

## ¿CÓMO EN EL EJERCICIO DE LA PRÁCTICA DE MODELACIÓN DE UN SISTEMA DE RESORTES SE CONSTRUYEN MODELOS MULTILINEALES?

Maria Esther Magali Mendez Guevara, Jaime L. Arrieta Vera  
FM, Unidad Académica Acapulco, Universidad Autónoma de Guerrero (México)

[mguevara83@hotmail.com](mailto:mguevara83@hotmail.com), [jaime.arrieta@gmail.com](mailto:jaime.arrieta@gmail.com)

Campo de investigación: socioepistemología. Nivel educativo: medio, superior

Palabras clave: Práctica social, modelación lineal, modelos

### Resumen

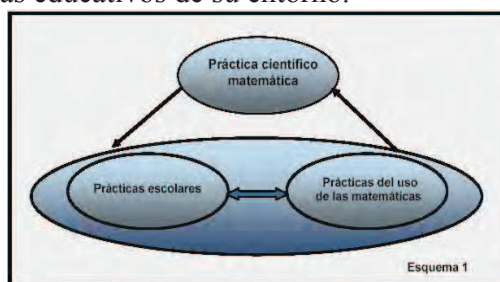
Este artículo se desprende de una investigación realizada por Mendez (2006), la cual se desarrolló bajo una visión socioepistemológica y se inscribe en la línea de investigación llamada las prácticas sociales en la emergencia del conocimiento matemático.

El objetivo de la investigación fue aportar evidencias sobre cómo los estudiantes del nivel medio superior, construyen lo multilineal en el ejercicio de la modelación de un sistema de resortes. La tesis central que se planteó es que lo multilineal se devela en la complejidad de lo lineal. Para concretar nuestro objetivo y validar nuestra tesis, elaboramos un diseño de aprendizaje, basado en la práctica social de modelación, el diseño se exploró a papel y lápiz, y en un contexto virtual, auxiliándonos de un simulador del fenómeno.

### Problemática

La investigación que se desarrolló en Mendez (2006), tuvo como antecedentes los trabajos de Arrieta 2003; Galicia, 2004; Hernández, 2005, investigaciones que se han desarrollado en la línea de investigación a la cual se adhiere ésta, llamada, las prácticas sociales en la emergencia del conocimiento matemático, la cual en forma sucinta intenta dar explicación de cómo en el ejercicio de las prácticas sociales los actores construyen sus conocimientos como herramientas para intervenir en las diferentes comunidades donde participan.

La investigación atiende a la problemática surgida de la *separación de las prácticas en los sistemas escolares y las de su entorno social*, es decir, la problemática que emerge de la separación de los sistemas educativos de su entorno.



Este esquema trata de mostrar la ubicación de nuestra problemática, de modo tal que nos interesa las formas de conectar estas dos esferas, las prácticas escolares y las prácticas del uso de las matemáticas.

Así, nuestra pregunta de investigación giró en torno a la práctica social de modelación, particularmente, la modelación multilineal de la elasticidad de sistemas de resortes. La investigación aportó evidencias sobre cómo los estudiantes del nivel medio superior construyen lo multilineal en el ejercicio de la modelación de un sistema de resortes. Para concretar nuestro objetivo acudimos a un diseño de aprendizaje basado en las prácticas de modelación. La investigación *aportó evidencias sobre cómo los estudiantes del nivel medio superior construyen lo multilineal en el ejercicio de la modelación de un sistema de resortes*. La tesis de la investigación plantea que *en el ejercicio de las prácticas de modelación de la*

*elasticidad de un sistema de resortes se construye lo multilíneal. Tomando como tesis central que lo multilíneal se devela en la complejidad de lo lineal.*

### **La perspectiva teórica de la investigación**

La investigación se enmarca en la socioepistemología, perspectiva teórica que concibe al sistema escolar como sistema complejo inmerso en su entorno social. La socioepistemología es una perspectiva multidimensional, que hace énfasis en la naturaleza social del conocimiento, con la cual podemos analizar cómo los actores sociales construyen, en contextos sociales concretos, sus conocimientos, sus realidades y por ende su identidad (Arrieta, 2003). Este énfasis en lo social, trastoca el sentido tradicional otorgado a las dimensiones cognitiva, didáctica y epistemológica, dando una visión situada del aprendizaje, los conocimientos y la didáctica. Entendemos que una práctica social es una actividad humana recurrente que caracteriza a las comunidades y a sus integrantes.

Aunque existen diversas concepciones de modelo y la modelación, por ejemplo: el modelo como una representación matemática y por ende la modelación como un proceso representacionista (Mochón, 1997) o bien la modelación como una forma de actividad necesaria para la *reconstrucción* de significados matemáticos (Cordero y Suarez, 2005). Desde nuestra postura, la modelación es una práctica social que al ser ejercida por los estudiantes los conduce a construir modelos matemáticos como herramientas para predecir. Estos modelos son utilizados para determinar el comportamiento del fenómeno estudiado. De esta forma un modelo gráfico no es la representación de un fenómeno, sino una herramienta para, por ejemplo, predecir comportamientos.

### **La metodología**

La metodología de la investigación cumplió con cuatro etapas.

*Un análisis preliminar*, que tiene que ver con el contenido matemático en juego, la práctica social que será el eje de nuestros diseños de aprendizaje, mismo que se elabora en esta etapa, y los papeles que tomarán los participantes durante la realización del diseño.

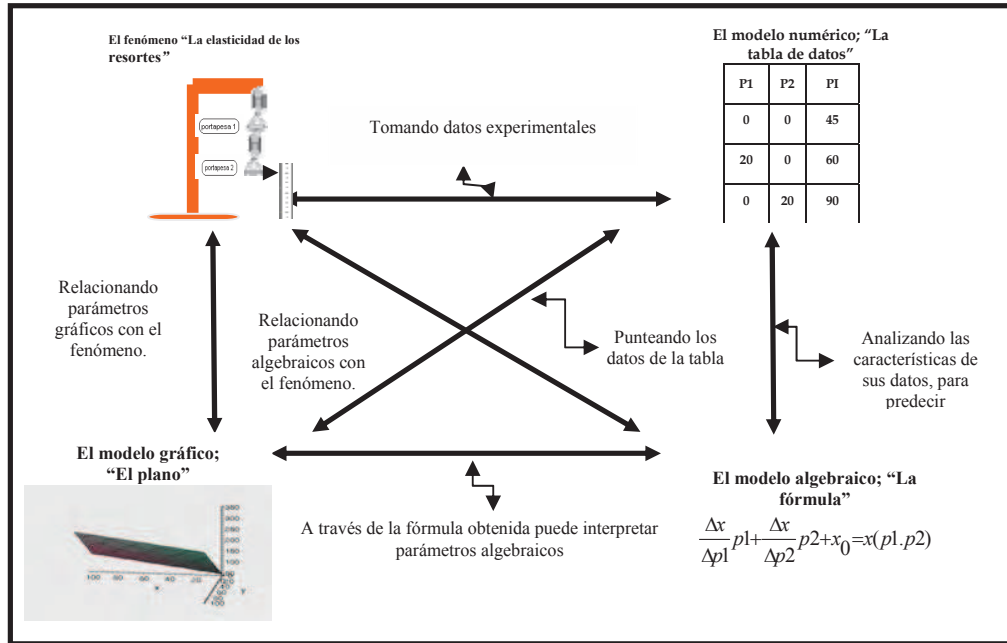
*Un análisis a priori*, este se realiza alrededor del diseño específicamente, se predice todo lo que podría ocurrir al ejercer la práctica durante el transcurso del diseño, se determinan las variables que intervienen en él, en general las hipótesis de éste, se realiza también la exploración del diseño y se recopila la información de los acontecimientos, esto posibilita la validación interna del diseño.

*Un análisis a posteriori*, en este análisis se hace una confrontación entre los resultados de la exploración y las hipótesis del diseño, el análisis *a priori*, si la diferencia es prácticamente nula, podemos decir que nuestro diseño es estable.

### **A qué llamamos lo multilíneal**

Desde nuestra visión consideramos lo multilíneal, como una red de modelos creados durante el ejercicio de la práctica social de modelación, esta red es construida de manera explícita o implícita por los estudiantes durante el ejercicio de la práctica social de modelación, a través del diseño de aprendizaje, cuando se modela para predecir la elasticidad de un sistema de resortes.

Lo multilíneal es construido por los estudiantes al ejercer la práctica de modelación, como herramienta para modelar el comportamiento de un sistema de resortes, estas herramientas son: los modelos numéricos, algebraicos y gráficos.



Lo multilíneal como una red de modelos y prácticas.

### Descripción del diseño y el escenario de la puesta en escena

Hemos elaborado diseños de aprendizaje basados en la modelación, con los cuales se pretende propiciar un ambiente de experimentación y predicción, para que se ejerza la modelación. Hemos elaborado un diseño de aprendizaje donde los estudiantes ejercen esta práctica, para modelar el comportamiento de un sistema de resortes. Este diseño tiene variantes, las cuales se describieron en Arrieta y Mendez (2005), a las que llamamos, lo multilíneal sin ruido, lo multilíneal con ruido y lo multilíneal en un ambiente virtual o bien lo multilíneal con SIREs. En general la idea del diseño y las variantes de éste, es generar un ambiente de experimentación, lo más cercana a las condiciones del fenómeno presencial, la elasticidad de un sistema de resortes. Donde se pide a los estudiantes que a partir del análisis de una tabla de datos, obtenida al colocar peso en las porta pesas, y la elongación del sistema de resortes, predigan cuanto se elongará el sistema de resortes al colocar otros pesos en los porta pesas, pesos que no están dados en su tabla y que no pueden conocer usando directamente el software, por lo que los estudiantes deben crear métodos, herramientas para predecir, surgiendo así los modelos multilíneales como herramientas de intervención. Después de algunas exploraciones del diseño y el software, se decidió hacer la puesta final con estudiantes de nivel medio superior, donde se aplicaron las tres variantes del diseño, con tres grupos distintos pertenecientes al cuarto semestre de nivel medio superior. Dos de las puestas en escena fueron antecedidas por la modelación lineal. A continuación se muestran algunos resultados de la puesta en escena realizada con estudiantes de un Colegio de Bachilleres de Acapulco.

## Resultados de la puesta en escena

Mostraremos algunas argumentaciones extraídas de los episodios de las puestas en escena, haciendo referencia a los métodos de predicción y a los modelos multilineales que ellos construyeron.

Con respecto a los métodos usados durante la modelación.

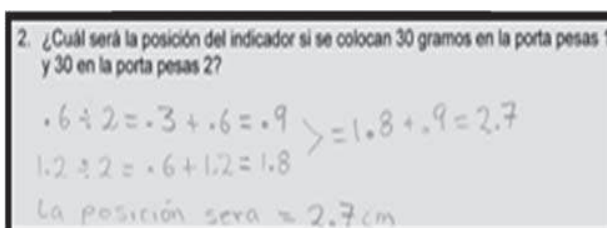
El método de bisección, se ilustra bien en el siguiente diálogo e imágenes:

... **Karen.** Bueno, como ya tenemos cuanto baja en 60 gramos y cuanto baja en 40 gramos, entonces lo que hacemos es restar 1.5 y .9, y luego dividirlo por dos, eso nos da lo que estira por cada 10 gramos, que es .3, y ya de ahí, como nos piden saber cuanto baja al colocar 50 gramos, sólo le sumamos a lo que baja en 40 gramos, lo que baja en 10 gramos, y ya.

Esta idea, tiene que ver con el hecho de que el 50 está entre 40 y 60, exactamente a la mitad, por lo que es fácil suponer que el incremento, al colocar este peso, debe estar también entre los incrementos de 40 y 60.

Otro ejemplo de cómo los estudiantes usan el método de bisección, se ilustra a través de las imágenes siguientes.

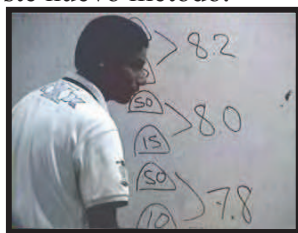
Peso (g) en la porta pesa 1	Peso (g) en la porta pesa 2	Posición del indicador (cm)
0	0	0
20	0	.6
0	20	1.2
40	0	1.8
0	40	2.4



En esta imagen podemos ver como a partir de un modelo numérico, los estudiantes comienzan a construir métodos y modelos para la predicción y la modelación del sistema de resortes.

Al igual que este método surge el método de regla de tres, y por último el incremento por gramo, estos surgen debido a la necesidad de los estudiantes de predecir con mayor exactitud, construyendo así los modelos multilineales.

Un método nuevo surgió en la modelación del sistema de resortes usando el SIRES, se trata de aproximarse por medio de acotar el resultado en intervalos. El siguiente diálogo muestra este nuevo método.



**Ricardo.** Todos sabemos que no hay pesas de 10 gramos, había de 15, 20, 50 y 60 para eso acotamos los valores, use el mismo software, entonces pusimos, en la primera 50 gramos y 20 en la segunda, y nos dio 8.2, luego en la primera se quedó igual y en la segunda pusimos 15 gramos y dio 8.0. OK entonces aquí (señala en el segunda porta pesas, ver fotografía) cambiaron en 5 gramos y disminuyo .2. Entonces hice el tercero, igual en la primera y en

la segunda suponiendo que había 10 gramos, como disminuimos 5 grs. entonces debe de disminuir otros 2 (haciendo referencia al incremento) y debe de dar un resultado de 7.8 cm.

Creemos que este método no podría surgir en ninguna otra variante, quizá sólo en un ambiente presencial, por lo que creemos necesario estudiar los ambientes de modelación virtual y como estos modifican la práctica de modelación

Con respecto a la construcción de modelos, se muestran algunos episodios referentes a esto.

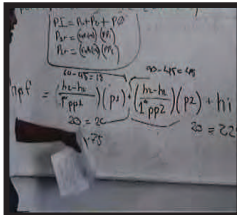
Ya comprendí la tabla y, ahora, hay que buscar una fórmula para aplicarla a cualquier tabla.

Esta es una frase que un estudiante y su equipo de trabajo dijo durante un consenso. Cuando explicaba como debería ser una “fórmula” que funcionará para cualquier tabla de datos.

**Hiran.** Ya comprendí la tabla y, ahora hay que buscar una fórmula para aplicarla a cualquier tabla.

**Hiran.** A ver, ya tenemos este valor (encierra en un círculo el resultado obtenido con su fórmula, un ejemplo particular) vamos a probar mi fórmula. Ah claro, tenemos altura de la posición final (h<sub>pf</sub>) siempre estos de acuerdo a los datos de alguna tabla para P1 y P2 (señalando su fórmula) más la altura inicial.

Sustituye valores en su fórmula como lo muestra en la fotografía, para mostrar que realmente funcionaba, aclaraba también que los datos de la tabla tendrían relación con la flexibilidad de los resortes.



$$h_{pf} = \left(\frac{h_1 - h_2}{pp1}\right)(P1) + \left(\frac{h_1 - h_2}{pp2}\right)(P2) + h_i$$

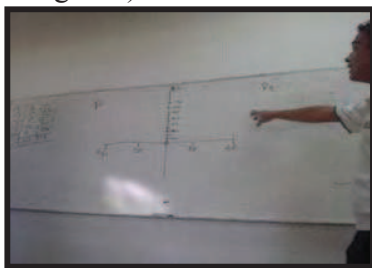
Fotografía. Muestra como Hiran da valores a su fórmula para comprobar su funcionamiento, la fórmula la mostramos también en el recuadro de la derecha.

La fórmula que se muestra en la fotografía, es una función bilineal, el modelo algebraico de este fenómeno, fue construido por los estudiantes, durante el consenso grupal, cabe mencionar que estos estudiantes habían trabajado dos días antes con la modelación lineal, donde construyeron modelos similares.

En general los tres grupos que participaron en las puestas en escena construyeron modelos algebraicos similares o bien el modelo algebraico particular. Con respecto al modelo gráfico, en esta ocasión los estudiantes tuvieron dificultades para determinar el espacio en donde deberían graficar.

Mostramos el siguiente episodio, extraído de uno de los consensos de la puesta en escena: *El plano de "HEVE" es como si lo estuvieran viendo de diferente ángulo.*

... **Edgar.** Mira, nosotros también habíamos hecho una gráfica de barras, pero, las gráficas de barras son para intervalos y para valores tipos constantes, entonces aquí, no nos sirven. Luego, la quisimos hacer en un plano cartesiano, pero tampoco se podía por que nos hacía falta un eje positivo, así que decidimos ponérselo, y nuestro plano nos quedó así (dibuja el plano), así P1 esta a la izquierda y P2 a la derecha el otro es para el indicador (ver fotografía).



**Eder.** Ah, pero si suponemos que movemos un poco los ejes para que se distingan más los puntos, ¿Cómo?...

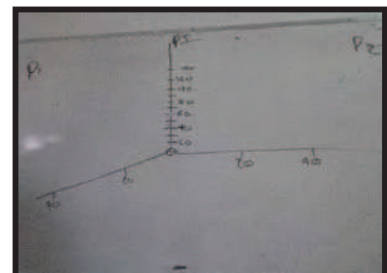
Mientras Eder trata de explicar, sus compañeros se paran frente del resto del grupo y comentan; *es cómo si lo estuvieran viendo de diferente ángulo.*

**Héctor.** Si yo fuera el eje del indicador, Edgar el eje de la P1 y Víctor el eje de la P2, y estuviéramos en línea, y dependiendo desde donde nos vieran, el ángulo, quizá a uno

no lo verían, pero si ellos dos dan dos o tres pasos o se despegan de mi, se notarían más, mas o menos así con los ejes.

Esta fotografía muestra el plano de HEVE

Aunque la mayoría de los participantes en nuestras puestas en escena pudieron percibir, que sus puntos y su fórmula no podía graficarse en un plano cartesiano pocos se atrevieron a decir cómo debería ser el "plano" en el cual se podría graficar, y resultó más difícil dibujar la gráfica, ya que no sabían como colocar los puntos en "un plano de tres ejes positivos", por lo



que este modelo no fue posible completarlo, con estos participantes.

### **Conclusiones y perspectivas**

Con respecto a la caracterización de lo multilineal, verificamos nuestra hipótesis, *lo multilineal se devela en la complejidad de lo lineal*. Es decir, se construye lo multilineal cuando se articulan dos o más modelos lineales, de otra forma, lo multilineal, es visto y trabajado como dos modelos lineales disjuntos.

Una cuestión de fundamental importancia es el proceder de los estudiantes *generalizando las características de lo lineal a lo multilineal, generalizando los argumentos, sus modelos y sus construcciones*.

Con respecto a la variante del diseño, lo multilineal con SIREs, hemos notado que la inclusión de herramientas virtuales modifica la práctica, dando origen a otro tipo de prácticas *“las prácticas de modelación virtual”*. Sin embargo se requieren de una investigación a fondo sobre estos aspectos y una preparación de los diseños acorde al contexto virtual.

Nos preguntamos: los estudiantes, después de participar en un diseño de aprendizaje como el presentado en este trabajo ¿Podrán modelar otros fenómenos con modelos multilineales? Nosotros planteamos como hipótesis que en general esto no es posible, *la transferencia de la experiencia* de la modelación de un sistema de dos resortes a la modelación de otro fenómeno no es automática, es un proceso que es necesario estudiar.

### **Referencias bibliográficas**

- Arrieta, J. (2003). *Las prácticas de modelación como proceso de matematización en el aula*. Disertación doctoral no publicada, Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav-IPN, México.
- Cantoral, R. y Ferrari, M. (2004). Un estudio socioepistemológico de la Predicción. *La matemática e la sua didattica n.2-2004*, pp.33-70.
- Cordero, F., y Suárez, L. (2005). Modelación en matemática educativa. *XVIII Acta Latinoamericana de Matemática educativa*, pp. 639-643. México.
- Galicia, A. y Arrieta, J. (2004). *La construcción de lo exponencial, a partir de las prácticas sociales de modelación*. Tesis de maestría no publicada, Universidad Autónoma de Guerrero, Facultad de Matemáticas, Unidad Académica Acapulco.
- Hernández, M.; y Arrieta, J. (2005). Las prácticas sociales de modelación y la emergencia de lo exponencial. *XVIII Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, pp. 537-542. México.
- Martínez, E.; Arrieta, J y Canul, A. (2004). Laboratorio virtual de matemáticas. *Acta latinoamericana de Matemática Educativa. Vol. 18*, pp. 785-790. Tuxtla Gutiérrez, Chiapas, México.
- Mendez, M. y Arrieta, J. (2005). Las prácticas sociales de modelación multilineal de fenómenos en el aula. *Acta latinoamericana de Matemática Educativa. Vol. 18*, pp. 575-582. Tuxtla Gutiérrez, Chiapas, México.
- Mendez, M. (2006). *Las prácticas sociales de modelación multilineal; modelando un sistema de resortes*. Tesis de Licenciatura no publicada, Autónoma de Guerrero, Facultad de Matemáticas, Unidad Acapulco. México.
- Mochón, S. (1997). Modelos Matemáticos para Todos los Niveles. *Actas de la undécima Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa*, pp. 42-45. México.