

ELABORACIÓN DE ESTRATEGIAS PARA LA MODELIZACIÓN. UN ESTUDIO SOBRE LOS PROCESOS INVOLUCRADOS

María Inés Cavallaro. Marta Anaya. Cristina Dominguez

Facultad de Ingeniería. Universidad de Buenos Aires. Argentina

micavall@fi.uba.ar, manaya@fi.uba.ar, mdominguez@caece.edu.ar

Campo de investigación: Modelos Matemáticos-Modelos Mentales; Nivel Educativo: Superior

Abstract

En esta investigación, realizada con alumnos de ingeniería en sus primeros cursos en el marco del proyecto de Modelización y Enseñanza desarrollado en FIUBA, se han detectado y analizado las dificultades de los estudiantes en el diseño de estrategias para la modelización de situaciones en contexto. En particular, se ha explorado la posible intervención de tres meta-procesos: la formulación (consciente o inconsciente) del modelo mental que estructura la situación contextual, la elección de representaciones internas y de las relaciones e interacciones asociadas a las mismas y de un sistema controlador y evaluador de esas elecciones.

Introducción

Algunas de las problemáticas planteadas en el ICMI Study 14 Discussion Document (2002) están vinculadas a la actividad desplegada por los estudiantes durante la modelización y al rol de la matemática en el desarrollo de las habilidades respectivas. En este sentido, Berry&Houston (2004) han considerado al rol de las herramientas, el trabajo con representaciones y la formulación de secuencias de acciones para la resolución del problema, como factores importantes para la modelización matemática.

La elaboración de un modelo eficiente, que permita resolver una situación problemática o predecir eventos está estrechamente vinculada con la habilidad para elaborar estrategias que pueden tener lugar en la representación mental del contexto real (etapa de la estructuración del problema) o en el contexto matemático (matematización).

Es decir, durante la elaboración de la estrategia podrían intervenir tres meta-procesos:

- La formulación (consciente o inconsciente) del modelo mental que estructura la situación contextual. La interpretación y uso de la información forma parte de este proceso.
- La elección de las representaciones internas y sus asociaciones. La creatividad, la flexibilidad para desplegar distintos tipos de razonamiento y la disponibilidad y manejo de saberes previos son factores importantes en este proceso.
- Un sistema controlador y evaluador del propio modelo y de las elecciones mencionadas.

Siguiendo estas conjeturas y dentro de la teoría fundamentada en datos (1994), se ha realizado una investigación con alumnos de ingeniería en sus primeros cursos.

Esta investigación, realizada en el marco del proyecto de Modelización y Enseñanza desarrollado en FIUBA, ha tenido por objeto detectar y analizar las dificultades de los estudiantes en el diseño de estrategias para la modelización de problemas reales y, en particular, explorar los meta-procesos anteriormente mencionados.

El instrumento ha sido un cuestionario con situaciones problemáticas de distintas características, no estándar para estos alumnos. La metodología empleada ha sido mixta y se encuadra dentro de los estudios descriptivos y explicativos.

Los resultados de este trabajo sentarán bases para la elaboración de diseños de tareas dirigidas a los alumnos de ingeniería que permitan impulsar y favorecer el desarrollo de las habilidades para la modelización.

Consideraciones teóricas:

Los conceptos de modelización , problema, situación real, modelo matemático se usan de acuerdo a las definiciones establecidas en el Icmi Study 14 Document (2000).

El rol de las habilidades en la formulación de estrategias para el modelado han sido interpretadas siguiendo las ideas más generales sobre creatividad en matemática expuestas por Erynk (1992).

La intervención y disponibilidad del conocimiento en relación con la memoria se han analizado en el marco de las ideas expuestas por Brainerd y Reyna (2001).

En cuanto a las diferentes clases de conocimiento matemático (conceptual y procedimental) se analizó de acuerdo con las ideas de Hiebert y Lefevre (1986).

Metodología:

Estudio descriptivo – explicativo con metodología de análisis mixta.

Muestra: 40 estudiantes de ingeniería en sus primeros cursos (19 – 20 años) que han aprobado un primer curso de cálculo y álgebra y están cursando Cálculo en varias variables.

Instrumento: Cuestionario con cuatro problemas resueltos en forma presencial.

- | |
|---|
| <p>1) <i>Cómo harías para estimar la altura de una montaña? Qué elementos o conocimientos deberías disponer para hacerlo? Si los tuvieras, describe paso por paso lo que harías.</i></p> <p>2) <i>En una fiesta se produjo una tentativa de homicidio.</i>
<i>La policía, interrogó a 18 personas presentes en el momento del crimen. Se les preguntó: si habían oído un disparo y si habían visto que alguien huía. 10 personas oyeron un disparo, 6 contestaron que no habían visto a alguien huyendo, 5 personas contestaron no vieron ni escucharon nada irregular.</i>
<i>¿Cuántas personas contestaron oyeron el disparo y vieron a alguien que huía?</i>
<i>¿Cuántas personas escucharon el disparo pero no vieron que alguien huía?</i>
<i>¿Cuántas no escucharon el disparo pero sí vieron a alguien huyendo?</i></p> <p>3) <i>Se tienen 9 monedas de igual aspecto y peso salvo una de ellas que pesa diferente. Se tiene sólo una balanza de dos platillos para pesarlas pero no se puede pesar más de 4 monedas por platillo, ni se puede utilizar más de 3 veces la balanza. Explicá cómo determinarías cuál es la moneda de distinto peso y si ésta pesa más o menos que las demás.</i></p> <p>4) <i>El 7 de mayo de 1992, el transbordador espacial Endeavour fue lanzado con la finalidad de instalar un Nuevo motor de impulso en un satélite Intelsat de comunicaciones. Se obtuvieron los siguientes datos de la velocidad de transbordador entre el despegue y el desprendimiento de los cohetes auxiliares de combustible sólido: (a continuación se mencionan velocidades para 8 valores distintos del tiempo marcando las distintas etapas de la puesta en órbita)</i>
<i>a) Cómo harías para calcular aproximadamente la velocidad del transbordador a los 40 segundos de iniciado el lanzamiento?, a los 90 segundos?, a los 3 minutos?.</i>
<i>b) Cómo harías para estimar la altura alcanzada al minuto de haber sido lanzado?</i></p> |
|---|

c) *Cómo harías para estimar la evolución de la aceleración del transbordador y en qué momentos se produce la mayor aceleración?*

Los problemas seleccionados requieren distintos niveles de conocimientos matemáticos básicos que deben ser combinados en una forma posiblemente nueva para el estudiante que genera la estrategia. Se han tenido en cuenta problemas en los que se observan fundamentalmente estrategias de organización, estructuración y diagramación de la información y el uso secuencial de información obtenida en cada paso, simulación mental y control de procesos (problemas 2 y 3), en los que se observen las restricciones sobre las inferencias realizadas y cuáles pueden ser las dificultades asociadas.

En los problemas 1 y 4 se observará la traducción y matematización de una situación contextual con control de factibilidad, la manipulación de datos con distinto grado de complejidad y uso de herramientas matemáticas a nivel conceptual y procedimental y se analizará cómo y con qué extensión y restricciones estos conocimientos son evocados.

Resultados y su discusión

Algunos resultados relevantes para el **Problema 1)**:

Contexto físico	Contexto Matemático. Trigonometría 51%			No contesta	Factibilidad		
	Preciso	Imprec.	Incorr.		Fact.	Poco Fac.	No Fact.
30%	6%	30%	15%	19%	6%	60%	15%

El 81% que responde, evidencia comprender el enunciado. El 36% contesta correctamente en el entorno matemático aunque con muy poca precisión evidenciando un manejo pobre de la herramienta matemática. Sólo el 6% usa estrategias un poco más elaboradas.

Los conocimientos matemáticos utilizados son trigonometría sobre un solo triángulo rectángulo y trigonometría sobre dos triángulos.

En general evocan los conocimientos físicos o matemáticos relevantes para la resolución pero no tienen en cuenta restricciones del contexto real. Los métodos sugeridos por el 66% de los alumnos (entre matemáticos y físicos) son poco o no factibles pues un 34% sugiere medir la distancia al “centro” de la montaña y un 28% sugiere subirse a la montaña, lo que evidencia disociación entre el modelo y el contexto real.

A4: *“Sabiedo que por cada 100 metros de altura la temperatura baja un grado, mediría la temperatura en la base de la montaña, luego subiría, mediría la temperatura en la cima de la montaña, y así sabría más ó menos la altura que tiene la montaña”.*
 A17: *“Desde el lugar donde me encuentro, mido el ángulo que pasa por la punta y el piso, y la distancia a la que me encuentro del centro de la base de la montaña, y uso trigonometría”.*

Parecería que aceptaran la simplificación más rápida de la situación aunque ésta no se adecúe al problema real. Evidentemente, no hay una simulación mental de lo propuesto.

Problema 2)

Resp. correcta	Oyeron	No Oyeron	Totales
Vieron	9	3	12
No vieron	1	(5)	(6)
Totales	(10)	8	(18)

Responde bien				No resp.	Diagrama
a	b	c	las tres		
12,5 %	0%	47%	9%	22%	12,5% (bien: 3%)

a) 9 b) 1 c) 3

La estructura de resolución de este problema se basa fundamentalmente en la selección de aquella parte de la información dada que permite deducir una información no explicitada. La gran mayoría (69%) colocó respuestas erróneas sin especificar ni mostrar su estrategia. Los resultados parecen estar sesgados por la facilidad con la que se visualiza la situación por medio de una operación mental simple, y/o por la facilidad con la cual ciertas asociaciones podrían ser traídas a la mente.

En este caso, el esquema mental más simple pareció ser el de restar al total (18) los que no vieron ni escucharon (5) (intersección de dos subclases), obteniéndose los 13 que vieron o escucharon. Este primer resultado conduce a la respuesta correcta (3) en la última pregunta cuando de esos 13 (vieron u oyeron) se resta el dato inicial 10 (oyeron). Esto es, de una subclase, se conoce el cardinal de un subconjunto y se pide el otro. Ese podría ser el motivo por el cual el 47% de los alumnos contesta correctamente esta pregunta.

A partir de la consideración que eligen como inicial, las operaciones mentales requeridas para contestar las otras dos preguntas parecen ser más complejas, ya que deben discriminarse de una subclase (oyeron) los dos cardinales, usando datos sobre las uniones.

Si la situación fuese diagramada, no habría diferencia entre las dificultades de las operaciones mentales involucradas. Sin embargo, sólo un 12.5% intenta diagramar y el 3% lo hace correctamente. El diagrama requiere un nivel de abstracción más alto al organizar la información, reconociendo la existencia de dos conjuntos particionados en subclases.

Problema 3)

El 84% de los estudiantes respondió esta pregunta. Este porcentaje se repartió entre un 38% que hicieron la selección adecuada (3 grupos de 3 monedas) , y un 36% que hicieron otra selección que no les permitió resolver el problema.

Estrategia (Selección)		Representación	Detecta lote	Detecta moneda	Detecta el peso	Respeto las Condiciones del problema (3 pesadas)	Asume que tiene + o - peso
3 grupos de 3	34 %	14 %	10 %	4 %	2 %	12 %	4 %
2 de 4 cambia a 3 de 3	4%	4 %	2 %	2 %		2 %	2 %
2 de 4	32%	6 %	2%	1 %		8 %	22%
Otros (2y2)	4%	2%				2 %	2 %
No contesta	26%						

Las dificultades observadas en la resolución de este problema se relacionaron con *las restricciones* respecto al número limitado de mediciones (número máximo de pesadas) que desconoció el 50% de los estudiantes. Se observó que el 30 % de los estudiantes supuso que si un platillo estaba más bajo (o más alto) entonces una de las monedas de ese platillo era la diferente y resultaba más pesada (o respectivamente más liviana):

“ Pesa más \Leftrightarrow la balanza se inclina a favor del platillo que contiene la moneda deseada;” (A2).

Estos estudiantes no parecen percibir que la moneda diferente podría tener una relación de peso opuesta a la de su suposición. Es decir no pueden considerar todas las posibilidades. Hubo dificultades tanto en la identificación del lote en que se encuentra la moneda diferente (60%), en la identificación de la moneda diferente (67%) y en la identificación de su peso (72%). Sólo el 35 % de los estudiantes realizó algún tipo de representación.

Los estudiantes suelen seguir el proceso iniciado pero no siempre logran completarlo dado que la consideración permanente de alternativas opuestas y complementarias queda interrumpida por un “supuesto” o un olvido, en el primer caso se trataría de un “desvío” que permite finalizar “autoconvincientemente” la línea de razonamiento y en el segundo caso faltaría un patrón de razonamiento por refutación.

Problema 4)

La dificultad de este problema consistió en que se presentaron los datos de una función y su derivada en forma discreta. Sólo el 31% de los alumnos propone el trabajo discreto para el cálculo aproximado de velocidades de a), y el 16%, para contestar preguntas relativas a la distancia y la aceleración. Un 44% de los alumnos no responden ningún ítem.

Propone o supone expresión analítica de la función			Trabajo discreto				gráfico	No responde (44%)
Indica cómo hallarla	No indica	Total	Interp. lineal	Extrap.	Integral discreta	Deriv discreta		
a. 9%	12,5%	21.5%	31%	9%	--	3%	9%	--
b. 9%	28%	37%	16%	--	12.5%	---	--	3%
c. 6%	19%	25%	--	--	--	12.5%	3%	19%

El 56% que responde, ha comprendido el enunciado, lo que se pide y distingue datos e incógnitas. Sólo un 22% de los alumnos consideran todas las restricciones del problema entre las soluciones en el contexto discreto y las soluciones propuestas por vía analítica. El problema es interpretado esencialmente en el contexto matemático. Se observa una fuerte tendencia al trabajo analítico-simbólico aunque no preciso y muchas veces incorrecto.

Los conceptos matemáticos evocados son: cuadrados mínimos (9%), que mencionan sin detallar el procedimiento, interpolación lineal (31%), en la cual se detectan errores, como linealizar a partir de un solo dato y calcular de esta forma todas las preguntas asociadas.

Ninguno hace mención a las limitaciones o inexactitudes de los métodos que propone.

Es evidente que muchos alumnos tienen muy internalizada esta representación de las funciones, que es en general la que suele realizarse en los cursos de análisis, y no logran manipular los datos más allá de interpolaciones lineales.

El trabajo directo con los datos interpolando o extrapolando parece más accesible que el trabajo de extraer información relevante y procesarla para contestar preguntas relativas a conceptos que no están explícitos en los datos sino que requieren restricciones. Esto explica el cambio de porcentajes entre el ítem a) y los ítems b y c).

Comentarios finales

➤ **En cuanto al modelo mental, la representación interna de la situación y el uso de la información.**

En general los alumnos han comprendido la situación problemática y han estructurado la resolución en forma adecuada. Sin embargo, la elección de los conceptos en forma más refinada para la resolución ha evidenciado dificultades.

El modelo mental desplegado en cada situación parece ser el más simple que guarde coherencia con la situación, lo cual es consistente con la teoría de Brainerd y Reyna (2001). Al evocarse situaciones más conocidas (problemas 1 y 4), se produce una resonancia con conocimientos previos y esto hace que el alumno centre su atención en recordar situaciones previas y restablecer modelos conocidos. Una vez elegido un contexto de resolución, la atención se pone en estos principios evocados olvidando las condiciones del problema.

También se observaron dificultades en la estructuración de la información y razonamiento secuencial aún en casos en que no se requerían conocimientos previos para la resolución.

Por ejemplo, en el problema 2 se observó que no logran un modelo mental conjuntista que les permita manipular simultáneamente condiciones de inclusión, conjunción y disyunción. En la situación que se requiere simulación mental y control de los procesos (problema 3), las dificultades se encontraron en el proceso de selección y desarrollo posterior.

➤ **En cuanto a la elección de estrategias, uso de los conocimientos previos, relaciones, inferencias, y recursos representacionales.**

Dentro el modelo contextual sobre el cual razona, parecería que el alumno busca en su memoria el conocimiento que mejor le resuene con lo pedido (problemas 1 y 4, trigonometría, o derivadas e integrales). Llegado a este punto, y aún habiendo seleccionado herramientas que pueden ser adecuadas para la matematización, puede suceder que falle el aspecto procedimental, o se busque el procedimiento más simple en detrimento de las restricciones de factibilidad del problema real, que son fácilmente sacrificadas.

La falta de recursos representacionales no permitirían estructurar la información y “economizar” recursos mentales, memoria y poder de razonamiento que es una de las características de la organización de la memoria (problemas 2 y 3).

La correcta diagramación o representación de este tipo de problema permite almacenar la información de estructuras más complejas que tienden a desintegrarse más rápidamente en la memoria (Brainerd y Reyna, 2001) y de esa manera al no quedar almacenada la correspondiente representación, el estudiante no puede disponer de esa información, de ahí que estos estudiantes no hayan podido “recorrer” todas las alternativas, limitándose a recorrer a lo sumo una parte del razonamiento (problema 3).

➤ **En cuanto a los procesos de control y factibilidad** , se ha observado que la sobre-simplificación de las situaciones, hace que los controles sobre los propios procesos fallen. Esta sobre-simplificación podría deberse a: la falta de conocimientos procedimentales sobre el modelo que el mismo alumno plantea, a las restricciones de “economía” impuestas

por la organización de la memoria y a la falta de estructuración y diagramación de la información (lo cual demanda considerable grado de abstracción).

Finalmente, para lograr una mejora en la habilidad para el modelado y resolución de situaciones problemáticas parecen necesarias las siguientes componentes:

- a) Conocimientos (al menos elementales) del contexto de trabajo, un modelo mental que estructure internamente, en una primera instancia, la situación planteada.
- b) Conocimiento de herramientas de trabajo, es decir, procedimientos y secuencias de procedimientos que permiten lograr determinados fines y un equilibrio adecuado entre conocimientos procedimentales y conceptuales (Hiebert y Lefevre, 1986).
- c) Sistema de representación adecuado junto con la capacidad para interactuar entre sistemas. Los distintos sistemas de representación debieran ser explícitamente trabajados en el entorno de la clase para favorecer el desarrollo de la habilidad para abstraer y codificar información en un nivel que permita una actividad mental más eficiente.
- d) Intuición e imaginación para elegir y combinar los elementos mencionados en una estrategia que lleve a la resolución del problema.
- e) Sistema regulador y controlador de las elecciones realizadas para que la estrategia resulte coherente, eficaz y factible.

Estas componentes, cuyo despliegue evidencia habilidades del que modela, pueden favorecerse a partir de la práctica sobre diversas situaciones no standard que favorezcan las asociaciones entre conocimientos y el desarrollo de distintos tipos de razonamiento. En este sentido, la matemática no sólo oferta conocimientos a nivel informativo para algunas resoluciones, sino algunas estructuras de razonamiento (representacional, secuencial, etc.).

Referencias:

Blum, W. *et al*, (2002) "ICMI Study 14: Applications and Modelling in Mathematics Education – Discussion document", *Educational Studies in Mathematics - Discussion Document*, 51(1, 2). Kluwer Academic Publishers, pp. 149-171 .

Berry J., Houston K., (2004) "Investigating student working styles in mathematical modelling activities". *ICMI Study 14: Applications and Modelling in Mathematics Education*. Study Conference in Dortmund (Germany) , Pre-Conference Volume. pp.35-40.

Brainerd, C. y Reyna, V. (2001). "Fuzzy-trace theory: Dual processes in memory, reasoning, and cognitive neuroscience". *Advances in Child Development Behavior*, Vol. 28, pp 49-100

Ervynck, G. (1991) "Mathematical Creativity", *Advanced Mathematical Thinking*, D. Tall (Ed.), Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, pp. 42-53.

Hiebert, J., Lefevre, P. (1986), "Conceptual and Procedural Knowledge in Mathematics: an Introductory Analysis", *Conceptual and Procedural Knowledge: The Case Of Mathematics*, Lawrence Erlbaum Associates Publishers, Hillsdale, N.J. pp.1-23.

Strauss, A. & Corbin, J.(1994). "Grounded theory methodology: an overview". Chap 17 in *Handbook of Qualitative Research* .Richardson.