UN ACERCAMIENTO FUNCIONAL A LA RESOLUCIÓN DE DESIGUALDADES MATEMÁTICAS

Armando Cuevas V., Arturo Rodríguez E. y Oscar González O.
Centro de investigación y estudios avanzados del Instituto Politécnico Nacional México
CINVESTAV-IPN.
ccuevas@cinvestav.mx, oscargoem@gmail.com, roearturo@hotmail.com

Resumen. Recientemente investigadores en matemática educativa han señalado un concepto que representa un reto en el proceso enseñanza-aprendizaje: la resolución de desigualdades matemáticas. En efecto, múltiples artículos de investigación (Bazzini &Tsamir, 2001; Boero & Bazzini, 2004; Linchevski & Sfard, 1991; Tsamir & Almog, 1999, et al.)identifican dificultades en el proceso enseñanza aprendizaje de este concepto y proponenacercamientos que buscan promover una mejora en su enseñanza y aprendizaje. El presente trabajo apunta en esta dirección, se propone establecer un acercamiento funcional a la resolución de desigualdades matemáticas y bajo el marco didáctico Cuevas & Pluvinage diseñar actividades apoyándose en el uso de las tecnologíasdigitales; con todo esto hemos formulado una propuesta de enseñanza que tiene como objetivo favorecer un aprendizaje significativo de este concepto. Adicionalmente proporcionamos datos de experiencia en el aula de nuestra propuesta.
Palabras clave: desigualdades matemáticas, algebra, función
Abstract. Recently, researchers in mathematics education have set their sight on a mathematical concept that represents a challenge in the teaching-learning process for both teachers and students: the resolution of mathematical inequalities. In fact, multiple research articles (Bazzini & Tsamir, 2001; Boero & Bazzini, 2004; Linchevski & Sfard, 1991; Tsamir & Almog, 1999, Tsamir, Tirosh, & Almog, 1998; et. al.) have identified difficulties in the process of teaching and learning of this concept and also have proposed some approaches to promote an improvement. This work points in this direction, we propose a functional approach to solve mathematical inequalities, based on the didactic framework Cuevas & Pluvinage and the use of digital tools. Withall these elements we have designed a didacticalapproach which aims to promotea significative understanding of this concept. Additionally, we provide data froman experience developed in the classroom following our approach.
Key words: inequalities, algebra, function.

Introducción

Durante las últimas décadas, se han desarrollado investigaciones relacionadas con la enseñanza-aprendizaje del álgebra buscando ofrecer propuestas que permitan mejorar la comprensión de la misma y favorecer el complejo paso de la aritmética al algebra en los estudiantes (Filloy, Rojano y Puig, 2008; Rojano, 1990; Sutherland R. 1999; Rojano T, Sutherland R. 1992; Filloy E, Rojano T. 1989; Farfán R. M., Albert, A. 1997). Sin embargo, las desigualdades o inecuaciones son un tema sobre el cual aparentemente los investigadores en educación matemática han puesto poca atención (Bazzini & Tsamir, 2001; Boero & Bazzini, 2004; Linchevski & Sfard, 1991; Tsamir & Almog, 1999, Tsamir, Tirosh, & Almog, 1998), a pesar del uso cotidiano que se les da para mostrar información de análisis clínicos, del clima, entre otras. Así como de las sugerencias de organizaciones como la NCTM que enfatizan que los estudiantes de los grados 9 a 12 deben aprender a representar y analizar situaciones y estructuras matemáticas utilizando símbolos algebraicos, en especial comprender el significado de formas equivalentes de expresiones, ecuaciones, inecuaciones y relaciones; además de resolverlas con fluidez mediante lápiz y papel y apoyándose en el uso de tecnología (Principles and Standards, 2000).

Antecedentes en el Nivel Medio Superior y Superior

La necesidad de trabajar con desigualdades matemáticas en el aula, surge tan pronto como se consideran los números reales y su orden. Mientras que ordenar los números naturales no ofrece dificultades, tan pronto como se introducen los números enteros surge la necesidad de considerar de qué manera la multiplicación y división por un número negativo, afecta el orden. Con la representación de los números racionales, la tarea de ordenar se vuelve más sofisticada, dado su densidad y continuidad, por ende ya no es sencillo de identificar su orden. Aunado a esto, existen diversos significados y representaciones semióticas para los números racionales (fracciones, razones, proporciones, decimales, etc.). Para tener una representación decimal aproximada de números irracionales, las desigualdades se vuelven imprescindibles; por ejemplo, para el cálculo de raíces reales o para aproximar el valor de π.De manera similar, las desigualdades aparecen en la Geometría Plana cuando se comparan longitudes, ángulos, áreas, etc.opara determinar la existencia o no existencia de ciertas figuras particulares (i.e. desigualdad del triángulo) y en la solución de problemas de optimización.

En México, el tema de las desigualdades matemáticas no se aborda de manera explícita en el programa de estudios de educación secundaria (2006) y solo en algunos casos, como en el estado de Puebla, el tema de desigualdades matemáticas se introduce en la materia Geometría Analítica y Funciones(Programas oficiales de estudio 2006). Sin embargo, este constituye el último tema a tratar y se trata con poca profundidad introduciendo solo el caso de desigualdades lineales. El panorama en la asignatura siguiente, Cálculo Diferencial, no es muy alentador pues el programa de estudios no contempla profundizar en el estudio de desigualdades, es decir no se extiende su estudio para los casos de desigualdades racionales, cuadráticas, de valor absoluto, etc.

No obstante, conforme se desarrolla el curso de Cálculo diferencial se puede notar la gran cantidad de aplicaciones y el uso extensivo que se hace del concepto de desigualdad,para definir: dominio y rango de una función, valor absoluto, las funciones trigonométricas y sus inversas, límite, funciones por partes, el concepto de continuidad, diferenciabilidad, monotonía, concavidad, aproximación de raíces, etc.

Por otra parte en el nivel superior, el tema de desigualdades aparece como una aplicación de los axiomas de orden y de campo de los números reales y por lo general, se estudian desigualdades lineales, cuadráticas, cúbicas y racionales de lineales y cuadráticas. La forma de resolución es haciendo uso de la lógica matemática y el álgebra de conjuntos, mediante métodos y/o procesos de resolución diferentes a su educación anterior. Cabe mencionar que además tanto la lógica matemática como el álgebra de conjuntos son temas que no se estudian previamente; consecuentemente, el registro de representación semiótico de la lógica es desconocido, así como el del algebra de conjuntos lo queconstituye una dificultad agregada al estudio de las desigualdades matemáticas y su solución en la educación media superior y superior.

Acercamiento funcional y marco didáctico Cuevas & Pluvinage

Ante tal panorama, es necesario proponer un acercamiento que permita a los estudiantes abordar los conceptos involucrados en la resolución de desigualdades matemáticas de tal manera que se favorezcan tanto el aprendizaje de los conceptos así como una destreza operativa. Existen investigaciones en matemática educativa que sugieren que un acercamiento funcional para abordar desigualdades matemáticas puede potenciar la comprensión no solo de los conceptos propios de las desigualdades matemáticas, sino de otros contenidos matemáticos (Boero, 2004). En el mismo sentido se manifiesta Riestra (2009), proponiendo en el estudio del cálculo, iniciar el estudio con funciones sencillas y contemplar el continuo aritmético de manera intuitiva y significativa en contraposición del estudio formal de campo de los números reales. Una propuesta semejante a la de Riestra es la de Huang (2001) quien propone resolver desigualdades de manera funcional utilizando el teorema del valor medio. De esta manera se propone una alternativa para resolver inecuaciones reduciéndolas a ecuaciones del mismo tipo y utilizando el principio (intuitivo) de continuidad para funciones; es decir, de manera funcional. Por su parte, Cuevas y Mejía (2003) presentan en su libro Cálculo Visual una manera de resolver desigualdades mediante un acercamiento funcional y proporcionando además un uso de la tecnología digital de apoyo a su enseñanza.

Esta propuesta no sólo nos parece convincente por facilitar el trabajo operativo, por no requerir de conceptos previos no enseñados, sino porque establece una mayor congruencia con el cálculo diferencial al analizar funciones reales.

Explicitaremos los dos procedimientos para resolver una desigualdad mediante un problema particular en la idea de que esta exposición es sin pérdida de generalización para casos subsecuentes.

Resolver $x^2 - 3x - 10 > 0$

Método tradicional	Acercamiento funcional
Para este método, que se basa en las propiedades de los números reales, lo primero será hallar sus raíces, $r_1 = -2$ y $r_2 = 5$ y después factorizar la expresión:	Para este método analizamos funcionalmente el polinomio $P(x) = x^2 - 3x - 10$.

$x^2 - 3x - 10 = (x-5)(x+2)$

Posteriormente, se deberán analizar los casos en los que el producto es positivo. Cuando: $((x-5)<0) \wedge ((x+2)<0)$ lo que equivale a $(-\infty,5) \cap (-\infty,-2) = (-\infty,-2)$

Entonces $CS_1 = (-\infty,-2)$

Cuando: $((x-5)>0) \wedge ((x+2)>0)$ lo que equivale a $(5,+\infty) \cap (-2,+\infty) = (5,+\infty)$

Entonces $CS_2 = (5,+\infty)$

Finalmente, se opera lógicamente con ambos conjuntos para obtener el conjunto solución de la desigualdad, así $CS = (-\infty,-2) \cup (5,+\infty)$

Primero hallamos sus raíces, $r_1 = -2$ y $r_2 = 5$. Estas dos raíces dividen al dominio de $P(x)$ en los intervalos: $(-\infty,-2) \cup (-2,5) \cup (5,+\infty)$

Luego el problema se reduce a determinar el signo de la función en cada intervalo para determinar dónde $P(x) > 0$.

Así, el conjunto solución de la desigualdad es, $CS = (-\infty,-2) \cup (5,+\infty)$

Por otra parte, el presente trabajo se desarrolló tomando como fundamento la didáctica diseñada por Cuevas y Pluvinage (2003). Por ser una propuesta didáctica para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas dirigidas al nivel medio superior y superior y porque además considera el uso de la tecnología para facilitar propuestas de corte didáctico-pedagógico. Las recomendaciones de las que consta la didáctica Cuevas-Pluvinage se pueden resumir en los siguientes: Es esencial que el estudiante este realizando siempre una acción, por lo que a través de la resolución de problemas específicos, gradualmente dosificados, construya o llegue al concepto deseado; cada vez que se introduzca un concepto se debe partir de un problema contextualizado y que resulte interesante para el estudiante; una vez resuelto un problema el estudiante debe comprobar sus resultados, verificando que tengan un sentido lógico de acuerdo al problema planteado; cada vez que se presenten las operaciones directas asociadas a un concepto, de ser posible, implementar ejercicios que representen a la operación inversa asociada; cuando se proponga un método de resolución de un problema se debe intentar dar una forma alternativa de solución, si esto no es posible, entonces no imponer una forma única de solución; si un concepto se ilustra mediante ejercicios en más de un registro de representación, instrumentar operaciones directas e inversas que promuevan la translación o articulación de los mismos.

Experiencia

Como se ha visto hasta ahora, existen ya una variedad de investigaciones relacionadas con la enseñanza de desigualdades matemáticas donde se describen dificultades y ventajas que ofrecen distintos acercamientos a los conceptos de desigualdad; sin embargo, no se encontró en la literatura un seguimiento a éstos hallazgos o esfuerzos por conjuntar las diversas propuestas e implementarlas. Este fue uno de los principales motivos por lo que hemos desarrollado una propuesta de enseñanza que incluyelas recomendaciones y toma en cuenta las dificultades halladas por los investigadores en matemática educativa.

La experiencia en el aula,se desarrolló con un grupo de 17 estudiantes de 4to semestre de Bachillerato del estado de Puebla e involucró el diseño y aplicación de una prueba pretest seguida de una serie de actividades que se apoyaron fuertemente en herramientas digitales como el tutor inteligente CalcVisual; software de geometría dinámica y la creación de escenarios didácticos virtuales interactivos (EDVI) para finalizar con una prueba postest. Siguiendo las sugerencias de la didáctica Cuevas y Pluvinage, la primer sección de actividades se dedicó a presentar un problema de contexto cuya modelación matemática permite que el concepto de desigualdad matemática emerja de la interacción del alumno con el EDVI, en particular el de una desigualdad lineal. La siguiente sección de actividades se orientó a introducir a los estudiantes a los conceptos de orden de los números reales; éstas se implementaron a través de dos EDVI donde se propone a los estudiantes determinar el orden de dos números reales representados sobre la recta real; el propio escenario guía la actividad a través de un cuestionario virtual donde a su vez se introduce la notación necesaria. En estas actividades, de acuerdo al marco didáctico, se buscó favorecer la articulación entre los registros de representación numérico, algebraico y gráfico para auxiliar a los estudiantes a determinar qué operaciones son las que afectan el orden de dos números y el significado de los signos “<” y “>”.

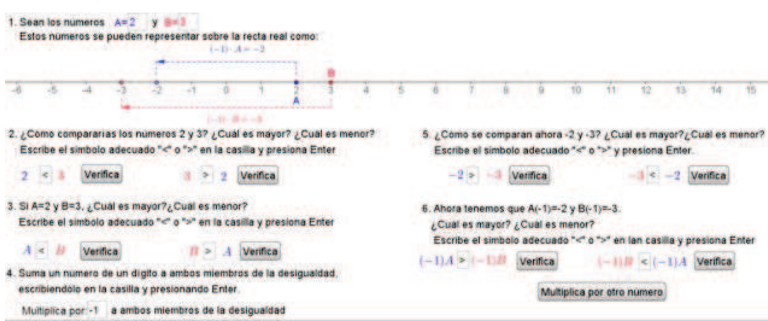

Figura 1. Cuestionario interactivo orden de los números reales y sus operaciones.

La tercera sección de actividades, se centró en la solución del problema planteado en la primera actividad y se introduce a los estudiantes al uso del software tutorial CalcVisual. Esta herramienta permite al estudiante calcular las raíces del polinomio que modela al problema y resolver la desigualdad a través de determinar el signo de la función. En esta actividad se introduce también la notación de intervalos y conjuntos para expresar la solución de la desigualdad. Asimismo se favorece la operación inversa solicitando a los estudiantes que propongan una desigualdad que cumpla con un cierto conjunto solución.

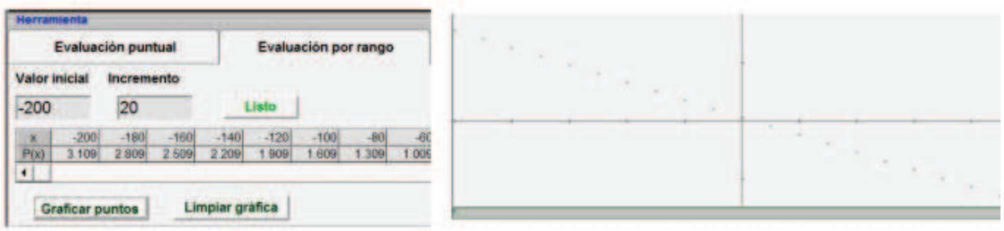

Figura 2. Uso de CalcVisual para aproximar raíces de un polinomio.

De manera similar, la cuarta sección de actividades plantea un problema de contexto cuya solución requiere modelar la situación a través de una desigualdad del tipo $ax + b > cx + d$; en este sentido, el estudiante debe recurrir a los conceptos ya presentados en las actividades anteriores para dar solución al problema.

Por último, la quinta sección de actividades plantea un problema de movimiento uniformemente aceleradocuya solución requiere del planteamiento de una desigualdad cuadrática. Esta actividad se acompaña de un escenario virtual interactivo donde intuitivamente el estudiante puede determinar la velocidad a la que debe viajar un auto para poder frenar antes de colisionar con un obstáculo, posteriormente este escenario sirve para validar la respuesta obtenida por los estudiantes a través del acercamiento funcional.

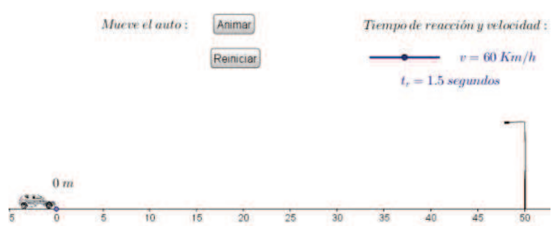

Figura 3. EDVI para introducir el estudio de desigualdades cuadráticas.

Resultados y conclusiones

Los resultados obtenidos tras implementar esta propuesta fueron alentadores, las evidencias obtenidasen la prueba pretest contrastadas con lasobtenidas en cada uno de los cuestionarios de las actividades yla prueba postest sugieren unavancesignificativo en el grupo de estudiantes. Partiendo de los resultados que se recolectaron en la prueba diagnóstico donde se apreciaron claras deficiencias en los alumnos en cuanto a elementos prerrequisito y graves problemas algebraicos, al ir desarrollando las actividades que componen a la propuesta se fueron evidenciando cambios significativos en la forma en que operan hasta lograr que un poco más de la mitad de ellos consolidara su conocimiento sobre el concepto de desigualdad matemática, su solución y algunas de sus representaciones.

Durante la experiencia didáctica realizada, los estudiantes mostraron un avance consistente aplicando propiedades como: $a < b \Leftrightarrow a + c < b + c \;\; \forall a, b, c \in \Re$, $a < b \;\&\; c > 0 \Rightarrow a{\cdot}c < b{\cdot}c \;\; \forall a, b, c \in \Re$ y $a < b \;\&\; c < 0 \Rightarrow a{\cdot}c > b{\cdot}c \;\; \forall a, b, c \in \Re$ para simplificar y posteriormente resolver desigualdades lineales. Asimismo una buena parte de ellos logró aplicar lo aprendido en la resolución de desigualdades cuadráticas, tal y como se puede apreciar en las gráficas de las figuras 4.

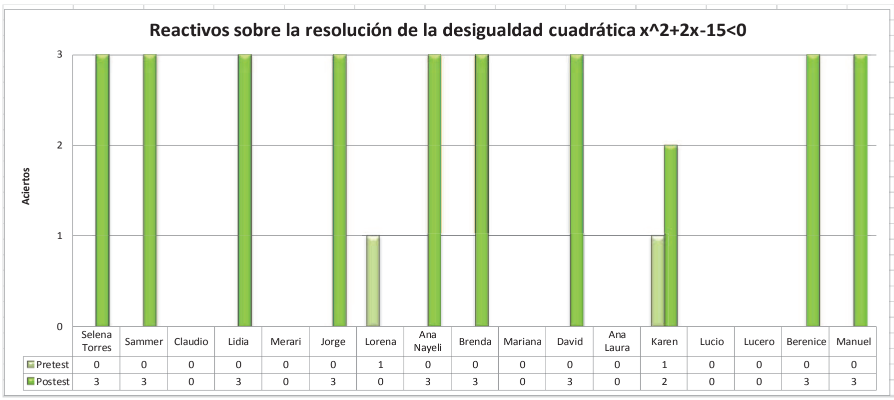

Figura 4. Resultados de los estudiantes al resolver una desigualdad cuadrática.

Este fue sin duda uno de los grandes logros que se obtuvieron con los estudiantes, pues comparando los resultados de la prueba diagnóstico donde solo 2 estudiantes lograron identificar correctamente la solución a una desigualdad cuadrática; se observa quetras desarrollar la actividades, la mayoría de los estudiantes fueron capaces de realizar esta tarea correctamente y lograron expresar la solución de la desigualdad a través de diferentes registros de representación.

Asimismo, más de la mitad del grupo de estudiantes fueron capaces de resolver con éxito una desigualdad cúbica, caso que no se contempló ni se estudió durante las actividades. Estos resultados se muestran en la gráfica de la figura 5.

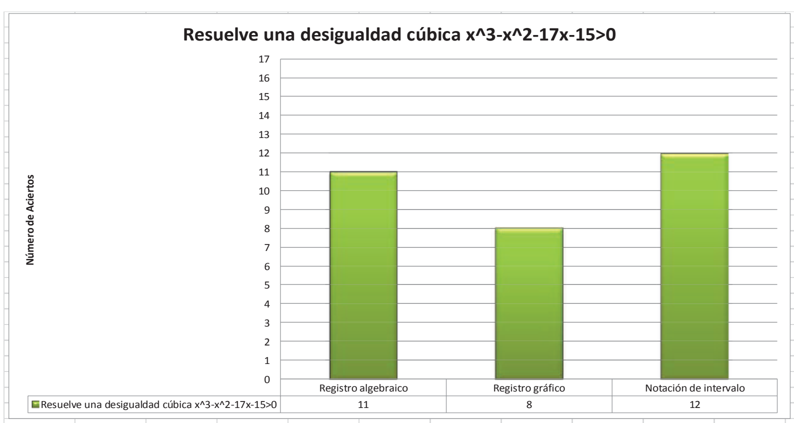

Figura 5. Resultados de los estudiantes al resolver una desigualdad cúbica en diferentes registros de representación

Así pues, más de la mitad de los estudiantes fueron capaces de resolver correctamente un tipo de problema que no se trató durante las sesiones; es decir, estos estudiantes fueron capaces de adaptar sus conocimientos para resolver correctamente tareas distintas a las estudiadas en clase. En conclusión, podemos afirmar que la articulación entre el acercamiento funcional, el marco didáctico y el uso de herramientas digitales permitió a los estudiantes mejorar considerablemente su comprensión y operatividad sobre el concepto de desigualdad matemática y sus conceptos relacionados.

Referencias bibliográfícas

Bazzini, L., & Tsamir, P. (2004). Algebraic equations and inequalities: issues for research and teaching. *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, I, 137-166.

Bell A, Lins R, Rojano T, Sutherland R. 1999. Perspectives on School Algebra.:278.

Boero, P., & Bazzini, L. (2004). Inequalities in mathematics education: the need for complementary perspectives. *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematical Education*, *I*(28), 139-142.

Cuevas, C., & Mejía, H. (2003).*Cálculo visual*. México: Oxford University Press.

Cuevas, C., & Pluvinage, F. (2003). Les projets d'action practique, elements d'une ingeniere d'ensigment des mathematiques. Annales de didactique et sciences cognitive, Vol. 8. IREM Strasbourg. (273-292)

Farfán R.M., Albert, A. (1997). Resolución gráfica de desigualdades usando las supercalculadoras. México: Grupo Editorial Iberoamérica. Segunda Edición.

Filloy, E., Puig, L., & Rojano, T. (2008). *Educational algebra a theorical and empirical approach*. New York, NY: Springer.

Huang, C. (2001). A new look at solving inequalities. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 32(4), 729-733.

Kieran, C. (2004). The equation/inequality connection in constructing meaning for inequality situations. *Proccedings of th 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematical Education*, *I*(28), 143-147.

Linchevski, L. & Sfard, A. (1991). Rules without reasons as processes without objects – The case of equations and inequalities. *Proceedings of PME15*, Assisi, Italy, Vol. II, 317-324.

McLaurin, S. (1985). A unified way to teach the solution of inequalities. *Mathematics Teacher*, 78(2), 91-95.

Riestra, J. A. (2009). Un acercamiento funcional a inecuaciones.*El cálculo y su enseñanza*, Cinvestav del Instituto Politécnico Nacional, México D.F.

Rojano T, Sutherland R. 1992. A new approach to algebra: Results from a study with 15 year olds.Cuarto Simposio Internacional sobre Investigación en Educación Matemática. Enseñanza del Algebra.

Ruíz, J. Secretaría de educación Pública, *Subsecretaría de educación media superior.*(2010).Matemáticas IV. México, D.F.: SEP.

Sackur, C. (2004). Problems related to the use of graphs in solving inequalities.*Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematical Education, I*(28), 148-151.

Sfard, A., & Linchevski, L. (1994). The gains and pitfalls of reification - the case of algebra. *Educational Studies in Mathematics*, (26), 191-228.

Sierpinska, A., Georgeana, B., & Pruncut, A. (2011). Teaching absolute value inequalities to mature students. *Educational Studies in Mathematics*, (78), 275-305.

Tsamir, P., & Almog, N. (2001). Student's strategies and difficulties: the case of algebraic inequalities. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 32(4), 513-524.

Tsamir, P., & Bazzini, L. (Ed.). (2002). *Student's algorithmic, formal and intuitive knowledge: the case of inequalities*. Hersonissos, Crete: University of Crete.

Tsamir, P., Tirosh, D., & Sarit, T. (2004). "new errors" and "old errors": the case of quadratic inequalities. *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematical Education, I*(28), 155-158.