

# DIFICULTADES EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE MATEMÁTICAS DE ESTUDIANTES PARA PROFESOR DE EDUCACIÓN PRIMARIA Y SECUNDARIA<sup>1</sup>

## Difficulties in solving mathematical problems of the students of primary and Secondary Education Teacher

Martín M. Socas, Josefa Hernández, M. Mercedes Palarea  
Universidad de La Laguna

### Resumen

*En esta comunicación se analizan dificultades y recursos que tienen los estudiantes para profesores de Educación Primaria y Secundaria al resolver problemas de Matemáticas, que se proponen como tareas y actividades básicas en un plan de formación inicial de Profesores de Matemáticas en la Educación Obligatoria, que facilitan el desarrollo de competencias profesionales útiles*

**Palabras clave:** *resolución de problemas, dificultades, recursos, formación de profesores.*

### Abstract

*We analyze in this communication the difficulties and students resources for teachers of primary and secondary education to solve mathematical problems, which are proposed as basic tasks and activities in an initial plan of training teachers of Mathematics in Compulsory Education, that facilitate the development of useful skills.*

**Keywords:** *problem solving, difficulties, resources, teacher training.*

### INTRODUCCIÓN

El análisis de los resultados obtenidos en diversas evaluaciones, a nivel nacional e internacional, ha puesto de manifiesto que la mayoría de los alumnos tienen serias dificultades al enfrentarse a la resolución de problemas de Matemáticas.

Varias han sido las revistas que han dedicado números monográficos a este tema. En especial destacan: SEIEM (2008), la *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik* ZDM (2008) y *The Mathematics Enthusiast* TME (2013).

En el Simposio de la SEIEM (2008) diferentes autores hacen una revisión sobre el estado de la resolución de problemas en el Seminario titulado: Resolución de problemas: 30 años después.

En la ZDM, titulada *Problem solving around the world – Summing up the state of the art*, pone de manifiesto cómo durante algún tiempo la “resolución de problemas” ha sido un tema fundamental en la investigación y en los currículos. En los variados trabajos se comprueba cómo el término “resolución de problemas” tiene diversos significados en diferentes países, e incluso en el mismo país. Los artículos tratan de responder a dos preguntas: ¿cuáles son los principales temas en la investigación? y ¿en los currículos?, ¿qué relaciones se establecen entre ambos? y muestra una variedad amplia de respuestas de los diferentes países (Törner, Schoenfeld y Reiss, 2008).

La segunda, la revista TME, en los números 1 y 2, volumen 10, *International Perspectives on Problem Solving Research in Mathematics Education*, a través de 18 artículos y más de 500

Socas, M. M., Hernández, J., y Palarea, M. M. (2014). Dificultades en la resolución de problemas de Matemáticas de estudiantes para Profesor de Educación Primaria y Secundaria. En J. L. González, J. A. Fernández-Plaza, E. Castro-Rodríguez, M. T. Sánchez-Compañía, C. Fernández, J. L. Lupiáñez y L. Puig (Eds.), *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de las Matemáticas y Educación Matemática - 2014* (pp. 145-154). Málaga: Departamento de Didáctica de las Matemáticas, de las Ciencias Sociales y de las Ciencias Experimentales y SEIEM.

páginas, ofrece al lector una presentación de la situación actual de la resolución de problemas, con trabajos de investigadores de México, Francia y España y autores pioneros como A. Schoenfeld, R. Lesh, F. Lester, entre otros (Santos-Trigo y Moreno-Armella, 2013).

Conviene destacar, en la problemática sobre la resolución de problemas, el papel esencial del profesorado de Educación Primaria y Secundaria, en la consecución de un aprendizaje efectivo en Matemáticas y de manera especial en resolución de problemas. Es, en este contexto, en el que emerge la necesidad de Programas de Formación de Profesores de Matemáticas. El trabajo que se presenta se sitúa en el marco de un Programa de Formación de Profesores de Matemáticas que se viene implementando en los últimos años en la Universidad de La Laguna, resaltando el papel de la Resolución de Problemas en la propuesta de formación, en la que se proponen tareas (buenas prácticas) que facilitan el desarrollo de competencias profesionales útiles para propiciar una enseñanza efectiva de las Matemáticas y de la Resolución de Problemas, estudios que tienen su origen a finales de los años noventa en la universidad citada, en los que han participado también alumnos de otras universidades españolas, y que muestran las enormes deficiencias de los alumnos que inician los estudios de Maestros de Educación Primaria en recursos básicos de Matemáticas. Los resultados obtenidos manifiestan que los alumnos utilizan como estrategia general, la tendencia a operar con los datos del problema, sin mostrar una clara comprensión del mismo y sin identificar las relaciones operacionales, conceptuales o procesuales que se dan. Aportan muchas veces soluciones que no pueden ser válidas para las condiciones del problema, lo que evidencia, además de una carencia de estrategias cognitivas (métodos heurísticos), una falta de pensamiento crítico (Palarea, Hernández y Socas, 2001).

En estudios posteriores los alumnos no mejoran los datos obtenidos con anterioridad, encontrándose que el énfasis que la enseñanza de las Matemáticas pone en el pensamiento operacional, puede estar creando dificultades y obstáculos al alumno en la aplicación, por ejemplo, de heurísticos y estrategias en la resolución de situaciones problemáticas que están más asociadas a un pensamiento estructural e incluso procesual, y que crea dificultades en la consecución de las competencias matemáticas (Socas y otros, 2009).

El marco conceptual utilizado toma como referencia el Enfoque Lógico Semiótico, ELOS (Socas, 2001, 2007), propuesta teórico-práctica que aporta instrumentos para el análisis, la descripción y la gestión de situaciones problemáticas en el microsistema educativo y centra su estudio en uno de los grandes problemas de la Educación Matemática, las dificultades y errores de los alumnos en el aprendizaje de las Matemáticas. En Socas (1997) se establecen cinco procedencias diferentes de las dificultades que tienen los alumnos en la construcción del conocimiento matemático y están relacionadas con: la complejidad de los objetos de las Matemáticas, las especificidades de los procesos de pensamiento matemático, los procedimientos de enseñanza desarrollados para el aprendizaje de las Matemáticas, los procesos de desarrollo cognitivo de los alumnos, y las actitudes afectivas y emocionales hacia las Matemáticas.

En este Enfoque, se toma como punto de partida el Modelo de Competencia Matemática Formal (CMF), que permite describir el campo conceptual del objeto matemático con sus funciones y su fenomenología, en términos operacionales, estructurales y procesuales y sus relaciones (Socas, 2010).

De manera resumida se puede expresar que cualquier actividad matemática puede ser descrita en relación a las tres componentes: operaciones, estructuras y procesos, y cada una de ellas queda determinada, a su vez, por otros tres elementos. Las *Operaciones* por operaciones, algoritmos y técnicas; las *Estructuras* por conceptos, propiedades y estructura; y los *Procesos* por sustituciones formales, generalización y modelización.

Además las actividades matemáticas están siempre situadas en un contexto que debemos analizar, y que viene descrito por las tres componentes: Situaciones problemáticas, Representaciones y

Argumentos. En las Situaciones problemáticas, se consideran las tres fases de la resolución de un problema: identificación, planteamiento y resolución, además de los contenidos matemáticos implicados en ellas; en las representaciones (lenguajes): el reconocimiento, la transformación y la elaboración de las mismas; y en los Argumentos (razonamientos): la descripción, justificación y razonamientos implicados.

Describimos brevemente, ahora, la propuesta de formación de los estudiantes para profesor de Matemáticas en la educación obligatoria (Socas y Hernández, 2013). Se trata de una propuesta global, desde una perspectiva profesional, que pretende facilitar un acercamiento desde el conocimiento matemático disciplinar, al conocimiento matemático curricular, al conocimiento didáctico matemático y al conocimiento de la práctica educativa, mediante una propuesta que va desde la globalidad general del currículo y del conocimiento matemático disciplinar implicado, a la totalidad organizada de un contenido curricular como contenido para enseñar.

La propuesta toma en consideración el conocimiento del profesor de Matemáticas, considerado como conocimiento profesional (Shulman, 1986; Hill, Ball, y Schilling, 2008).

Las consideraciones anteriores, sobre los conocimientos matemáticos de los estudiantes para profesores y los resultados de la investigación en Educación Matemática sobre el conocimiento matemático para la enseñanza (MKT: Mathematical Knowledge for Teaching), lleva a considerar que los conocimientos y competencias para la organización de los contenidos matemáticos, desde la perspectiva disciplinar, necesitan en los estudiantes para profesores una revisión de la disciplina en términos de unas “Matemáticas” para formar profesionalmente a los Profesores, que mejore, no solo sus conocimientos matemáticos sino sus creencias sobre la finalidad de estos conocimientos en la Educación Obligatoria.

Es en este marco en el que los autores desarrollan la investigación en relación con la resolución de problemas de Matemáticas. En la misma se considera de gran importancia determinar los recursos matemáticos que los estudiantes para profesores usan en la resolución de los problemas propuestos así como la identificación de las dificultades que tienen cuando se enfrentan a estos problemas.

Por ello las preguntas siguientes son las que han dirigido el propósito de esta investigación.

¿Qué tipo de recursos eligen los estudiantes para profesor de Matemáticas de Educación Primaria y Secundaria para resolver los problemas propuestos?

¿Qué tipo de dificultades tienen estos estudiantes al resolver los problemas propuestos?

En resumen, este trabajo es un estudio que tiene como objetivo analizar los recursos y las dificultades que exteriorizan los alumnos, estudiantes para profesores de Matemáticas en Primaria y Secundaria, cuando resuelven problemas de Matemáticas.

## **METODOLOGÍA**

Se analizan los problemas planteados a dos grupos de alumnos: 25 de un grupo de 90, del 3.<sup>er</sup> curso del Grado de Maestro en Educación Primaria, que cursan la materia Didáctica de la numeración, el azar y la probabilidad y 12 de un grupo de 27 alumnos de 3.<sup>er</sup> curso de la Licenciatura de Matemáticas en la materia optativa: Didáctica de las Matemáticas I (Licenciatura en extinción). La selección de los estudiantes se realiza a través del criterio de asistencia a las clases y participación en las tareas y actividades propuestas. En este informe de investigación consideraremos, para mostrar el análisis que realizamos, únicamente, a cuatro estudiantes para profesores, dos de Educación Primaria y otros dos de Educación Secundaria.

Los instrumentos para la recogida de la información fueron: cuestionarios, informes y análisis en grupo o puestas en común.

Se elaboraron dos cuestionarios, uno para cada nivel de profesores, en los que algunos problemas coincidían. A modo de ejemplo, seleccionamos una situación problemática del primer cuestionario (la 5) y dos del segundo (la 1 y la 2); planteadas en el formato “problemas” y comunes a los dos niveles. Estos problemas los hemos llamado: números cuadrados, puertas y trenes, respectivamente

Los cuestionarios se realizaron previamente y en los informes analizaron las respuestas correctas, erróneas y las no contestadas, de forma individual. Por ejemplo, en relación con el primer Informe que aborda aspectos sobre el Conocimiento Operacional, Estructural y Procesual, los alumnos respondieron a cuestiones como:

- Análisis de los errores cometidos en el cuestionario. Determinación del origen de los errores. En las cuestiones erróneas o sin contestar, explicar las razones y contestarlas correctamente.
- Análisis de los conocimientos operacionales, estructurales y procesuales utilizados en las respuestas dadas en el cuestionario, tanto las correctas como las incorrectas.
- Autoevaluación sobre los tipos de pensamiento utilizados en las respuestas.

En relación con el segundo Informe, que aborda específicamente cuestiones relacionadas con la resolución de problemas, los alumnos respondieron a cuestiones como:

- Resolver correctamente los problemas planteados (sin contestar o incompletos).
- Análisis de las dificultades y errores cometidos en la resolución de los problemas.
  - a. Identificar en cada problema las fases aceptación, bloqueo y exploración.
  - b. Determinar el origen de las dificultades y errores.
- Identificar diferentes razonamientos o heurísticos utilizados en las respuestas dadas al cuestionario.
- Plantear y resolver problemas mediante el uso de los diferentes heurísticos tratados, para un ciclo o nivel determinado.
- Elegir un problema y elaborar un mapa de los conocimientos implicados en el mismo.

En estas tareas propuestas es necesario, además de confirmar la validez como instrumento de medida, realizar el análisis del contenido matemático implícito en cada uno de ellos, a efectos de poder estudiar los diferentes recursos y significados que los estudiantes muestran en su resolución. El Análisis del Contenido nos permite determinar los dominios de la actividad matemática en relación con la Competencia Matemática Formal (CMF).

En la tarea 5, por ejemplo, se propone una situación problemática que se sitúa en el conocimiento procesual, en la que se pide la identificación y resolución del problema. Se trata de un proceso de generalización, en el que se da, de forma explícita, una descripción organizada de un comportamiento regular, en dos representaciones diferentes, en el que la regla, sin embargo, no viene dada de forma explícita. Se trata de establecer una igualdad, en la que alguna operación o alguna parte son desconocidas y están por determinar. Se sitúa la tarea en el desarrollo de las competencias generales de todo proceso matemático: reconocerlo, formularlo y manipularlo, que en este caso, se concreta en los cuatro momentos que caracterizan el proceso de generalización.

La tarea se organiza, en diferentes apartados, en la que se pide determinar otros números cuadrados más o menos cercanos a los que se facilitan, en uno de los dos registros, para terminar expresando el número cuadrado en la posición “n”.

En resumen, el dominio de la actividad matemática de cada una de las tareas, nos permite situarlas, como punto de partida, en uno de los ámbitos del campo conceptual estudiado: operacional, estructural y procesual, contextualizadas como situaciones problemáticas que los alumnos deben identificar y resolver, que implican diferentes escrituras y razonamientos, es decir, tareas que están

diseñadas para provocar, inicialmente una posible respuesta operacional, estructural o procesual, aunque ello no garantiza que ésta sea la respuesta inicial del alumnado, sin embargo, el modelo de competencia que describe el análisis del contenido, permite observar las diferentes situaciones e itinerarios que siguen los alumnos.

## ANÁLISIS DE DATOS Y DISCUSIÓN

Consideramos en primer lugar el problema de “las puertas”; en él encontramos estudiantes que no tienen dificultades para resolverlo, es decir, que no sufren un bloqueo en su resolución y se apoyan en diferentes recursos, y estudiantes que tienen verdaderas dificultades y manifiestan:

“En este problema me encontré en una fase de bloqueo, ya que no sabía cómo enfrentarme a él. Intenté buscar la solución, simplificando el problema, tomando 10 armarios, pero no llegué a la solución correcta. Creo que la forma en la que pensé en resolverlo inicialmente no fue la más adecuada ya que hacer una simplificación del problema, no nos daban datos lo suficientemente precisos como para llegar a una conjetura, la dificultad en este problema se centra en que teníamos que llegar a varias conjeturas, que en ese momento desconocía por completo el resultado que teníamos que usar para poder llegar a la solución (los únicos números que tienen un número impar de divisores son los números cuadrados)”

Solo es capaz de dar una respuesta como (Figura 1):

2) En el instituto Viera y Clavijo hay 1000 armarios y 1000 alumnos. Cada año, el primer día, los estudiantes se alinean y realizan el siguiente ritual: el primer estudiante abre todos los armarios; el segundo cierra cada dos armarios empezando por el segundo; el tercero cambia la situación de cada tres armarios empezando por el tercero (abre las cerradas y cierra las abiertas). El cuarto estudiante hace lo mismo cada cuatro armarios y así sucesivamente. Después de este ritual, ¿qué armarios quedan abiertos?

1º ESTUDIANTE → ABRE TODOS LOS ARMARIOS  
 2º ESTUDIANTE → CIERRA CADA DOS ARMARIOS, EMPEZANDO POR EL 2º  
 3º ESTUDIANTE → CAMBIA EN EL 3º Y CAMBIA LA SITUACIÓN DE CADA 3  
 4º ESTUDIANTE → CAMBIA EN EL 4º Y CAMBIA LA SITUACIÓN DE CADA 4

Veamos que pase 10 armarios y 10 alumnos:

1º ESTUDIANTE    ABIERTOS = { 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 }  
                           CERRADOS = { 2, 4, 6, 8, 10 }

2º ESTUDIANTE :    ABIERTO = { 1, 3, 5, 7, 9 }  
                           CERRADO = { 2, 4, 6, 8, 10 }

Figura 1. Respuesta de un estudiante para profesor de Primaria al problema de “las puertas”

Este es un ejemplo de un estudiante para profesor de Primaria. En el caso de estudiantes de Secundaria encontramos situaciones análogas (Figura 2):

3) En el instituto Viera y Clavijo hay 1000 armarios y 1000 alumnos. Cada año, el primer día, los estudiantes se alinean y realizan el siguiente ritual: el primer estudiante abre todos los armarios; el segundo cierra cada dos armarios empezando por el segundo; el tercero cambia la situación de cada tres armarios empezando por el tercero (abre las cerradas y cierra las abiertas). El cuarto estudiante hace lo mismo cada cuatro armarios y así sucesivamente. Después de este ritual, ¿qué armarios quedan abiertos?

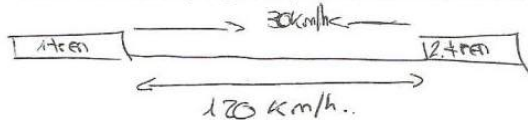
Simplifico el número de puertas y voy a calcularlo sobre 10.

Se quedan abiertas las puertas que corresponden a los números cuadrados 1, 4, 9, 16... o también por los que pasan un número impar de alumnos.

Figura 2. Respuesta de un estudiante para profesor de Secundaria al problema de “las puertas”

En el problema de “los trenes”, encontramos diferentes formas de resolver el problema que van desde la que muestra la figura 3 hasta situaciones como la que muestra la figura 4:

2) Dos trenes, separados entre sí por una distancia de 120 km se dirigen uno hacia otro en rumbo de colisión y ambos circulan a una velocidad de 30 km/h. Un pájaro vuela sin parar a una velocidad de 75 km/h entre las columnas de humo de los dos trenes, dando la vuelta al instante de llegar a cada extremo. Esto se prolonga hasta que ambos trenes colisionan dejando un montón de acero retorcido y algunas plumas. ¿Qué distancia recorrió el pájaro volando?



$$\begin{array}{r} 30 \overline{) 2} \\ 15 \ 3 \\ 5 \ 5 \\ \underline{1} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 75 \overline{) 3} \\ 25 \ 5 \\ 5 \ 5 \\ \underline{1} \end{array}$$

$$\begin{aligned} 30 &= 2 \cdot 3 \cdot 5 \\ 75 &= 3 \cdot 5^2 \\ \text{m.c.m} &= 25 \cdot 3 \cdot 2 = 150 \end{aligned}$$

→ 150 km la recorrió el pájaro volando.

Figura 3. Respuesta de un estudiante para profesor de Primaria al problema de “los trenes”

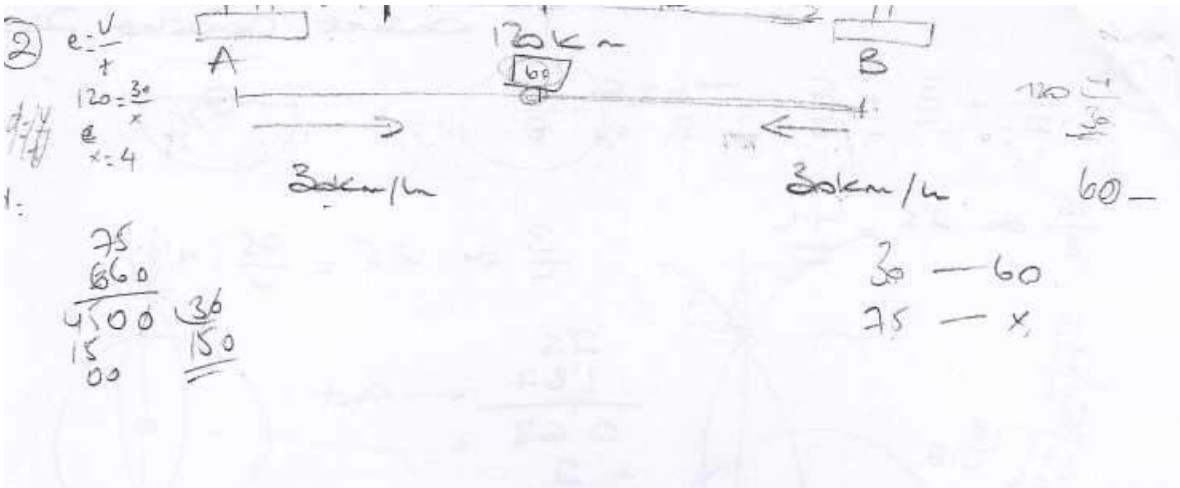


Figura 4. Respuesta de un estudiante para profesor de Secundaria al problema de “los trenes”

En el problema “números cuadrados”, volvemos a encontrar situaciones de bloqueo, como las dadas por las figuras 5 y 6:

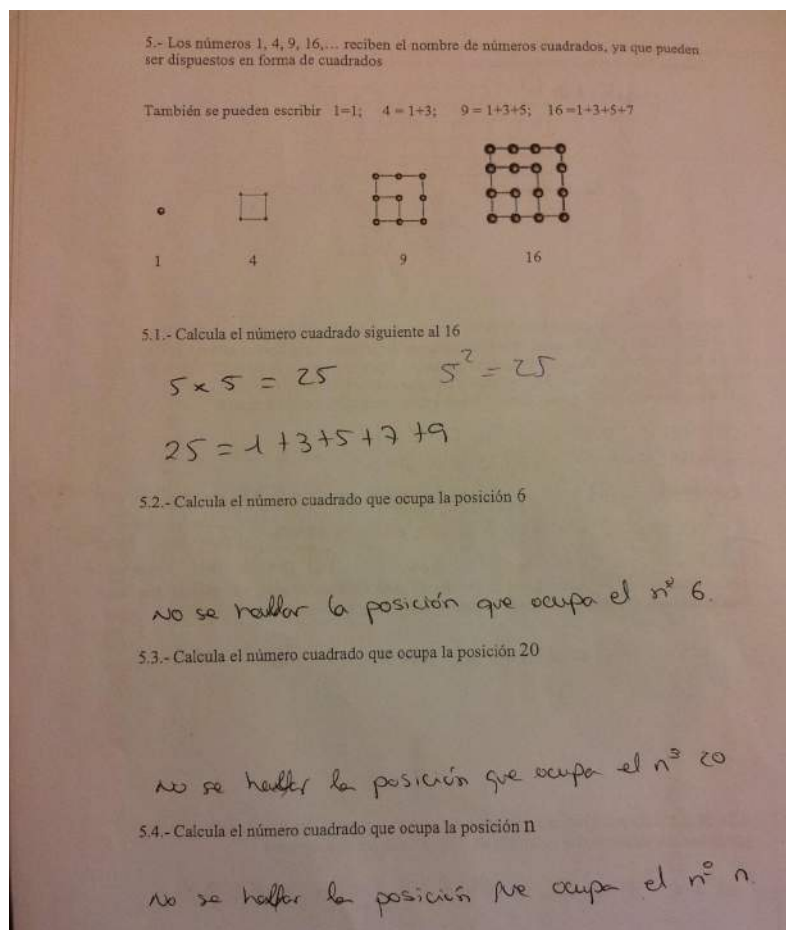
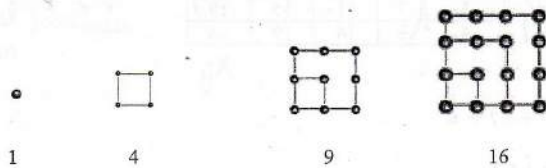


Figura 5. Respuesta de un estudiante para profesor de Primaria al problema “números cuadrados”

Hasta alumnos que responden correctamente con una variedad de razonamientos aplicados, llegando a una solución válida. Los alumnos utilizan diferentes tipos de conocimientos aunque predominen los operacionales, también identifican estructuras y desarrollan procesos como la sustitución formal, la generalización y la modelización

5.- Los números 1, 4, 9, 16, ... reciben el nombre de números cuadrados, ya que pueden ser dispuestos en forma de cuadrados

También se pueden escribir  $1=1$ ;  $4=1+3$ ;  $9=1+3+5$ ;  $16=1+3+5+7$



5.1.- Calcula el número cuadrado siguiente al 16

$$16^2 = 16 + 9 = 25$$

5.2.- Calcula el número cuadrado que ocupa la posición 6

$$25 + 11 = 36$$

5.3.- Calcula el número cuadrado que ocupa la posición 20

$$= 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19$$

$$a_n = 2n - 1$$

$$20^2 = 20 \cdot 20 = 400$$

~~1000 =~~

5.4.- Calcula el número cuadrado que ocupa la posición  $n$

En la posición  $n$  al  $n^2$  puntos  
 Que sería la suma de los  $n$  primeros números impares  
~~sucesión~~ Sucesión aritmética  $a_n = 2n - 1$   
~~sucesión~~  $S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$

Figura 5. Respuesta de un estudiante para profesor de Secundaria al problema “números cuadrados”

Unos estudiantes pasan por la fase de bloqueo que no llegan a superar:

“Me bloqueé en el momento de saber si los cálculos los tenía que hacer sobre el total o sobre el restante.”

“Mis dudas surgieron a la hora de calcular porque, a pesar de que lo representé, no sabía qué operaciones eran las adecuadas.”

“Fue difícil comprender el problema por cómo estaba redactado, estaba un poco enrollado.”

“Sabía que consistía en hallar una fórmula, pero no sabía cómo. Me bloqueé en ese momento.”

“Me bloqueo a la hora de sacar la generalización, pues no veo ninguna relación.”

“Pensaba que era un típico problema de ecuaciones, pero me doy cuenta que no tengo datos suficientes para resolverlo de esa manera, así que me bloqueo y no puedo continuar.”



Algunos identifican, para este tipo de problemas, que sus recursos le permiten seguir con la exploración del mismo, a pesar de haberse bloqueado. Buscan la manera de resolverlo utilizando diferentes heurísticos, e intentan llegar una solución y aunque no los resuelven todos correctamente, no dejan ninguno en blanco

En general el origen de las dificultades depende del problema, unas veces está asociado a la complejidad de los objetos matemáticos implicados en el problema, y manifiestan que han tenido que releerlo varias veces e irlo desglosando en partes.

Encuentran dificultades vinculadas con la afectividad y las emociones, por ejemplo, en los problemas de móviles que siempre han rechazado, por el proceso de pensamiento que generan y se pierden en el razonamiento. También en determinar el orden en que hay que realizar las operaciones, siendo incapaces de seguir un pensamiento lógico. Algunas veces tienen dificultad para identificar con claridad lo que le piden o para aplicar la heurística, aunque en general utilizan razonamientos heurísticos como “ensayo-error”, parece predominar “la analogía”, afirman “*recordé otros ejercicios de ese tipo que había hecho*”.

La simplificación y la construcción de un modelo son también otros tipos de razonamiento heurístico presentes en diversos estudiantes, ya que representan la situación para facilitar, de manera visual, la organización de los datos y la comprensión del problema. Por ejemplo la referencia al problema de las puertas es muy común: “*Replanteé el problema con menos puertas, con 100 en vez de con 1000 para ver si así descubriría la secuencia. Además construí un modelo para ver si eso me ayudaba a comprender el problema. No dibujé 1000 puertas, sino que simplifiqué y dibujé 100 y las fui tachando según se abrían o cerraban. Mi objetivo en este problema era buscar regularidades para luego generalizar, pero no lo conseguí*”.

En resumen, del análisis de la resolución de estos problemas y de los informes elaborados por los estudiantes, encontramos que los alumnos presentan diferentes tipos de dificultades. Unas relacionadas con los **Conocimientos lingüísticos**, asociados a la falta de comprensión del texto; **Conocimientos semánticos**, no saber el significado de las palabras; **Conocimientos de la estructura del problema** o conocimiento esquemático, que implica la comprensión global del texto y el conocimiento de los distintos tipos de problemas; **Conocimientos del lenguaje o de las representaciones** que pueden utilizar para resolver el problema; **Conocimientos de los razonamientos**, las estrategias generales, los heurísticos en los que se pueden apoyar; **Conocimiento de las operaciones** (operaciones, algoritmos y técnicas); **Conocimiento de las estructuras** (definiciones, propiedades y estructuras); y, **Conocimiento de los procesos** (sustitución formal, generalización y modelización).

## Referencias

- Hill, H. C., Ball, D. L., & Schilling, S. G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 39, 372-400.
- Palarea, M. M., Hernández, J. y Socas, M. M. (2001). Análisis del nivel de conocimientos de Matemáticas de los alumnos que comienzan la Diplomatura de Maestro. En Socas, Camacho y Morales (Eds.), *Formación del Profesorado e Investigación en Educación Matemática III*, 213-226. CAMPUS. La Laguna.
- Santos-Trigo, M., & Moreno-Armella, L. (Eds.) (2013). International Perspectives on Problem Solving Research in Mathematics Education. *The Mathematics Enthusiast*, 10, 1 y 2.
- Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 17(1), 4-14.
- Socas, M. M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las Matemáticas en la Educación Secundaria. (Cap.V, 125-154). En L. Rico et al. *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria*. Barcelona: Horsori.

- Socas, M. M. (2001). *Investigación en Didáctica de la Matemática vía Modelos de competencia. Un estudio en relación con el Lenguaje Algebraico*. Departamento de Análisis Matemático. Universidad de La Laguna.
- Socas, M. M. (2007). Dificultades y errores en el aprendizaje de las Matemáticas. Análisis desde el Enfoque Lógico Semiótico. *Investigación en Educación Matemática XI*, 19-52.
- Socas, M. M. (2010). Competencia matemática formal. Un ejemplo: el Álgebra escolar. *Formación del Profesorado e Investigación en Educación Matemática X*, 9-43.
- Socas, M. M., & Hernández, J. (2013). Mathematical Problem Solving in Training Elementary Teachers from a Semiotic Logical Approach. *The Mathematics Enthusiast*, 10, 1 y 2, 191-218.
- Socas, M. M., Hernández, J., Palarea, M. M., Afonso, M. C. (2009). La influencia del pensamiento operacional en el aprendizaje de las Matemáticas y el desarrollo de las competencias matemáticas *Indivisa. Boletín de Estudios e Investigación. Monografía XII*, 101-119.
- Törner, G., Schoenfeld, A. H., & Reiss, K. (Eds.) (2008). Problem solving around the world – Summing up the state of the art. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*.

---

<sup>1</sup> Este trabajo ha sido financiado parcialmente por el Plan Nacional de Investigación del Ministerio de Ciencia e Innovación: “Modelos de competencia formal y cognitiva en pensamiento numérico y algebraico de alumnos de Primaria, Secundaria y de Profesorado de Primaria en formación” (EDU2011-29324).