

DIFICULTADES EN EL APRENDIZAJE DE MATEMÁTICA. OBSTÁCULOS Y ERRORES EN EL APRENDIZAJE DEL CONCEPTO DE DEPENDENCIA E INDEPENDENCIA LINEAL

Mónica Caserio, Martha Guzmán, Ana María Vozzi

UNR.-FCEIA, UTN-FRR. (Argentina)

mbcaserio@yahoo.com.ar , guzmartha@yahoo.com, amvozzi@fceia.unr.edu.ar

Campo de investigación: pensamiento algebraico. Nivel educativo: superior

Palabras clave: errores, aprendizaje significativo, ingeniería didáctica

Resumen

En el marco del proyecto de investigación del que formamos parte: “Dificultades en la enseñanza-aprendizaje de matemática en carreras no matemáticas”, ubicamos este trabajo que presentamos como reporte de investigación, ya que da cuenta del diseño de aquellos ciclos que se corresponden con el análisis a priori de una situación de aprendizaje, la recolección de datos en la propia situación y el análisis a posteriori de los resultados. Nos ocupamos en esta etapa del análisis de los errores puestos de manifiesto por los alumnos de 1º año de las carreras de Ingeniería, en relación a un tema específico del Álgebra Lineal, como es Dependencia e Independencia Lineal

Marco teórico

Bajo la concepción que los “errores” no constituyen solamente un obstáculo para el aprendizaje de matemática, sino que, si son previamente detectados y clasificados pueden convertirse en elementos disparadores de un aprendizaje significativo.

En la clasificación de los errores que realiza Socas: I-Errores que tienen su origen en un obstáculo y II-Errores que tienen su origen en ausencia de sentido del concepto, consideramos que tanto en uno como en otro caso hay una gran contribución de los distintos lenguajes y sus correspondientes modos de pensamiento en Álgebra Lineal:

Lenguaje geométrico: el que se usa para ilustrar las representaciones y propiedades de los vectores en \mathbb{R}^2 y \mathbb{R}^3 ;

Lenguaje aritmético: usado para describir las operaciones entre matrices, soluciones de ecuaciones, etc. y

Lenguaje algebraico: usado para formalizar y simbolizar entes como espacios vectoriales, transformaciones lineales, etc. (Sierpinski, 1996).

Dando lugar a los siguientes modos de pensamiento

Pensamiento sintético geométrico: Este tipo de pensamiento se da en una persona, por ejemplo, cuando se piensa en las posibles colocaciones de rectas o planos en \mathbb{R}^2 o \mathbb{R}^3 que representan las posibles soluciones de un sistema de ecuaciones lineales. *Pensamiento aritmético - analítico*: Siguiendo con el ejemplo anterior, si la persona examina el problema en términos de los posibles resultados después de haber reducido la matriz respectiva, se está en el modo de pensamiento aritmético analítico. *Pensamiento analítico estructural*: Cuando se piensa el problema anterior en términos de las propiedades de las matrices invertibles o no invertibles o de los determinantes del sistema.

Diseño de la experiencia

Diseñamos una serie de actividades áulicas que nos proporcionen los elementos de análisis necesarios para elaborar las conclusiones. A partir de ellas, se hará posible el diseño de

nuevas estrategias didácticas que faciliten al alumno la incorporación significativa de los conceptos.

El marco metodológico elegido es el de una investigación activa, por entender que ella se dirige a su aplicación inmediata y no al desarrollo de teorías. Su propósito es el de mejorar la práctica educativa y al mismo tiempo perfeccionar a quienes han de mejorar sus métodos. Apela a los docentes que tienen problemas por resolver y le corresponde comprometer e implicar al docente proporcionándole un camino para el progreso profesional y la mejora del plan de estudios. Por ese sentido, nos ubicamos tanto a nivel didáctico como a nivel de investigación, en el cuadro de la Ingeniería Didáctica, puesto que consideramos que en el contexto de un paradigma cualitativo el “saber a enseñar” y el “caso a investigar” son susceptibles de ser tratados a través de ella. Por otra parte esta posición es compatible con la aproximación cognitiva desarrollada alrededor de los “campos conceptuales” de G. Vergnaud, a la aproximación a través de los “saberes” de J. Chevallard en el área de transposición didáctica y a la aproximación didáctica a través de la teoría de situaciones de G. Brousseau y los obstáculos que clasifica. La metodología de la Ingeniería didáctica se caracteriza, en comparación con otros tipos de investigación basados en la experimentación en clase, por el registro en el cual se ubica y por las formas de validación a las que está asociada. En general, las investigaciones que recurren a la experimentación en clase emplean un enfoque comparativo con evaluación externa, basada en la comparación estadística del rendimiento de los grupos experimentales y grupos de control, mientras que la Ingeniería Didáctica se ubica en el registro de los estudios de caso y cuya validación es interna, como resultado de la confrontación entre el análisis a priori y a posteriori.

En el contexto de la ingeniería didáctica

Las actividades a desarrollar, en un proceso espiralado, se delinearán según las cuatro fases o momentos que describe M. Artigue, en “Ingeniería Didáctica” Los análisis preliminares

- 1- La concepción y el análisis a priori.
- 2- Experimentación.
- 3- Análisis a posteriori.

Para implementar esta etapa de la investigación, que consistió en el desarrollo de la unidad didáctica elegida “Dependencia e independencia lineal”, la ejercitación sobre los temas, la evaluación del desarrollo del trabajo áulico y la evaluación final del aprendizaje del mismo, elaboramos guías de trabajos prácticos tomando como base las utilizadas actualmente en los cursos, donde agregamos algunos problemas tendientes a contribuir a una correcta manipulación de los conceptos aprendidos.

Durante las clases los alumnos abordaron la resolución de los problemas trabajando en grupos con la presencia constante de los docentes, en estas instancias se pusieron de manifiesto las dificultades que ellos presentan para la comprensión de los conceptos, tanto desde la abstracción como de su aplicación.

Los errores que cometen los estudiantes, observados tanto en el planteo de los problemas, como en las distintas etapas de la resolución pueden clasificarse primariamente como:

I-Errores que tienen su origen en un obstáculo II-Errores que tienen su origen en ausencia de sentido del concepto.

Entre los del primer tipo, podemos enumerar:

- Identificación de los elementos intervinientes
- Inseguridad en el trabajo algebraico

En los del segundo tipo se encuentran:

- Conceptos previos: linealidad, combinación lineal.
- Generalización de concepciones aprendidas en casos particulares

Ejemplo:

1.- Dados los vectores de \mathbb{R}^3 $S = \{\mathbf{u}; \mathbf{v}; \mathbf{w}\}$

Determinar a) Si forman un conjunto L.I. o L.D.

- b) Como consecuencia del ítem a, el vector \mathbf{u} depende linealmente de los restantes vectores de S
- c) Existe algún subconjunto de S que sea L.I.? Justifique.

2.- Dados los vectores de \mathbb{R}^5 $\{\mathbf{a}; \mathbf{b}; \mathbf{c}; \mathbf{d}; \mathbf{w}\}$

Determinar a) Con los vectores del conjunto escriba la combinación lineal del vector cero

b) Indique para cuales valores de los coeficientes es válida la igualdad planteada en a).

c) Si alguno de los valores encontrados es distinto de cero, que puede decir respecto del conjunto de vectores dado?. Y si son todos nulos?

d) Exprese al vector \mathbf{b} como combinación lineal de los restantes vectores del conjunto.

3.- Dados los polinomios $p_1(x); p_2(x); p_3(x)$

- i) Responda los ítem del problema 2, sustituyendo la palabra vector por polinomio.
- ii) Obtenga un subconjunto del dado, que sea L.I. Es único? Justifique.

En el primer ejercicio, el abordaje es mayoritariamente geométrico:

- Representan gráficamente los vectores
- Relacionan Dependencia lineal exclusivamente con coplanaridad
- Resuelven en forma geométrica.

En el segundo se evidencian las dificultades relacionadas con la comprensión de los conceptos, a saber:

- Significado de combinación lineal
- Identificación de los coeficientes
- Interpretación de la consigna solicitada en c
- No expresa correctamente la respuesta.

Respecto del tercer problema, observamos que en general, se ponen de manifiesto las dificultades referidas a la generalización de los conceptos:

- Relación entre diferentes entidades matemáticas (vectores-polinomios)
- Tendencia a restringir la consigna (buscan el mayor conjunto L.I.), lo que los lleva a concluir en forma incorrecta.

Durante el desarrollo del trabajo áulico, promovemos la consulta del material bibliográfico, como así también sus apuntes personales. Contrariamente a lo esperado, en su gran mayoría no representa un facilitador de la tarea, ya que en muchas oportunidades no son capaces de decodificar la información impresa, sino que su hábito es buscar en el libro o sus apuntes sólo las recetas para la resolución de problemas similares. Al no encontrar una situación lo suficientemente parecida, optan por la lectura completa del párrafo, para lo cual recurren permanentemente al docente tratando que éste decodifique lo que está escrito posibilitando así su comprensión.

Comentarios finales

Analizando los errores que habitualmente cometen nuestros alumnos, encontramos algunos factores que pueden avanzar como explicativos de los mismos, estos nos da la posibilidad de reflexionar sobre la necesidad de modificar nuestra propia práctica en pos de la superación de los mismos. En la actualidad, los alumnos llegan a la Universidad con muchas expectativas y muy poca preparación, esta mezcla puede ser explosiva, desembocando en una prematura deserción. Si bien es cierto que en muchas facultades, incluida la nuestra se trabaja seriamente en el ingreso, es también necesario que los docentes de las asignaturas de primer año nos involucremos en esta temática.

Habiendo realizado este trabajo, en forma sistemática y registrando todos los elementos relevantes intentamos proponer algunas alternativas didácticas para mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje:

- Luego de haber detectado los obstáculos, utilizar estrategias pedagógicas tendientes a convertirlos en favorecedores del aprendizaje.
- Diseñar trabajos prácticos a desarrollarse en las aulas, que contemplen los obstáculos detectados promoviendo así su superación.
- Tomar la práctica propuesta por la bibliografía sólo como un “refuerzo” tendiente a mejorar la técnica.

En muchas ocasiones, se sostiene que la práctica es el soporte para el aprendizaje abstracto de la teoría, sin embargo, muchas veces la práctica se convierte en un repertorio de ejercicios o problemas tipo y rutinarios de aplicación de una teoría que no se ha incorporado y que conduce al alumno a engañarse o confundirse sobre sus conocimientos “¿para qué justificar o explicar con un teorema lo que hice bien?”

“No hay nada tan práctico como una buena teoría” Einstein. Sin embargo, una de las actitudes que prevalece en nuestros estudiantes es la de ofrecer una gran resistencia al aprendizaje de los fundamentos teóricos en las distintas temáticas abordadas, este hecho se manifiesta en la gran cantidad de alumnos que fracasan en las evaluaciones que contienen aspectos teóricos de los temas a evaluar.

A modo de conclusión

Utilizar la clase tradicional, como un tiempo destinado al desarrollo en velocidad de la gran cantidad de temas del programa, teniendo como finalidad más importante el “avance” y en lo posible la culminación del mismo no contribuye, al menos, en los primeros semestres, a los

objetivos de la enseñanza en su más alto nivel, que implica cooperación con el estudiante de modo de ayudarlo en ese desarrollo a “pensar”, es necesario despertar entusiasmo, buenos hábitos para aprender, buenas características de juicio crítico, un cabal razonamiento lógico-formal y anhelo por aceptar el desafío que se plantean en diferentes contextos y los nuevos problemas en la vida profesional.

Debemos cambiar la premisa “completar el programa de la asignatura” y ocuparnos de introducir metodologías que ayuden al estudiante a “aprender a aprender”, que posibiliten el aprendizaje significativo de los conceptos, que venzan los obstáculos que se interponen, reconociendo en ellos una oportunidad para la consecución del objetivo principal de la enseñanza en el nivel superior, cual es brindar al estudiante las herramientas necesarias para que pueda convertirse en su propio instructor para toda la vida. La idea no es instalar en el alumno “certezas” sino “dudas” que lo lleven a investigar, consultar, pensar y repensar un concepto, inducirlo en la necesidad de su prueba, demostración y justificación teórica.

En el transcurso de la experiencia, observamos que la comprensión de los conceptos trabajados fue lograda ya que los estudiantes fueron capaces, en su mayoría, de generalizar y transitar del pensamiento geométrico elemental al pensamiento algebraico, logrando así un acercamiento al pensamiento abstracto, imprescindible para la futura aplicación en diversos contextos. Es importante referir que los aprendizajes logrados respecto de la dependencia e independencia lineal facilitaron la comprensión en los temas subsiguientes del Álgebra Lineal. Es posible que con estas premisas no logremos el desarrollo completo del programa de la asignatura, pero habremos dotado a nuestros estudiantes de las habilidades necesarias para estudiar en forma autónoma los temas que no se alcancen a desarrollar, así como que puedan abordar otros de su interés en forma independiente y provechosamente.

Se hace necesario, entonces, una reformulación del contrato didáctico, que promueva estas actividades de trabajo áulico. Para ello es imprescindible que los docentes interpretemos correctamente las consignas y cambiemos nuestra actitud adoptando las estrategias que promuevan el aprendizaje significativo de conceptos fundamentales de las asignaturas y generen las habilidades necesarias para el aprendizaje autónomo.

En ello estamos trabajando.

Referencias bibliográficas

- Artigue, M.; Douady, R.; Moreno, L. y Gomez, P. (1995). *Ingeniería didáctica en educación Matemática*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.
- Brousseau, G. (1996) *L'enseignant dans la théorie des situations didactiques*. En Actes De Ville Ecole Et Université D'Été Didactiques De Mathématiques. Francia: IREM .
- Chevallard, I. (1997). *La Transposición didáctica*. Buenos Aires: AIQUE.G
- Díaz Barriga, F. y Hernández Rojas, G (1997). *Estrategias docentes para un aprendizaje significativo*. México: Mc. Graw Hill.
- Kilpatrick, J. (1995). *Staking claims*. Nordic studies in mathematics Education. Roskilde University, Dinamarca: IMFUFA.
- Saldaña, L.A. (1995). *The notions of linear independence/dependence: a conceptual analysis and students difficulties*. Tesis de maestría. Concordia University. Montreal, Quebec, Canadá.
- Sierpínska, A. y Hillel, J. (2000). *On some aspects of students' thinking in linear algebra*. Research on the teaching and learning of linear algebra conducted at the Concordia University. Montreal Canadá.
- Vergnaud, G. (1990) *La théorie des champs conceptuels*. Recherche en didactique des mathématiques 10 (23) : 133 -170.