \subset B$

LEMMA: Sea X un espacio topológico. Supongamos que $\mathcal{C}$ es una colección de conjuntos abiertos de X tal que para cada conjunto abierto U de X y cada x en U, existe un elemento C de $\mathcal{C}$ tal que $x \in C \subset U$. Entonces $\mathcal{C}$ es una base para la topología de X.

Fin de la Sesión Dic 26/08 Hora: 01:10.

I Sesión Dic 27/08 Hora: 23:15

CONSULTA

DEFINICIÓN: Si $\mathcal{B}$ es la colección de todos los intervalos abiertos en la línea real

$$(a,b) = \{x \mid a < x < b\},$$

la topología generada por $\mathcal{B}$ es llamada topología estandar en la línea real. Si $\mathcal{B}'$ es la colección de todos los intervalos semi-abiertos de la forma

$$[a,b) = \{x \mid a \leq x < b\},$$

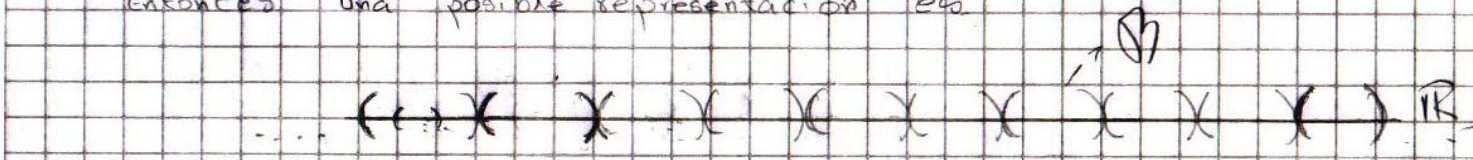
donde $a < b$, la topología generada por $\mathcal{B}'$ es llamada la topología del límite inferior en $\mathbb{R}$. Cuando en $\mathbb{R}$ está dada la topología del límite inferior, denotamos esto por $\mathbb{R}_l$.

Es fácil ver que ambas $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ son bases; la intersección es otro elemento base o es vacía.

Cuando consideramos $\mathbb{R}$, debemos suponer que está dada la topología estandard a menos que especifiquemos otra cosa. La topología del límite inferior provee o es muy útil en la construcción de contraejemplos. La relación entre éstas dos topologías es la siguiente:

LEMA: La topología del límite inferior $\mathcal{T}'$ en $\mathbb{R}$ es estrictamente más fina que la topología estandard. $\mathcal{T}$.

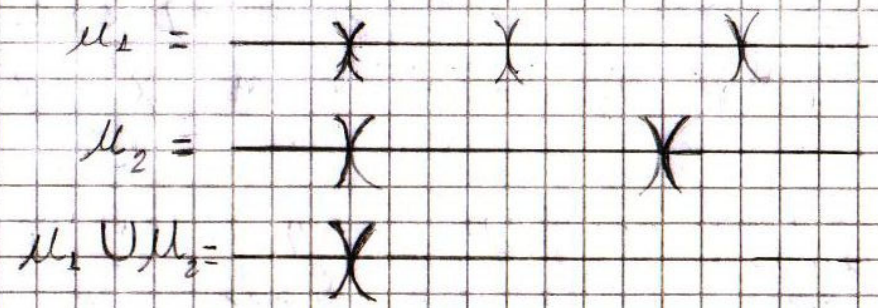
Teniendo en cuenta que la topología τ generada por $\mathcal{B}$ es igual a la colección de todas las uniones de los elementos de $\mathcal{B}$. Entonces una posible representación es



la colección de todos los intervalos abiertos (a_i, b_i) forma a $\mathcal{B}$ que es una base para la topología usual τ, entonces

$$\tau = \bigcup (a_i, b_i)$$

es decir, si tengo μ_1 y μ_2 elementos de $\mathcal{B}$ entonces $\mu_1 \cup \mu_2 \in \tau$



$\Rightarrow$ Teniendo en cuenta lo anterior se puede inferir que la topología usual contiene todos los elementos de $\mathbb{R}$, esto es,

Conjetura: Si τ es la topología usual y $X = \mathbb{R}$ entonces

$$\tau = \mathbb{R}$$

Estaría dotando a $\mathbb{R}^2$ con la métrica usual y la idea es trabajar con los espacios topológicos sin dotar al espacio con una métrica particular.

=> Ahora voy a intenta solucionar el siguiente ejercicio

» Ejercicio 4.a): Si $\{\mathcal{T}_\alpha\}$ es una colección de topologías en X, Muestre que $\bigcap \mathcal{T}_\alpha$ es una topología en X. ¿Es $\bigcup \mathcal{T}_\alpha$ una topología en X?

Que es lo que sé:

$\{\mathcal{T}_\alpha\}$ es una colección de topologías en X

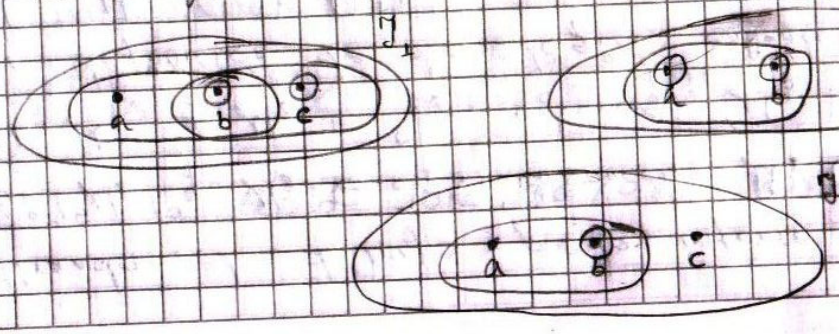
Lo que quiero: Mostrar que $\bigcap \mathcal{T}_\alpha$ es una topología en X

Lo que puedo usar:

Si $\mathcal{T}_1$ y $\mathcal{T}_2$ están en $\{\mathcal{T}_\alpha\}$ sabemos por definición de topología que $\emptyset$ y X están en $\mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2$

Ahora tengo que probar que si un conjunto μ arbitrario esta en $\mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2$ entonces $\bigcup \{u : u \in \mu\}$ está en $\mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2$

=> Voy ha ayudarme con un dibujo que me represente dos topologías en un conjunto de 3 elementos



$\mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2 = \{\emptyset, X, \{a,b\}, \{b\}\}$ es una topología

=> Mirando el dibujo puedo inferir que.

» · Si μ_1 y $\mu_2 \in \mathcal{T}_1$ entonces $\mu_1 \cup \mu_2 \in \mathcal{T}_1$ y $\mu_1 \cap \mu_2 \in \mathcal{T}_1$

· Si μ_1 y $\mu_2 \in \mathcal{T}_2$ entonces $\mu_1 \cup \mu_2 \in \mathcal{T}_2$ y $\mu_1 \cap \mu_2 \in \mathcal{T}_2$

por definición de topología, entonces

$\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2$ y $\mu_1 \cup \mu_2 \in \mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2$ y $\mu_1 \cap \mu_2 \in \mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2$

y así se verifica que $\mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2$ tambien es una topología.

=> Ahora voy a escribir la solución de manera formal.

» Si $\{\mathcal{T}_\alpha\}$ es una colección de topologías X entonces $\bigcap \mathcal{T}_\alpha$ también es una topología en X.

Dem/ i) Si $\{\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2\} = \{\mathcal{T}_\alpha\}$ entonces $\emptyset, X \in \mathcal{T}_1$ y $\emptyset, X \in \mathcal{T}_2$

Por consiguiente $\emptyset, X \in \mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2$

ii) Sea $\mathcal{U} \in \mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2$ con $\mathcal{U}$ una familia de subconjuntos de $\mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2$, entonces $\mathcal{U} \in \mathcal{T}_1$ y $\mathcal{U} \in \mathcal{T}_2$ y como $\mathcal{T}_1$ y $\mathcal{T}_2$ son topologías tenemos que $\bigcup\{U : U \in \mathcal{U}\} \in \mathcal{T}_1$ y $\bigcup\{U : U \in \mathcal{U}\} \in \mathcal{T}_2$ por lo tanto

$$\bigcup\{U : U \in \mathcal{U}\} \in \mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2$$

ANEXO 2: Grabación de mi proceso de pensamiento

Grabación 2.

Ahora, viendo los ejemplos que presentan en los libros me pregunto porque, si en la topología se trabaja fundamentalmente el concepto de continuidad, porque el primer ejemplo que ofrecen en los libros es con un conjunto finito, es mas es con un conjunto de 3 elementos en el que forman una serie de topología las cuales las representan gráficamente, ahí yo no logro identificar cual seria la proximidad en si entre los elementos, primero pues porque no hay una distancia entre ellos y segundo si es un conjunto discreto pues la distancia entre uno y otro al carecer de una métrica pues no se cual seria la distancia, si tomo la proximidad con la relación a una distancia; pero igual representan la topología igual se cumplen las propiedades y pues se verifica que si es un espacio topológico, y según la representación grafica pues al verla carece de cómo sentido porque no veo la necesidad de ponerse uno ha hacer un espacio topológico una representación así; mas bien en términos generales lo que veo son bolita y bolitas y bolitas entre las otras bolitas entre los conjuntos, pero en si que yo vea una representación de un espacio que tenga un sentido así como cuando uno representa un espacio métrico que uno si ve el significado de generar o la necesidad e generar métricas para poder representar la distancia entre puntos de un conjunto. y otra cosa es que todavía no tengo claro porque en un conjunto discreto y finito hablan de conjuntos abiertos, claro que en estos momentos ya estudie la topología de complemento finito, y pues hay en esa topología si tiene sentido que los conjuntos de la topología sean abiertos, pero en la representación que dan del espacio topológico con un conjunto de tres elementos pues no están tratando la topología de complemento finito, y entonces pues no veo como van ha ser abiertos, pues ya tengo información que es por definición pero pues si es por definición, una cosa que se debe aceptar, un conjunto abierto en una topología; encontré también que lo importante lo que hace visualizable un conjunto, un espacio topológico es el criterio con el cual uno elija a los conjuntos abiertos, pero estos conjuntos abiertos bueno este criterio mas bien, para elegir los conjuntos abiertos dicen que es la esencia del espacio topológico, es decir, esto me lleva a pensar que no todos los espacios topológicos son representables gráficamente, o visualizables mas bien como lo dicen la teoría, eso lo encontré en un articulo de wikipedia en el que dicen que precisamente la manera en que quede determinada una topología sobre un conjunto, es decir, la elección del criterio que nos permita decir si un conjunto dado es o no abierto es lo que va ha dar el carácter de

visualizable o no al espacio topológico, pero en el mismo articulo dicen que el entendimiento de lo que es un conjunto abierto es el quid de la cuestión y pues pasan a definir el espacio topológico, o sea esto me lleva a pensar también que pues como carecemos de una métrica en los espacios topológicos, bueno al inicio de los espacio topológicos porque se pueden generar espacios topológicos dotando el espacio de una métrica creo que como no tenemos una métrica establecida pues no podemos trabajar el concepto de conjunto abierto como el que se trabaja en los espacios métricos que es pues en el que se puede formar una bola, que para todo x existe una bola abierta que esta contenida totalmente en el conjunto dado un radio mayor que 0; y pues en estos momentos creo que es como la parte fundamental en la que estoy como atascado y pues que no he podido identificar o darle sentido a la definición es por eso por esa razón, porque no veo como generando una topología en un contexto discreto en un conjunto de tres elementos se puede hablar de proximidad y mas aun pues de continuidad pues no existe continuidad en un conjunto discreto, y pues el espacio topológico todavía carece de sentido, no se para que se usa, no se para que será importante formar un espacio topológico.

ANEXO 3: Solución de un ejerció tomado del libro Munkres (2000)

Ejercicio: Si $\{\Im_\alpha\}$ es una colección de topologías en *X.* Muestre que $\cap\{\Im_\alpha\}$ es una topología. ¿Es $\cup\{\Im_\alpha\}$ una topología en *X*?.

Solución: Si $\{\Im_\alpha\}$ es una colección de de topologías en *X* entonces $\cap\{\Im_\alpha\}$ también es una topología en *X.*

Demostración:

i. Si $\{\Im_1, \Im_2\} = \{\Im_\alpha\}$ entonces $\emptyset, X \in \Im_1$ y $\emptyset, X \in \Im_2$ por consiguiente $\emptyset, X \in \Im_1 \cap \Im_2$.

ii. Sea $\mathcal{U} \in \Im_1 \cap \Im_2$ con $\mathcal{U}$ una familia de subconjuntos de $\Im_1 \cap \Im_2$; entonces $\mathcal{U} \in \Im_1$ y $\mathcal{U} \in \Im_2$ y como $\Im_1$ y $\Im_2$ son topologías tenemos que $\cup\{U: U \in \mathcal{U}\} \in \Im_1$ y $\cup\{U: U \in \mathcal{U}\} \in \Im_2$ por lo tanto $\cup\{U: U \in \mathcal{U}\} \in \Im_1 \cap \Im_2$.

iii. Sea $U_1, U_2 \in \Im_1 \cap \Im_2$ entonces $U_1, U_2 \in \Im_1$ y $U_1, U_2 \in \Im_2$, y como $\Im_1 \, y \, \Im_2$ son topologías tenemos que $U_1 \cap U_2 \in \Im_1$ y $U_1 \cap U_2 \in \Im_2$. Por lo tanto:

$$U_1 \cap U_2 \in \Im_1 \cap \Im_2$$

De ésta manera concluimos que si $\{\Im_\alpha\}$ es una colección de topologías en *X* entonces $\cap\{\Im_\alpha\}$ también es una topología en *X.*

Ahora miraremos si $\cup\{\Im_\alpha\}$ es una topología en *X.*

i. Si $\{\Im_1, \Im_2\} = \{\Im_\alpha\}$ entonces $\emptyset, X \in \Im_1$ o $\emptyset, X \in \Im_2$ ya que $\Im_1 \, y \, \Im_2$ son topologías, por lo tanto $\emptyset, X \in \Im_1 \cup \Im_2$.

ii. Sea $U_1 \in \Im_1$ y $U_2 \in \Im_2$ con $U_1 \neq U_2$, entonces $U_1, U_2 \notin \Im_1 \cap \Im_2$ por lo tanto $U_1 \cup U_2 \notin \Im_1 \cup \Im_2$. Por consiguiente $\Im_1 \cup \Im_2$ no es una topología.

De esta manera podemos concluir que si $\{\Im_\alpha\}$ es una colección de topologías en *X* entonces $\cup\{\Im_\alpha\}$ no es una topología en *X.*