

LA CENTRACIÓN EN PROBLEMAS DE PROBABILIDAD BASADOS EN EL RAZONAMIENTO PROPORCIONAL

Greivin Ramírez Arce, Esteban Ballestero Alfaro
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. (México)

greivinra@gmail.com, estebanballestero@yahoo.es

Campo de investigación: pensamiento relacionado con probabilidad y estadística. Nivel educativo: básico

Palabras clave: equiprobabilidad, centración, razonamiento proporcional

Resumen

Este documento reporta los resultados de un estudio exploratorio aplicado a estudiantes de secundaria que presentan problemas de equiprobabilidad y centración en ejercicios de probabilidad basados en el razonamiento proporcional. Los problemas propuestos a los estudiantes han sido analizados por Green, Papinni, Fischbein y Gazit en investigaciones previas, de esta manera, nuestro aporte consiste en proponer una extensión a los resultados obtenidos por estos autores a partir de marco conceptual SOLO Taxonómico propuesto por Biggs y Collins (1982), que consiste en cinco niveles presentes en el ciclo de aprendizaje de una persona dentro de cada uno de los estadios de Piaget.

Introducción

A través de la historia se han realizado diversas investigaciones de cuestionarios de probabilidad diseñados por Green, Papinni, Fischbein y Gazit (en Cañizares, 1997), y que han sido aplicados a públicos de diferentes niveles. Como parte de los análisis de estos cuestionarios se pudo notar que las dificultades que muestran los estudiantes en temas de probabilidad, llama la atención aquellos casos en los que los estudiantes presentan deficiencias en la resolución de problemas que involucran el pensamiento proporcional, pues como mencionan Garfiel & Ahlgren (1988):

“Una variedad de los estudios sobre desarrollo cognitivo de los estudiantes de nivel medio superior indica que posiblemente la mitad de ellos no podían pensar de acuerdo con el nivel de las operaciones formales. Por ejemplo, no controlan completamente la proporcionalidad”.

Lo que quiere decir que a nivel de preparatoria (estudiantes entre 15 y 17 años) se presenta deficiencias en cuanto al pensamiento proporcional, pues exige el desarrollo de operaciones formales. Por ello, presentamos una investigación cualitativa donde queremos confirmar si los fenómenos de centración y equiprobabilidad se manifiestan en un grupo de estudiantes de tercer grado de una escuela pública secundaria, ubicada en el Distrito Federal de México, en el 2004 al resolver problemas de probabilidad basados en el razonamiento proporcional.

Con base en el análisis de resultados del informe Green, además de las conclusiones obtenidas por el cuestionario aplicado en años anteriores a estudiantes mexicanos, se presentan los siguientes supuestos:

- Los estudiantes al resolver problemas relacionados con el pensamiento proporcional no toman en cuenta el espacio muestral.
- Los estudiantes presentan deficiencias en el manejo aritmético de relaciones de orden de números racionales.
- Los estudiantes se centran en aspectos del dibujo de la situación, en problemas de probabilidad basados en el razonamiento proporcional Para la recolección de datos se aplicó un cuestionario con 13 problemas. De los 25 estudiantes a los que se le aplicó el cuestionario 13 son hombres y 12 son mujeres, el promedio de la edad de las mujeres es de 14.42 años y el de los hombres es de 15,31 años. Además, 15 estudiantes dicen tener conocimientos básicos en probabilidad, cuya edad promedio es de 15,13 años. Cuatro

estudiantes afirman no tener conocimientos previos, y su edad promedio es de 15 años, no obstante, todos han recibido formación básica de probabilidad y razonamiento proporcional como parte del currículum escolar.

Método

El cuestionario que se aplicó consta de 13 problemas de probabilidad que involucran pensamiento proporcional. Las preguntas (problemas) del cuestionario se dividieron en 4 bloques: El bloque 1 lo conforman las preguntas de la 1 a la 4 que son de selección única. El bloque 2 está compuesto por las preguntas de la 7 a la 10 en las que se pide argumentación de sus respuestas. El tercer bloque contempla las preguntas 5, 6, 11 y 13 que son de juegos y finalmente la pregunta doce pertenece al bloque 4.

Durante la aplicación del cuestionario, se les pidió a los estudiantes que realizaran todas las anotaciones posibles en el documento, con el fin de acceder a las expresiones de sus estrategias o de técnicas de solución implementadas en cada problema. Los estudiantes contaban con un tiempo aproximado de 40 minutos para resolver la prueba, pero durante la aplicación del cuestionario la mayoría requirieron menos tiempo.

Para analizar las repuestas brindadas por los estudiantes se tomó en cuenta el modelo brindado por Biggs y Collis (1982), *SOLO Taxonómico* (Estructura de los Resultados de Aprendizaje Observados) que consiste en cinco niveles presentes en el ciclo de aprendizaje de una persona dentro de cada uno de los estadios o modos de Piaget. Estos niveles son: Preestructural, Uniestructural, Multiestructural, Relacional y Abstracto Extendido. Estos autores mencionan que el nivel Abstracto Extendido se presenta en la etapa final de cada estadio del ser humano y que el alcance satisfactorio del mismo hace que el individuo de manera simultánea forme parte de nivel Preestructural del nuevo estadio. Brindan principal importancia a los tres niveles intermedios (Uniestructural, Multiestructural y Relacional) que los clasifican dentro de la etapa destino en el desarrollo de cada estadio.

Al ser la población en estudio jóvenes de secundaria entre 14 y 15 años de edad, según Piaget, éstos estudiantes pertenecen al estadio Formal, aunque menciona que el alcance de este estadio variará con respecto a la formación de cada individuo.

La importancia de este modelo es que puede ser utilizado para evaluar la calidad del aprendizaje o un conjunto de objetivos del currículum. De esta forma, se adapta el modelo SOLO con las características particulares de cada nivel, con el fin de clasificar las respuestas brindadas por los estudiantes.

Nivel	Características
Preestructural	<ul style="list-style-type: none"> - Predomina la noción de probabilidad subjetiva. - Los análisis se basan en la experiencia. - Se consideran los eventos equiprobables
Uniestructural	<ul style="list-style-type: none"> - Fijan su análisis en un rasgo particular de los objetos del experimento.
Multiestructural	<ul style="list-style-type: none"> - Toman en cuenta todos los elementos o datos presentes en el problema, pero no son capaces de establecer relaciones entre estos. - Predicen las probabilidades en forma intuitiva de los eventos, pero no logran asignar un valor numérico a esta probabilidad.
Relacional	<ul style="list-style-type: none"> - Son capaces de calcular la probabilidad de los eventos - Pueden comparar probabilidades estableciendo relaciones de orden
Extensión a los Abstracto	<ul style="list-style-type: none"> - Toman en cuenta la variación y la incertidumbre.

Tabla 1. Marco conceptual

Resultados y Análisis

Todos los bloques de preguntas formulados en el cuestionario utilizado en esta investigación poseen una dependencia entre sí, que le permite al investigador proveerse de una información detallada, variada y completa que sustenten los resultados obtenidos. Sin embargo, seguidamente se exponen los resultados de tres preguntas que han sido consideradas como las más representativas e ilustrativas para el lector.

Las preguntas que conforman el bloque 3 incorporan algunos elementos que son familiares para los estudiantes producto de su experiencia de vida como la edad, la inteligencia y el sexo, con el fin de determinar si ellos consideran que estas variables influyen directamente en los resultados probabilísticos de fenómenos aleatorios.

En la pregunta 5, el 16% de la población en estudio mencionó que la edad es un factor fundamental para ganar un juego, de esta manera se muestra que los estudiantes centran su atención en una característica particular del individuo, dejándose influenciar por experiencias adquiridas en la niñez, como por ejemplo cuando juegan con sus hermanos o amigos mayores, pero no perciben que por lo regular los juegos en que ganan los mayores, son aquellos que requieren de una destreza física y no de un fenómeno aleatorio que depende del azar, pero no solo estos estudiantes poseen una concepción errónea, sino que de los 20 estudiantes que contestaron correctamente, tres de ellos proporcionan argumentos inadecuados tales como: “es suerte”, “no van a ver si sacan una blanca o negra” y “por ser más grande tiene mejor pensamiento”, lo que suma un 28% de respuestas incorrectas.

La pregunta 6 representa una situación que frecuentemente la utilizamos para hacer algún tipo de sorteo. En esta pregunta se pretende determinar si los alumnos están contemplando el espacio muestral, centran su atención en el sexo y si además el hecho de que se anoten los nombres de los estudiantes en papeles, se mezclen en un sombrero y el que haya sido el profesor quien realiza la actividad, representan situaciones que de alguna manera el estudiante piense que pueden afectar directa o indirectamente la probabilidad.

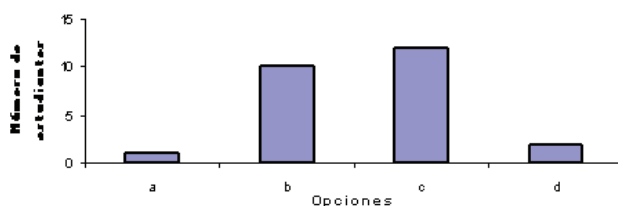
Pregunta 6

Una clase tiene 29 estudiantes de los cuales 13 son chicos y 16 son chicas. Se escribe el nombre de cada estudiante en un trozo de papel. Se colocan los papeles en un sombrero. El profesor toma uno de los papeles sin ver.

Si el profesor pregunta a qué sexo corresponde el nombre del papel, ¿cuál de las siguientes opciones responderías?

- Es más probable que se trate de un CHICO que de una chica
- Es más probable que se trate de una CHICA que de un chico
- Es igual de probable que se trate de una chica que de un chico
- No lo sé

Gráfico 1.
Respuestas pregunta 6



Fuente: Cuestionario aplicado a estudiantes

Interpretación

Se puede notar que 12 estudiantes contestaron incorrectamente al considerar que los eventos son equiprobables, por consiguiente, no contemplaron el espacio muestral. Un estudiante centró su análisis en el sexo al considerar que era más probable que se trate de un chico.

La pregunta 7 posee una intención particular que sugiere al estudiante contemplar el espacio muestral al hacer su análisis. Se puede observar que el número de bolas negras y blancas ha sido modificado entre la caja T y la caja P, pero, sin que esta variación altere la probabilidad de extraer una bola negra de la caja T con respecto a la caja P.

Pregunta 7

Dos cajas contienen bolas negras y blancas de la siguiente manera:

La caja T: 2 negras y 2 blancas

La caja P: 4 negras y 4 blancas

¿Cuál de estas dos cajas (T o P) ofrece mayor posibilidad de extraer una bola NEGRA?

- La caja T
- La caja P
- La misma posibilidad
- No lo sé

¿Por qué? _____

Opción correcta: La opción c



Fuente: Cuestionario aplicado a estudiantes

Interpretación

Se puede apreciar que dos estudiantes consideraron que la caja donde existe mayor probabilidad de extraer una bola negra es la caja T. Ambos estudiantes argumentaron su elección en el hecho de que hay menos bolas blancas en esta caja, esto permite concluir que su análisis está centrado en las bolas blancas.

Los 5 estudiantes que optaron por la opción b, mostraron un problema de centración en las bolas negras, al fundamentar su decisión en la tesis de que en la caja P hay más bolas negras que en la caja T.

Podría alentarnos la idea de pensar que 18 estudiantes contestaron correctamente, sin embargo, antes de hacer nuestras propias conclusiones, tomemos en cuenta las afirmaciones hechas por tres estudiantes:

- Est 01: En las dos tenemos negras
- Est 06: Por que no vas a estar viendo, puedes sacar una bola blanca o una negra
- Est 08: Por que es la misma, puede ser tanto negra como blanca

Aunque los estudiantes hicieron una buena elección estos tres argumentos muestran que el análisis no es correcto y constituyen la evidencia de que aún persiste en ellos el problema de considerar el evento de extraer una bola negra como un evento equiprobable, que aunque en este caso se cumpla, en sus análisis nunca estuvo presente el considerar el espacio muestral. En las preguntas sobre cajas que se exponen en el cuestionario aplicado, se mantiene un

patrón similar donde el número de bolas negras y blancas utilizadas es un número pequeño. La pregunta 9 en particular, aunque no hace uso de cantidades exorbitantes, si utiliza una cantidad que compromete a los estudiantes a buscar una estrategia diferente. Además, se decidió omitir la elaboración de una representación gráfica de las cajas y, con el fin de evidenciar el problema de centración y equiprobabilidad que los estudiantes han venido presentando, intencionalmente se plantea el problema de manera que la caja F a pesar de tener más bolas negras que la caja J, la probabilidad de extraer una bola negra es mayor en esta última.

Pregunta 9

Otras dos cajas también contienen bolas negras y blancas

La caja J: 12 negras y 4 blancas

La caja F: 20 negras y 10 blancas

¿Cuál de estas dos cajas (J o F) ofrece mayor posibilidad de extraer una bola NEGRA?

- La caja J
- La caja F
- La misma posibilidad
- No lo sé

¿Por qué? _____

Opción correcta: La opción a



Fuente: Cuestionario aplicado a estudiantes

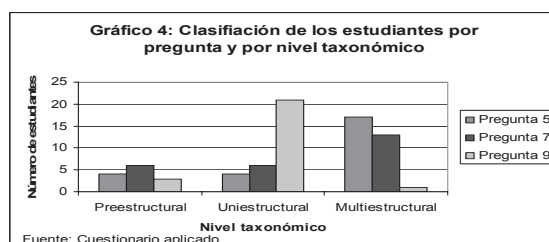
Interpretación

Este ítem muestra un problema fuerte de centración en el rasgo que se pregunta, en este caso las bolas negras. El 64% de los estudiantes (16) están convencidos de que existe mayor posibilidad de extraer una bola negra de la caja F, sustentados en la idea de que esta caja posee más bolas negras que la caja J. De los 6 estudiantes que hicieron la selección correcta, ninguno dio un buen argumento que justificara adecuadamente la solución propuesta al problema, más bien, centraron su análisis en las bolas blancas al considerar la caja J como la caja que menos bolas blancas. Finalmente los restantes 3 estudiantes prefirieron considerar equiprobable el evento de extraer una bola negra. Un dato importante de rescatar es que ninguno de los estudiantes intentó hacer una representación gráfica de las cajas y en ninguna de las 13 preguntas que se planteó en el cuestionario se establecieron las razones de probabilidad correspondientes para hacer las comparaciones pertinentes.

Discusión

Los datos expuestos en la sección anterior, proporcionan un panorama de las deficiencias que los estudiantes de secundaria de este nivel, poseen al tratar de resolver problemas sobre probabilidad que involucren pensamiento proporcional. La siguiente tabla muestra la clasificación de los estudiantes dentro de los diferentes modos propuestos en el modelo Taxonómico SOLO, considerando las destrezas mostradas por los estudiantes en la investigación de acuerdo con la tabla 1:

Tabla 2. Clasificación de los estudiantes por pregunta



Interpretación

Se puede apreciar que los estudiantes demostraron no ser capaces de plantear las razones de probabilidad, por lo tanto se estancaron abajo del modo multiestructural. Los mejores estudiantes apenas son capaces de contemplar todos los rasgos particulares de los objetos en estudio dentro de sus análisis y sus conclusiones son asertivas pero sin realizar ningún cálculo. Una cantidad significativa de estudiantes se encuentran apenas en la etapa preestructural y uniestructural, por ejemplo el resultado de la pregunta 9 constituye un importante insumo. La tendencia de los estudiantes a obviar el espacio muestral, centrar sus análisis en un rasgo particular del objeto en estudio o su exceso de confianza en la experiencia, constituyen concepciones erróneas muy marcadas y que se deben erradicar, más desalentadora es esta noticia cuando sabemos que muchos de los estudiantes ya han llevado algún curso sobre probabilidad. Otro elemento importante de resaltar es que en las preguntas que no aparecía una representación gráfica de la situación, los estudiantes no intentaron elaborarlo por su cuenta propia.

Los resultados de esta investigación ofrecen un punto de partida y un reto para los docentes que enseñen probabilidad en la secundaria. Las propuestas didácticas para enseñar probabilidad deben estar orientadas a corregir las concepciones erróneas como la centración, la equiprobabilidad y las creencias basadas en la experiencia, a través de situaciones cotidianas que los encamine hacia desarrollo de competencias no académicas y nuevas formas de razonamiento más científicas y precisas que les permita tomar decisiones asertivas.

Referencias bibliográficas

- Biggs, J. y Collis, K. (1991). Multimodal learning and the quality of intelligent behavior. En H. A. H. Rowe (ed). *Intelligence: Reconceptualization and Measurement* (pp. 57-76). Hillsdale, NJ. USA: Lawrence Erlbaum Associates.
- Cañizares, M. (1997). Influencia del Razonamiento Proporcional y Combinatorio y de Creencias Subjetivas en las Intuiciones Probabilísticas Primarias. Disertación doctorar no publicada, Universidad de Granada, España.
- Garfiel, J; Ahlgren, A. (1988). Difficulties in Learning Basic Concepts in Probability and Statistic: Implications for Research. *Journal for Research in Mathematics Eduacation*. Vol 19, No 1.
- Green, D.R. (1988). Children's understanding of randomness: report of a survey of 1600 children age 7-11 years. En R. Davidson & J. Swift (Eds.), *The proceedings of the second international conference of teaching statistics*. Victoria, B.C: University of Victoria.
- Shaughnessy, J.M. (1992). Research in probability and statistics: Reflections and directions. En Grows D.A (Ed.), *Handbook of research on matemathics teaching and learning*, New York: Macmillan Publishing Company, 465-494.
- Agradecemos al Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional de México (CINVESTAV) donde se llevó a cabo la investigación y por el apoyo económico. Además, a la Secretaría de Relaciones Exteriores y al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología de Costa Rica por su apoyo económico (CONICIT).