

TRATAMIENTO DIDÁCTICO DE LAS FUNCIONES REALES DE UNA VARIABLE: PROCESO DE MODELACIÓN

Elsa Caridad Ramírez García
Universidad Central “Marta Abreu” de Las Villas. (Cuba)

elsar@uclv.edu.cu

Campo de investigación: modelación matemática. Nivel educativo: superior

Palabras clave: modelación matemática, funciones, concepto de función

Resumen

En la vida práctica, las personas que hacen uso de la matemática estudian diferentes relaciones o correspondencias; físicos, químicos, biólogos, economistas, ingenieros, analizan las relaciones entre los elementos en sus campos y tratan de describir y predecir el comportamiento de diferentes fenómenos a partir de dichas relaciones, por tanto el concepto de función es objeto de estudio tanto de la enseñanza general como de la superior. A pesar de que este contenido ya ha sido tratado en la enseñanza precedente, al llegar los estudiantes a la educación superior, presentan algunas dificultades en las acciones que deben poder realizar para llegar a saber este concepto matemático.

En este trabajo se exponen algunas ideas sobre las etapas en el proceso que conduce a la asimilación del concepto de función y se muestran diferentes ejemplos, en los que la modelación matemática de situaciones reales, permite consolidar la asimilación o fijación del concepto, mediante su sistematización en diferentes temas de la disciplina o en su relación con otras disciplinas.

Introducción

Uno de los conceptos más importantes para la matemática es el concepto de función, debido a su naturaleza unificante y modelarizadora. En él subyace uno de los modelos matemáticos más elementales y ampliamente utilizados en la vida práctica, por lo que es objeto de estudio, tanto del nivel medio como de la enseñanza superior. Además, el aprendizaje de este concepto es imprescindible para la comprensión de otros conceptos como; límite, continuidad, derivadas e integrales.

“A través de las funciones podemos modelar matemáticamente un fenómeno de la vida real, describir y analizar relaciones de hechos sin necesidad de hacer a cada momento una descripción verbal o un cálculo complicado de cada uno de los sucesos que estamos describiendo” (Hitt, 2000)..

Cada día cobran mayor fuerza, las estrategias que se utilizan para aprender matemáticas a partir de situaciones y fenómenos del mundo físico. Éstas incluyen interpretar la realidad a partir de la identificación de las variables participantes, la recolección de datos que se generan en situaciones reales o simuladas y modelación de situaciones.

La línea directriz correspondencia, transformación, función

En los programas para la enseñanza de la matemática se identifican algunos lineamientos que penetran todo el curso e incluso se siguen desarrollando de un nivel a otro, son las denominadas líneas directrices en la enseñanza de la matemática. Una de estas líneas directrices es la de *correspondencia, transformación y función*.

Desde el nivel primario, a los estudiantes se les comienza a preparar para poder asimilar el concepto de función; se inicia en una primera etapa, con el trabajo con aspectos lógicos,

lingüísticos, símbolos y términos, pero no es hasta la secundaria básica que se inicia formalmente el estudio del concepto de función.

Es precisamente en este nivel donde se define este concepto, los estudiantes deben comprenderlo como una correspondencia unívoca entre dos conjuntos y se utiliza explícitamente el término dependencia funcional; deben dominar el concepto de función lineal, sus propiedades y representación gráfica. En noveno grado se define función cuadrática y se estudian sus propiedades y la proporcionalidad inversa. En décimo y oncenos grados se introducen las funciones potenciales, las funciones trigonométricas y las funciones exponenciales y logarítmicas; se desarrollan habilidades en la obtención de los gráficos de otras funciones a partir de los anteriores, con la aplicación de traslaciones, contracciones o dilataciones. Al tratar estos tipos de funciones se insiste en el ploteo de puntos para realizar la representación gráfica y a partir de ésta, describir las propiedades más importantes. Se insiste en el hecho de introducir la teoría mínima y se concentra el trabajo en la vinculación con otras líneas directrices, entre ellas “trabajo con variables” y “ecuaciones e inecuaciones”, que permite seguir desarrollando habilidades de cálculo numérico y con variables. (Martínez, 1998)

Fases en la enseñanza del concepto de función. Algunas dificultades

La matemática forma parte del currículum en la mayoría de las carreras universitarias, en los programas de esta disciplina o en los de otras que la incluyen, aparece el concepto de función dentro del sistema de conocimientos a estudiar, generalmente relacionado con el objeto fundamental de estudio de esta disciplina, por ejemplo, en la carrera de Licenciatura en Ciencias Farmacéuticas, el objeto de estudio de la disciplina Matemática es el estudio de los modelos y procedimientos relacionados con el diseño, elaboración, estabilidad, control de la calidad y biodisponibilidad del medicamento, (Ramírez, 1996) uno de estos modelos es el de función.

A pesar de que este contenido ya ha sido tratado en la enseñanza precedente, como ya hemos analizado, al llegar los estudiantes a la educación superior, presentan algunas dificultades en las acciones que deben poder realizar para llegar a saber este concepto matemático.

Al estudiar un concepto matemático, reconocemos la necesidad de lograr un tratamiento metodológico (Ballester, 1992) que tenga en cuenta tres fases en la estructura del proceso a seguir en la elaboración de su definición:

Preparación para el concepto, se caracteriza por las consideraciones y ejercicios preparatorios, lo cual generalmente se hace antes de la introducción del concepto.

Formación del concepto, consiste en la parte del proceso donde se conduce desde la creación del nivel de partida, la motivación y la orientación hacia el objetivo, que pasa por la separación de las características comunes y no comunes, hasta llegar a la definición o a la explicación del concepto.

Asimilación del concepto, termina con la fijación del concepto; el alumno asimila el contenido del concepto a través de acciones mentales y prácticas dirigidas hacia este objetivo.

La tercera fase, que denomina de asimilación o fijación del concepto, en realidad tiene un alcance mayor, pues también es de aplicación del concepto y sistematización.

Si se quiere estudiar un concepto en matemática, no basta con el conocimiento de su definición, es muy importante esta tercera fase. Por otra parte, de acuerdo a la complejidad del

concepto que se trabaja, es imprescindible el estudio de las operaciones lógicas de clasificación, de generalización y restricción.

Al asimilar el concepto, el alumno tiene que realizar las siguientes acciones:

- *Identificar el concepto.*
- *Realizar o construir el concepto.*
- *Aplicar el concepto.*

Por la identificación del concepto se entiende el determinar si un objeto dado pertenece o no a la extensión del concepto, para ello el alumno debe realizar ejercicios con diferente grado de complejidad y ser capaz de decidir si el objeto posee las características esenciales expresadas en la definición (Jungk, 1989).

Además, en la educación superior, por las características de las extensiones de los conceptos, se considera la acción inclusión en el concepto, que consiste en analizar si el objeto cumple con las condiciones suficientes o incumple las condiciones necesarias para estar en la extensión del concepto.

Para la realización se deben crear objetos que satisfagan las características dadas por el concepto. En este caso las tareas a realizar por el estudiante deben llevarlo a utilizar las características del concepto para construir representantes del mismo.

La aplicación del concepto se realiza siempre en relación con otras situaciones de la enseñanza, no necesariamente en relación con su elaboración. La fijación contempla, ante todo, las aplicaciones y el ordenamiento del concepto en un sistema de conceptos. Esta es una acción fundamental para el trabajo con los conceptos en la educación superior y es la acción fundamental, que a nuestro criterio, da la posibilidad no sólo de apropiarse del concepto, sino que también es un instrumento para desarrollar aprendizajes significativos.

Estas tres acciones se llevan a cabo desde la enseñanza media, pero de forma intuitiva; es en la enseñanza superior donde se presentan situaciones nuevas para el estudiante, dadas por la necesidad de modelar situaciones reales, que lleven a la construcción de funciones definidas por una o varias expresiones, que evidentemente requieren un mayor dominio en la asimilación del concepto objeto de estudio.

La modelación como aplicación del concepto de función

En el trabajo didáctico para la asimilación del concepto de función, nos proponemos utilizar la modelación de funciones reales de una variable, a través de situaciones que utilicen:

- El propio concepto de función.
- Otro modelo matemático, cuya solución se describe mediante una función.

En ambos casos se debe tener en cuenta un análisis amplio de las herramientas de trabajo que ofrece la matemática, los diferentes tipos de problemas que pueden ser planteados y las vías que pueden ser usadas, aunque las estrategias de solución sean diferentes. En el primer caso pueden analizarse dos tareas fundamentales:

1. Establecer relaciones fundamentales entre magnitudes, como resultado se debe obtener la expresión analítica de una función (obtener el modelo a aplicar, o sencillamente, aplicar un modelo ya conocido). Los tres primeros ejemplos permiten obtener una función lineal que describe, en cada caso, una situación de este tipo.

2. Analizar las propiedades de la función obtenida para describir o explicar el comportamiento del fenómeno o experimento en sí (describir el comportamiento del modelo para otros valores de la variable independiente considerada).

En el segundo caso, se parte de un modelo que involucra indirectamente el concepto de función, que describe un determinado proceso o fenómeno objeto de estudio y a partir de su solución, se obtiene una función que brinda información sobre el proceso. En este caso, las tareas a considerar, pueden ser las siguientes: obtener el modelo o aplicar un modelo conocido, solucionar el modelo y describir el comportamiento del modelo a partir de la interpretación del resultado obtenido en el paso anterior (en los ejemplos 4, 5 y 6 se relacionan los conceptos de integral, derivada y ecuación diferencial, con el concepto de función).

Ejemplos

1. Un paciente con cáncer recibirá terapias mediante fármacos y radiación. Cada cm^3 de medicamento que se usará contiene 200 unidades curativas, y cada minuto de exposición a la radiación proporciona 300 unidades curativas. El paciente requiere 2400 unidades curativas. Si d cm^3 de la droga y r minutos de radiación son suministrados. Determine la función lineal que exprese la cantidad de medicamento d en función del tiempo r de radiación y calcule la cantidad de medicamento a suministrar para una radiación de 1,5 minutos.

En este caso el modelo se obtiene directamente y se corresponde con la función lineal:

$$d = 12 - \frac{3}{2} r$$

2. En un estudio de laboratorio, realizado en el Centro de Bioactivos Químicos de la UCLV, a un nuevo producto que fue denominado G-1, se le aplicó un procedimiento de valoración potenciométrica, empleándose la ley de la volumetría, con vistas a comprobar que la técnica que se propone cumpla el requisito de validación de la linealidad y donde:

$$\% \text{pureza} = \frac{m_b}{m_n} \cdot 100 \quad \text{y} \quad m_b = V_g F T$$

donde: V_g representa, los ml consumidos del agente valorante, F el factor de corrección de la disolución del agente valorante, T Titro de la disolución del valorante en relación con el G-1 y m_m la masa de muestra del G-1. F , T y m_m son constantes, por lo que la expresión para determinar el % de pureza es:

$$\% \text{pureza} = \frac{V_g F T}{m_n} \cdot 100$$

3. En un experimento con ratones se comprobó que cuando la temperatura T (en grados Celcius) de un ratón es reducida, la frecuencia cardiaca (en latidos por minuto) disminuye. Bajo condiciones de laboratorio, un ratón a una temperatura de 37°C tuvo una frecuencia cardiaca de 220 y a una temperatura de 32°C su frecuencia cardiaca fue de 150. Si r está relacionado linealmente con T y T está entre 26° y 38° .

a) Determine una ecuación para r en términos de T .

b) Determine la frecuencia cardiaca para una temperatura de 28°C .

4. Un área bajo la curva de nivel plasmático es un parámetro cinético de utilidad, pues es un criterio para determinar la biodisponibilidad de un medicamento (es la fracción o porcentaje

de dosis aprovechada eficazmente en la forma de administración utilizada), y se define mediante $\int_0^{\infty} C(t) dt$. En la siguiente tabla se dan valores de la concentración de un cierto medicamento (mg/l) en diferentes intervalos de tiempo (horas) a un paciente.

t	0	1	2	3	4	5	6
C	0	5,03	7,70	7,80	6,98	6.91	4,97

Determine aproximadamente la curva de nivel plasmático y la biodisponibilidad alcanzada en este caso, para $0 \leq t \leq 6$.

5. Suponga que el pulso de un individuo (en latidos por minuto) a los t segundos de haber comenzado a correr, está dado por: $P(t) = 56 + 2t^2 - t$ para $0 \leq t \leq 7$. Calcule la razón de cambio de $P(t)$ con respecto a t para $t = 2$.

6. En tránsito del medicamento a través del organismo puede presentar cinco fases principales: liberación, absorción, distribución, metabolismo y excreción. De acuerdo a la forma de administración de éste y algunas características que determinan su influencia en el organismo, estas fases pueden o no presentarse. Para llegar a modelos que describen estos procesos se hacen simplificaciones sobre la base de análisis compartimentales, en los cuales se agrupan, por afinidad farmacocinética, las diferentes zonas anatomo - fisiológicas del organismo, a los que accede y de los que sale determinada concentración o cantidad de fármaco por unidad de tiempo. Uno de estos modelos es el que siguen los procesos activos como: la excreción tubular activa y la excreción biliar. La ecuación que representa este proceso es:

$$\frac{dC}{dt} = \frac{V_m C}{k_m + C} \quad (1)$$

donde C es la concentración en cualquier instante, V_m es la velocidad máxima del proceso (mg/h o mg/l.h) y k_m es la cantidad de fármaco por la cual la velocidad del proceso es la mitad de la velocidad máxima ($V_m/2$).

Al resolver la ecuación diferencial (1), se obtiene:

$$t = \frac{1}{V_m} (C_o - C + k_m \ln \frac{C_o}{C})$$

considerando que C_o es la concentración inicial para $t = 0$.

Conclusiones

1. En el objeto fundamental de estudio de la matemática para las carreras universitarias interviene, de una forma u otra, la modelación matemática mediante el concepto de función, por lo que se hace necesario profundizar en el tratamiento metodológico de este tema.
2. En la asimilación del concepto de función es necesario que los estudiantes sean capaces de aplicar éste en la modelación de problemas relacionados con la profesión, teniendo en cuenta sus múltiples relaciones con otros conceptos matemáticos planteados en los programas de matemática y utilizados en la solución de problemas básicos fundamentales de la carrera.
3. La estructura del trabajo didáctico en el tratamiento del concepto de función, sugerido en este trabajo, puede servir de guía para lograr la interrelación entre los diferentes temas de la

disciplina Matemática y de ésta con otras disciplinas y como punto de partida para el diseño de tareas más complejas, que permitan valorar su efectividad en la formación matemática del egresado de la educación superior.

Referencias bibliográficas.

- Ander, E. E. (1994). *Interdisciplinariedad en Educación*. Buenos Aires. Argentina: Magisterio del Río de la Plata.
- Ballester, S. (1992). *Metodología de la enseñanza de la Matemática*. Tomo I. Guantánamo, Cuba. Editorial Pueblo y Educación.
- Hing R. (1995). *Programa Director de la Matemática*. Evento Internacional Pedagogía'95. La Habana. Cuba.
- Hitt F. (2000). *Funciones en Contexto. Proyecto sobre Visualización Matemática*. Departamento de Matemática Educativa. México.
- Jungk, W. (1989). *Conferencias sobre Metodología de la enseñanza de la Matemática 2*. Primera Parte. La Habana: Editorial Pueblo y Educación.
- Martínez, D. (1998). *Estudio del concepto de función real en la formación de profesores*. Tesis de maestría sin publicar, UCLV.
- Ramírez G. E. (2002). *Diseño de una estrategia didáctica para la integración de la matemática en la carrera de Licenciatura en Ciencias Farmacéuticas*. Tesis de doctorado sin publicar. Santa Clara. Cuba.
- Sánchez, C. (1982). *Análisis Matemático I*. La Habana: Editorial Pueblo y Educación.
- Santos, N. (1998). Estrategias para la modelación matemática en las carreras de ingeniería en Cuba. *Actas Pedagógicas. Revista del Centro de Estudios de Didáctica y Pedagogía*. Año 2, Septiembre de 1998. Corunversitaria de Ibagué. Colombia.