

CONSTRUCCIÓN COGNITIVA DE LA RAÍZ CUADRADA

Mauricio Gamboa Inostroza, Marcela Parraguez González y Patricia Vásquez Saldías
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso
maurigamboa@gmail.com; marcela.parraguez@ucv.cl; patricia.vasquez@ucv.cl

Chile

Resumen. Con base en la teoría APOE (Acción, Proceso, Objeto y Esquema), desarrollada por Dubinsky y sus colaboradores (Asiala et al., 1996) y considerando un estudio epistemológico de la raíz cuadrada, el cual da a la luz cuatro (4) aspectos histórico epistemológicos del objeto, antecedentes en investigaciones reportadas, estudio del currículum y textos, proponemos una Descomposición Genética (DG) de la raíz cuadrada - modelo cognitivo mediante el cual un estudiante puede construir un concepto - que permite explicitar aquellas construcciones y mecanismos mentales, que hipotéticamente un estudiante pone de manifiesto, al construir la raíz cuadrada como objeto. Para testear la viabilidad de la DG teórica propuesta, utilizamos el ciclo metodológico que viene aplicando exitosamente el grupo RUMEC en sus investigaciones, con el fin de documentar la DG respecto de las construcciones y mecanismos mentales que muestran los estudiantes al construir el objeto en cuestión.

Palabras clave: APOE, descomposición genética, raíz cuadrada

Abstract. Based on APOS theory (Action, Process, Object and Schema), developed by Dubinsky and colleagues (Asiala et al., 1996) and considering an epistemological study of the "square root" (which was to release four (4) epistemological historical aspects of the object), background investigations reported, study the curriculum and texts, we propose a genetic decomposition (GD) of the square root –cognitive model by which a student can build a concept– that allows clarifying those mental constructions and mechanisms, a student who hypothetically shows, to build the square root as object. To validate the proposed theoretical genetic decomposition, we use the cycle being used successfully methodological RUMEC group in their research, in order to document the GD regarding mental constructs and mechanisms that show the students to build the object.

Key words: APOS, genetic decomposition, square root

Introducción

Algunos antecedentes de la investigación

Esta investigación se sitúa en la construcción cognitiva del concepto matemático raíz cuadrada en estudiantes de enseñanza media (16-18 años). La problemática emerge en la experiencia docente, al identificar una serie de fenómenos en la actividad matemática de estudiantes y profesores con respecto a la raíz cuadrada, entre ellos: a) Le asignan un doble signo al calcular la raíz cuadrada de un número; b) Declaran que números no cuadrados perfectos, no tienen “raíz exacta” y en general lo expresan aproximado como un decimal y; c) Confunden la idea de raíz cuadrada, con la idea de raíz de una ecuación.

Lo anterior, además es confirmado por otras investigaciones realizadas en el ámbito de la Didáctica de la Matemática, como por ejemplo Colín (2005) en México, Bulheia y Gómez (2008) en España-Rumania y, Vidal (2009) en Chile, denotando que no equivalen a hechos locales solamente. En Vidal (2009) se expone que los textos de estudio de circulación nacional (Chile) para la enseñanza de la matemática en el nivel secundario, generan estos fenómenos al alejarse en demasía del saber sabio en el momento de la transposición didáctica. Al respecto, se tiene el caso del texto Santillana de 3° medio, en el cual se presenta de buena manera la definición de la raíz

cuadrada, pero luego se desarrolla la idea de raíz de un polinomio (Muñoz y Darrigrandi, 2011, p.17). Desde nuestro estudio epistemológico, podemos destacar que los aspectos en los que se desenvuelve la raíz cuadrada son cuatro: Geométrico, Aritmético, Algebraico y Funcional. Queda claro que en una primera instancia su nacimiento es geométrico (raíz cuadrada como un trazo). Según Vidal (2009), en el siglo V a.C. con la aparición del teorema de Pitágoras surge la necesidad de buscar tríos pitagóricos lo que induce a la idea de una operación inversa a la de elevar al cuadrado. La raíz cuadrada como operador aritmético aparece basándose en la idea de los números Euclidianos, pero no se encuentra explícitamente un proceso –inverso al de elevar al cuadrado– como en el ámbito geométrico. Se tienen antecedentes de que los babilónicos usaban tablillas que contenían multiplicaciones y operaciones inversas con números. El desarrollo algebraico y funcional es posterior, siendo este último netamente analítico hasta el siglo XIX.

Para este trabajo el foco de indagación está centrado en la construcción mental de un concepto matemático, por ende se utilizará la teoría APOE (Acción, Proceso, Objeto y Esquema) como referente teórico, que tiene como principio entender cómo se aprende la matemática, observando los fenómenos que ocurren en los alumnos que intentan construir un concepto matemático (Salgado, 2007) y en base a esto la pregunta que guía esta investigación es: *¿qué construcciones y mecanismos mentales necesitan mostrar los estudiantes para (re)construir el concepto raíz cuadrada?*

Marco teórico: La teoría APOE

La teoría APOE –Acción, Proceso, Objeto, Esquema– toma como base la epistemología genética de Piaget. Según Kú, Trigueros y Okaç (2008), esta teoría nace al estudiar el mecanismo de entendimiento de la Abstracción Reflexiva piagetiana, que se refiere a la reflexión sobre las acciones y procesos que se efectúan desde un objeto de conocimiento. Desde el punto de vista de la teoría APOE la construcción del conocimiento pasa por tres etapas básicas: acciones, procesos y objetos, las cuales no necesariamente son secuenciales. Una acción consiste en una transformación de un objeto que es percibida por el individuo como externa y se realiza como una reacción a sugerencias que proporcionan detalles de los pasos a seguir. “Las acciones son más limitadas que otras construcciones mentales, pero son el principio crucial en la construcción del conocimiento” (Dubinsky, 1996, p. 34). Cuando una acción se repite y el individuo reflexiona sobre ella, puede *interiorizarse* en un proceso, es decir se realiza una construcción interna que ejecuta la misma acción en la mente del individuo, pero ahora no necesariamente dirigida por un estímulo externo. Un individuo que tiene una concepción proceso de una transformación, puede reflexionar sobre ésta, describirla, o incluso *revertir* los pasos de la transformación sin realizar dichos pasos (Asiala et al, 1996). Cuando un individuo reflexiona sobre las operaciones aplicadas a un proceso en particular, toma conciencia del proceso como un todo, realiza aquellas

transformaciones (ya sean acciones o procesos) que pueden actuar sobre él, y puede construir de hecho esas transformaciones, entonces está pensando en este proceso como un objeto. En este caso, decimos que el proceso ha sido *encapsulado* en un objeto” (*Ibid.*). En resumen, el tránsito por las construcciones mentales desde APOE se puede ver de la siguiente manera: se dice que un individuo evidencia una concepción acción cuando solamente es capaz de realizar transformaciones a algún objeto motivado por estímulos externos y no por sí solo. Si este individuo reflexiona sobre estas acciones y las realiza conscientemente, se dice que las acciones se han *interiorizado*, por lo que muestra una concepción proceso. Dos o más procesos se pueden *coordinar* en un nuevo proceso. Cuando surge internamente la necesidad de transformar los procesos desarrollados, el individuo los *encapsula* en objetos, sobre los cuales puede volver a aplicar acciones. Los objetos se organizan en esquemas, que a su vez se relacionan con otros esquemas. El esquema, “es un nivel de mayor elaboración en la comprensión de un concepto matemático y está relacionado de manera coherente en la mente del estudiante.” (Asiala et al, 1996, p. 12). Cuando un sujeto se encuentra frente a un problema específico en el ámbito de las matemáticas, evoca un esquema para tratarlo. Al hacerlo, pone en juego aquellos conceptos de los que dispone en ese momento y utiliza relaciones entre esos conceptos. En la *Figura 1* se muestra un diagrama de las construcciones y la abstracción reflexiva.

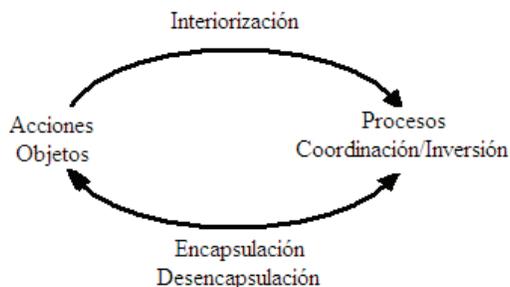


Figura 1: Esquema de la teoría APOE (Asiala et al., 1996)

Ciclo de Investigación en APOE

La teoría APOE nos provee de un ciclo de investigación, que se visualiza en la *Figura 2*, el cual integra tres componentes a considerar en el proceso de investigación: (i) análisis teórico, (ii) diseño e implementación de enseñanza, y (iii) observación, análisis y verificación de datos).

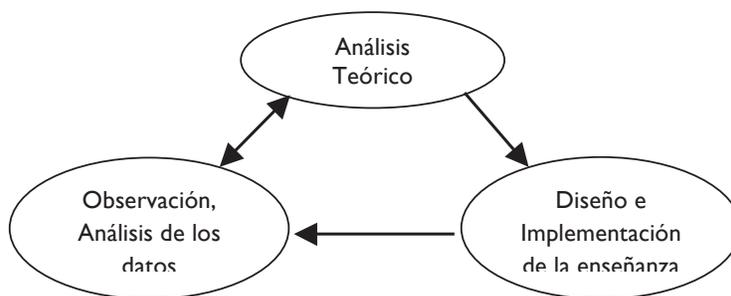


Figura 2: Ciclo de investigación en APOE (Asiala et al., 1996)

El objetivo principal del Análisis teórico es diseñar una Descomposición Genética hipotética, lo que permitirá por medio de la descripción de las construcciones mentales, modelar de manera cognitiva y epistemológica el concepto matemático en estudio (*Ibid.*).

Descomposición Genética de la raíz cuadrada

Una Descomposición Genética (DG) está definida como un modelo cognitivo donde se describen las posibles construcciones mentales que un estudiante realiza para construir un concepto a partir de ciertas habilidades cognitivas previas. Asiala et al., (1996, p. 7), define la descomposición genética del concepto como “conjunto de estructuras mentales que pueden describir cómo se desarrolla el concepto en la mente del individuo”. El análisis teórico dio como resultado una DG hipotética de la Raíz Cuadrada, la cual reporta que un estudiante inicia el estudio desde el aspecto aritmético, haciendo acciones sobre potencias hasta lograr un proceso inverso a la potencia de exponente 2, el cual se debe *coordinar* con un proceso geométrico con el fin de generar un proceso algebraico. El proceso anterior da origen a dos tipos de situaciones en la DG: a) la encapsulación y rotulación del objeto Raíz Cuadrada y, b) la coordinación con el proceso función, en donde se construye un nuevo proceso –el de encontrar las preimágenes de la función cuadrática dadas las imágenes– y que se encapsula en la función Raíz Cuadrada como objeto. En ambas concepciones objeto de la Raíz Cuadrada, el estudiante debe evidenciar la seguridad de la existencia en los números reales (lo cual viene de la construcción de trazos, pues un trazo representa la medida de cualquier número real positivo) y la consideración de un (1) solo resultado al calcular la raíz cuadrada de un número. A continuación se presenta en extenso el resultado de la DG:

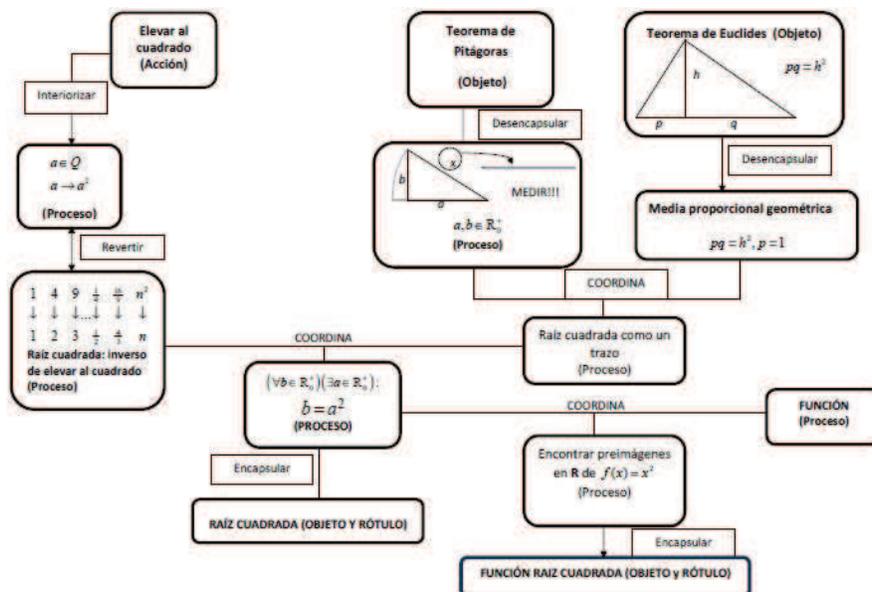


Figura 3: Descomposición Genética de la raíz cuadrada

Instrumentos para recolección de datos

En Roa-Fuentes y Okaç (2012), se mencionan aspectos como el tiempo y cantidad de integrantes del grupo de investigación necesarios para los seguimientos, como variables que han generado la realización de investigaciones que pasan de la primera a la tercera componente, considerando instrumentos de recolección de datos como cuestionarios y entrevistas. En nuestro caso particular en base a la DG se diseñó un cuestionario para analizar cómo los individuos han construido y/o están construyendo el concepto raíz cuadrada. En la validación del cuestionario se consideró la opinión de expertos en el área de la Didáctica de la Matemática, en este caso el Seminario Cognitivo del Instituto de Matemática de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.

El análisis de los datos

Los resultados son analizados desde la DG hipotética detectando qué elementos no han sido considerados o cuáles de las construcciones mencionadas hipotéticamente en la DG no se evidencian. La investigación corresponde en un estudio de casos y se trabajó con cuatro casos para documentar la DG hipotética antes expuesta. En la Tabla 1, se detallan las unidades de estudios.

Tabla 1: Clasificación y descripción de los casos de estudio y la unidad de análisis

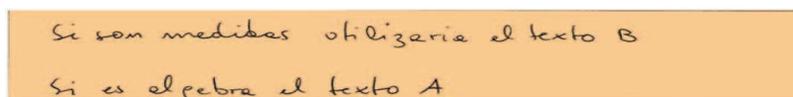
Caso 1	Caso 2	Caso 3	Caso 4
Estudiantes de 7° semestre de pedagogía matemática	Profesores egresados de pedagogía en matemática	Profesores con más de 4 años de ejercicio	Estudiantes de terminales de enseñanza secundaria
11, 12, 13, 14, 15, 16, 17,			118, 119, 120

	18.	19, 110, 111, 112, 113.	114, 115, 116, 117	
	(DG)	(DG)	(DG)	(DG)
Unidad de Análisis	Aplicación de Instrumentos: I cuestionario;	de Aplicación de Instrumentos: I cuestionario;	de Aplicación de Instrumentos: I cuestionario;	de Aplicación de Instrumentos: I cuestionario;

Resultados

Tras el análisis de los datos obtenidos de la aplicación del cuestionario se detectaron dificultades para *coordinar* procesos que se dan entre lo geométrico y aritmético, imposibilitando una concepción proceso del aspecto algebraico y con esto una *encapsulación* de la raíz cuadrada y/o la función raíz cuadrada. Una evidencia de esto es la aparición del *fenómeno* del doble signo en 17 de los 20 informantes, por lo que para este trabajo se analizará la pregunta 6 del cuestionario, la cual tenía por intención indagar la concepción acerca del concepto raíz cuadrada (aspecto algebraico y funcional) y en específico la cuestión del doble signo, a saber: *Un libro de texto A afirma que " $\sqrt{9} = \pm 3$ ", y el texto B afirma que " $\sqrt{9} = 3$ ". Si tuvieras que enseñar a un amigo, compañero y/o algún otro estudiante, ¿Cuál de los dos libros de texto sería tu apoyo? Argumenta tu elección.*

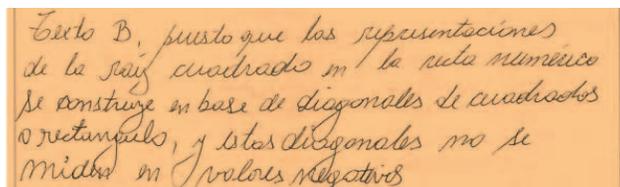
En la *Figura 4*, se muestra la respuesta de 18 (Informante 8) a la pregunta, quien afirma que en el caso geométrico la raíz cuadrada siempre será positiva, pero no en el álgebra. Esta respuesta evidencia que 18 no ha logrado coordinar los procesos aritméticos y geométricos según la DG hipotética.



Si son medidas utilizarie el texto B
Si es algebra el texto A

Figura 4: Respuesta de 18 a la pregunta 6 del cuestionario

La *Figura 5* muestra la respuesta de 114 frente a la misma pregunta, muestra un argumento que evidencia la coordinación de los aspectos aritméticos y geométricos para construir una concepción proceso de la raíz cuadrada en el aspecto algebraico.



Texto B, puesto que las representaciones de la raíz cuadrada en la recta numérica se construye en base de diagonales de cuadrados o rectángulos, y estas diagonales no se miden en valores negativos

Figura 5: Respuesta de 114 a la pregunta 6 del cuestionario

Los informantes 10 y 17 mostraron respuestas en la que elegían el “texto B” argumentando mediante la función cuadrática, al mencionar el recorrido de esta y con esto la existencia de una

sola imagen para cualquier preimagen. Si bien la elección del texto es correcta, su argumento está basado en un concepto posterior.

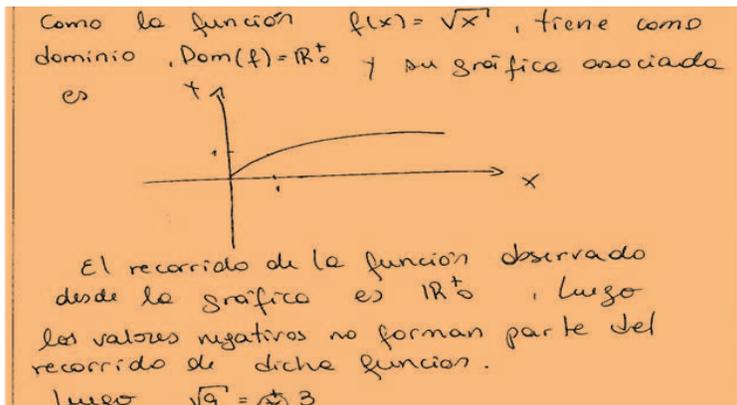


Figura 6: Respuesta de I10 a la pregunta 6 del cuestionario

El informante 20, evidencia una concepción objeto de la raíz cuadrada, pues es capaz de definirla como concepto en base y pone énfasis en las restricciones. Además evidencia tener clara la diferencia entre el concepto de raíz cuadrada y una ecuación cuadrática.

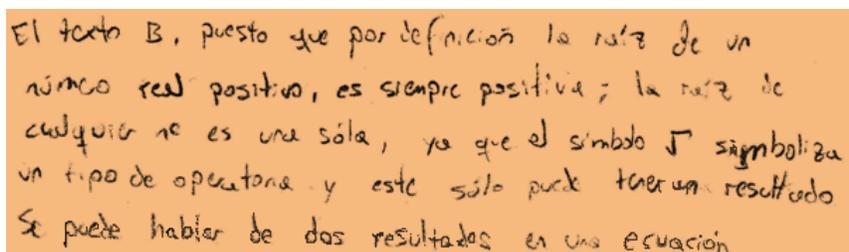


Figura 7: Respuesta de I20 a la pregunta 6 del cuestionario

Conclusiones

El análisis de los datos del cuestionario y de los casos en particular da cuenta de la presencia de los cuatro aspectos (geométrico, aritmético, algebraico y funcional), pero evidencia la falta de coordinación entre las construcciones mentales expuestas en la DG. Lo anterior indica que la DG hipotética es viable. Los datos indican que cada aspecto presente en la DG hipotética considera una colección de acciones, procesos y objetos, por lo que se puede considerar un esquema para cada aspecto, los cuales deben ser articulados mediante mecanismos de abstracción reflexiva. Los informantes evidenciaron que a partir del proceso inverso de elevar al cuadrado intentan generalizar directamente en lo algebraico, sin establecer una coordinación con otro proceso. En relación a la pregunta 6 del cuestionario, se observan distintas formas de argumentar la elección de un texto para enseñar la raíz cuadrada, en donde solo 3 informantes responden en base al objeto raíz cuadrada. Lo anterior se debe a la falta de coordinación entre los procesos generados en los distintos aspectos epistemológicos, lo cual genera problemas para construir un proceso que

permita hacer la generalización a lo algebraico. Se pudo evidenciar que algunos coordinaban con las funciones, es decir, utilizaban una construcción mental más avanzada, lo que da indicios de que los estudiantes “construyen” muchas de las estructuras mentales, sin tener bien construidas las estructuras previas necesarias, lo que implicaría dificultades para lograr la encapsulación en el objeto.

Referencias bibliográficas

- Asiala, M., Brown, A., DeVries, D., Dubinsky, E., Mathews, D. & Thomas, K. (1996). A Framework for Research and Curriculum Development in Undergraduate Mathematics Education. In J. Kaput, A. H. Schoenfeld & E. Dubinsky (Eds.), *Research in Collegiate Mathematics Education II* (pp.1–32). U.S.A.: American Mathematical Society
- Buhlea, C. y Gómez B. (2008). Sobre raíces y radicales. Efectos de dos culturas de enseñanza (España-Rumanía). En Ricardo Luengo, Bernardo Gómez, Matías Camacho, Lorenzo Blanco (Eds.). *Investigación en Educación Matemática XII. XII Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática – SEIEM, SEIEM, SPCE y APM*, pp. 217-239. Badajoz: SEEM.
- Colin, M. (2005). De la aritmética al cálculo: un estudio transversal de la raíz cuadrada. Tesis de Maestría no publicada. CICATA- IPN. México
- Dubinsky, E. (1996). Aplicación de la perspectiva piagetiana a la educación matemática universitaria. *Educación Matemática*. **8**(3), 25 – 41.
- Kú, D; Trigueros, M; Oktaç, A. (2008), Comprensión del concepto de base de un espacio vectorial desde el punto de vista de la teoría APOE. *Educación Matemática* **20** (2), 65-89.
- Muñoz, S., Darrigrandi, F. (2011). Matemática 3° Educación Media. Texto del Estudiante. Editorial Santillana del Pacífico S.A. Santiago de Chile.
- Roa-Fuentes, S. y Oktaç, A. (2012). Validación de una descomposición genética de transformación lineal: un análisis refinado por la aplicación del ciclo de investigación de APOE. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, **15**(2), 199 – 232.
- Salgado, H. (2007). Conteo: una propuesta didáctica y su análisis. Tesis de maestría no publicada. CICATA – IPN: México.
- Vidal, R. (2009), Las raíces y radicales en libros de texto en Chile (1969-2009). Un análisis de rupturas epistemológicas como aporte a la Didáctica de las Matemáticas. Tesis doctoral (no publicada), Facultad de ciencias de la Educación, PUCV, Chile.