

## METODOLOGÍA PARA EL DISEÑO DE ACTIVIDADES DIDÁCTICAS BASADAS EN MODELACIÓN MATEMÁTICA

María del Consuelo Macías González y Avenilde Romo Vázquez  
Tecnológico de Estudios Superiores de Cuautitlán, Izcalli.  
Instituto Politécnico Nacional.  
ingconsuelomacias10@hotmail.com, avenilderv@yahoo.com.mx

México

**Resumen.** La modelación matemática ha ido ocupando un lugar importante tanto en los planes y programas educativos como en la investigación en Matemática Educativa. Con el objetivo de generar actividades didácticas basadas en modelación matemática adaptadas a la formación de futuros ingenieros. Se propuso una metodología para el diseño de actividades didácticas que consta de cuatro fases y que se apoya en el modelo praxeológico extendido de la Teoría Antropológica de lo Didáctico.

**Palabras clave:** Metodología, modelación matemática, actividades didácticas

**Abstract.** Mathematical modeling has been filling an important place in the plans of educational programs and Mathematics Education research. With the objective to create learning activities based on mathematical modeling adapted to the training of future engineers, we consider educational activities by a math teacher in a course of Teaching Mathematics model. They proposed a methodology for the design of educational activities consisting of four phases steps, which is based on the model and the method praxeological method, extending with the anthropological didactic theory.

**Key words:** Methodology, mathematical modeling, learning activities

### Introducción

La mayoría de las formaciones de futuros ingenieros siguen un modelo de formación que se divide en dos grandes tipos: básica y de especialidad. Los cursos de matemáticas ocupan un lugar importante en número de horas dentro de la formación básica. Esta es señalada como generadora de herramientas útiles para la formación de especialidad, por lo cual la antecede, y para la práctica profesional. Diferentes investigaciones han mostrado que las necesidades matemáticas del ingeniero se han modificado con la omnipresencia de programas computacionales que permiten realizar el trabajo matemático que antes se hacía a lápiz y papel (Kent y Noss 2002; Kent, 2007; Albertí et. al. 2010; y Romo-Vázquez 2009 y 2010). Estas y otras investigaciones (Pollak 1988 y Bissell 2002) reconocen que en la práctica existen dos tipos de necesidades matemáticas: avanzadas (requieren nociones matemáticas avanzadas) para comprender los modelos matemáticos y básicas (técnicas y procedimientos matemáticos básicos) para operacionalizar los modelos matemáticos. Bissell (2000 y 2002) reconoce que el uso de modelos matemáticos en la práctica no atiende a una construcción del modelo matemático sino a diferentes refinamientos y adaptaciones para situaciones específicas. Para abordar este problema de investigación en Macías (2012) se analizó primeramente el programa de álgebra lineal del Tecnológico de Estudios Superiores de Cuautitlán Izcalli, lo que nos permitió ver que en sus objetivos se reconoce a la modelización matemática (asociada al uso de modelos lineales) como la que permite caracterizar muchos de los

fenómenos de la ingeniería. El interés de enseñar esta materia es que los estudiantes puedan modelar dichos fenómenos, resolver problemas de aplicación e interpretar soluciones. Aunque no se precisan los dispositivos didácticos que lo permitirían, consideramos que estos elementos son de suma importancia en la formación de especialidad y en la práctica de los ingenieros.

Considerando la problemática antes expuesta, uno de los objetivos que condujo la investigación de Macías (2012) fue el de proponer una herramienta metodológica para el diseño de actividades didácticas de modelización matemática para una formación de ingenieros. Dicha metodología se basa en el modelo praxeológico extendido Castela y Romo (2011), el cual presentamos a continuación.

### El modelo praxeológico extendido

En el modelo praxeológico clásico propuesto por Chevallard (1999) se reconoce a la praxeología  $[T, \tau, \theta, \Theta]$ , como una unidad mínima de análisis de la actividad humana, sus cuatro componentes son: tipo de tarea  $T$ , técnica  $\tau$ , tecnología  $\theta$  y teoría  $\Theta$ . La tarea es lo que se hace, la técnica es la manera en que se hace, la tecnología es un discurso que produce, justifica y explica la técnica, la teoría a su vez produce, justifica y explica la tecnología. El modelo praxeológico extendido considera, a diferencia del clásico, dos componentes tecnológicas: teórica  $\theta^{\text{th}}$  y práctica  $\theta^{\text{p}}$ . Particularmente, la componente práctica es un discurso que tiene seis funciones que permiten, describir, validar, explicar, facilitar, motivar y evaluar el uso de técnicas matemáticas en referencia a instituciones usuarias, no necesariamente matemáticas. El modelo puede expresarse de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} T, \tau, \theta^{\text{th}}, \Theta \\ T, \tau, \theta^{\text{p}} \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow P(S) \\ \leftarrow I_u \end{matrix}$$

Donde  $P(S)$  designa la institución productora de saberes e  $I_u$  la institución usuaria de dichos saberes. Asumimos que para resolver tareas en contextos extra-matemáticos el **uso** de saberes y más precisamente de modelos matemáticos, se hace mediante técnicas matemáticas validadas por saberes matemáticos  $\theta^{\text{th}}$ . El uso de la técnica (reconocimiento de la naturaleza de la tarea, elección de la técnica más óptima, reconocimiento del contexto en el que se usa, adaptaciones de la técnica al contexto, etc.) es validado por saberes prácticos  $\theta^{\text{p}}$ , legitimados por  $I_u$ .

Las seis funciones de la componente tecnológica práctica se precisan en Castela y Romo (2011). Asumimos que el uso de saberes y modelos matemáticos se hace mediante técnicas matemáticas que provienen del modelo mismo y/o de otros saberes matemáticos. La adaptación de modelos matemáticos para resolver tareas no matemáticas exige además de tecnologías teóricas, tecnologías prácticas producidas por  $I_u$ . Estas tecnologías prácticas permitirán validar la elección

del modelo matemático para resolver tareas no matemáticas, asegurar su eficacia en contextos extra-matemáticos, determinar los elementos contextuales/prácticos necesarios para poder adaptar/trasponer/usar dicho modelo. Asimismo, estas tecnologías permiten interpretar los resultados obtenidos a través del modelo en relación al contexto en el que se está utilizando.

Dentro del modelo praxeológico extendido las validaciones teóricas (matemáticas) están intrínsecamente relacionadas con las validaciones prácticas, separarlas corresponde sólo a un objetivo metodológico que permita describir su naturaleza. Tanto la noción de praxeología como el modelo praxeológico extendido nos permiten sustentar la metodología desarrollada para el diseño de actividades didácticas de modelación, la cual presentamos a continuación.

### Metodología para el diseño de actividades basadas en modelización matemática

Para el diseño de actividades didácticas basadas en modelización matemática se proponen cuatro fases:

1. Elección del contexto extra-matemático (aunque podría considerarse un contexto matemático) de la actividad
2. Naturaleza de la actividad, problema, ejercicio, praxeología mixta
3. Elegir y describir el modelo matemático en uso
4. Describir los conocimientos y técnicas matemáticas necesarias para resolver la actividad

#### 1) Elección del contexto de la actividad

Las actividades didácticas basadas en modelización matemática pueden ser propuestas en contextos no matemáticos, la elección del contexto podría hacerse buscando que éste sea cercano al estudiante, de manera que le permita asociar un significado contextual al modelo matemático en uso. Es decir, se asume que los conocimientos sobre el contexto podrían favorecer la generación/construcción de conocimientos/significados sobre el modelo matemático en uso. Aunque lo anterior parece tener sentido y puede ser apoyado en diferentes teorías didácticas, puede resultar muy complejo en los niveles básico y medio superior, pues no es fácil encontrar un contexto que sea cercano a cada estudiante del grupo. En el nivel universitario podría decirse que las matemáticas se enseñan por considerarlas una disciplina útil tanto para la formación básica como para la de especialidad, a menos que sea una formación de futuros matemáticos. Por lo que una alternativa sería investigar sobre el uso de modelos matemáticos en las disciplinas de especialidad y/o en la práctica. Una complejidad que tendría que enfrentarse es que tanto las disciplinas como la práctica obedecen a sus propias lógicas y por tanto es necesario comprenderlas, al menos en cierta medida, para poder elegir el contexto de uso de dichos modelos.

## 2) Naturaleza de la actividad, problema, ejercicio, praxeología mixta

Las actividades de modelización pueden contener praxeologías matemáticas y/o praxeologías mixtas. Una praxeología matemática está compuesta por una tarea matemática (consigna), que se resuelve a través de una técnica matemática (manera de hacer/procedimiento), justificada, validada, explicada por una tecnología matemática (lo que valida la manera de hacer) y ésta a su vez por una teoría matemática (que valida de manera más general la tecnología y por tanto la técnica).

Una praxeología mixta puede contener elementos matemáticos y no matemáticos. Por ejemplo, una tarea no matemática resuelta a través de una técnica matemática, solicita por tanto una validación matemática pero también validaciones no matemáticas relativas a la naturaleza de la tarea. Sin embargo, este tipo de praxeologías va a solicitar a su vez validaciones no matemáticas, de tipo experimental por ejemplo o validaciones relacionadas al contexto en el que se inscribe la tarea. La componente tecnológica (justificación/explicación/validación) en este caso puede ser matemática es decir teórica  $\theta^{\text{th}}$  y/o práctica  $\theta^{\text{p}}$ .

Dependiendo del tipo de praxeologías podrá explicitarse la componente teoría  $\Theta$  relacionada a la tecnología teórica, la cual sería una teoría de la disciplina matemática o bien de la matemática escolar. Asimismo, dependiendo del tipo de tarea y del contexto que la produce habrá una instancia, no exactamente teórica, pero que valide de manera más general la tecnología práctica.

Caracterización de tipo de tareas

### ❖ Tareas matemáticas

Las tareas matemáticas son consignas que solicitan una técnica (resolución) y una solución matemática. Por ejemplo:

Encontrar los máximos y mínimos de la función  $f(x) = x^6$

Esta tarea requiere que se encuentren máximos y mínimos, para realizarla es necesario movilizar los conceptos de máximos y mínimos así como las técnicas matemáticas asociadas a éstos. Otro ejemplo es:

Determina las ecuaciones de la tangente y normal en su punto de inflexión a la curva:

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 7x + 1$$

Para realizar esta tarea, al igual que la anterior, es necesario movilizar tanto conceptos como técnicas matemáticas. En este ejemplo en particular, se requieren los conceptos de ecuaciones de la tangente y normal, punto de inflexión a una curva.

### ❖ Tareas no matemáticas

En este tipo de tareas la consigna no es matemática, puede requerir o no del uso de una técnica matemática para realizarla. Algunos ejemplos de tareas no matemáticas:

#### ❖ Cruzar la calle

- ❖ Comprar un helado
- ❖ Elegir un programa de televisión
- ❖ Dormir la siesta
- ❖ Tareas matemáticas en contextos no matemáticos

En este tipo de tareas aparecen en un contexto no matemático, para la tarea en la que se requiera una técnica matemática para su resolución no necesariamente parece de manera explícita. Por tanto, requieren un entendimiento del contexto para reconocer la necesidad de utilizar una técnica matemática para resolver la tarea en cuestión. Su resolución requerirá por tanto un conocimiento de la técnica matemática pero también del contexto, dicho de otra manera requerirá una adaptación de la técnica para realizar este tipo de tarea.

Algunos ejemplos de este tipo de tareas se presentan a continuación.

- ❖ Estudiar la actividad eléctrica del cerebro
- ❖ Modelar un motor a corriente continua

Este tipo de tareas puede asociarse a las tareas escolares que aparecen en los libros de matemáticas reconocidas como “aplicaciones de matemáticas”.

### 3) Elegir y describir el modelo matemático en uso

Describir el modelo en uso permitirá evidenciar las razones relativas al contexto extra-matemático por las cuales dicho modelo se ha elegido para resolver tareas del contexto extra-matemático. Interrogarse sobre los elementos que validan el uso del modelo y en qué condiciones, permitirá comprender qué elementos contextuales deben considerarse en el diseño de las actividades didácticas. Por ejemplo, muchos de los modelos matemáticos se usan en condiciones “ideales”, lo que permite resolver ciertas tareas con mayor facilidad matemática, requiriendo luego la adaptación de las soluciones obtenidas al contexto de aplicación. Dicha adaptación es hecha en base a ciertos elementos que la validan y nos parece muy importante reconocer esos elementos para el diseño de la actividad didáctica, particularmente para analizarlos y ver en qué medida podrían ser considerados para un contexto de aula. Reconocer las explicaciones del uso, permite saber qué representa cada elemento del modelo, en qué medida el modelo utilizado permite modelar el contexto (o parte de éste). Analizar los elementos que favorecen el uso del modelo nos parece evidenciará elementos del proceso de modelización matemática, en el cual no sólo importa que el modelo matemático permita resolver un problema del contexto extra-matemático sino que esa resolución sea la menos compleja y la más cómoda para el usuario. Por tanto, es importante reconocer los elementos que favorecen el uso y analizar la manera en que podrían ser considerados en el diseño de la actividad didáctica. De la misma manera, es necesario analizar los elementos motivadores del uso del modelo, esta fase nos

parece que medular para el diseño de las actividades didácticas para la formación de futuros ingenieros.

#### 4) Describir los conocimientos y técnicas matemáticas necesarias para resolver la actividad

Por último consideramos necesarios describir las tareas que conforman la actividad de modelización matemática, las técnicas disponibles o que se deben generar para poder realizar estas tareas. De la misma manera, es necesario describir las tecnologías que sustentan dichas técnicas. Esta descripción debe hacerse desde un punto de vista didáctico por lo que es necesario explicitar el objetivo de cada tarea que conforma la actividad, la técnica que permite resolverla y sobre todo que elementos permiten validarla, explicarla y justificarla. Es importante considerar la naturaleza de las validaciones, pues éstas serán matemáticas (teóricas) para sustentar la técnica matemática, pero seguramente surgirán otro tipo de validaciones relativas a la adaptación de la técnica al contexto de la tarea y sobre todo a la actividad de modelar. Este análisis de las actividades permitirá anticipar lo que los estudiantes harán al resolver la actividad y de manera más general el lugar que puede ocupar en su implementación escolar.

#### Una primera experimentación de la metodología

Esta metodología fue objeto de una primera experimentación siguiendo dos fases: 1) Analizar modelos matemáticos en un contexto de ingeniería biomédica; 2) Proporcionar la metodología y el análisis del contexto de la ingeniería biomédica a un grupo de profesores de matemáticas y solicitarles el diseño de actividades didácticas basadas en modelización matemática.

La primera fase tiene que ver con comprobar la factibilidad del análisis de modelos matemáticos en uso en un contexto ingenieril. En esta fase, conjuntamente con ingenieros biomédicos de la Universidad de Guadalajara, se profundizó en el análisis del método de Separación Ciega de Fuentes (Blind Separation Sources –BSS) en el cual se utilizan vectores y matrices. Una vez analizado y descrito el método de la BSS se procedió a la segunda fase de prueba de la metodología, en la cual se buscaba comprobar si a partir de un contexto de uso analizado (disponible) era posible diseñar las actividades didácticas basadas en modelización matemática. Para llevar a cabo esta segunda fase se consideró a un grupo de profesores de matemáticas alumnos de la maestría en Matemática Educativa del Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada (CICATA, unidad Legaria). En uno de los cursos de la maestría, se les proporcionó a los profesores una descripción del método de la BSS y la metodología para el diseño de actividades didácticas basadas en modelización matemática. Los participantes del curso produjeron actividades que constituyen una base para el desarrollo de secuencias didácticas que pueden ser llevadas al aula. Es decir, las actividades por los profesores son el resultado de una primera transposición del método de la BSS para ser adaptado a condiciones de enseñanza de las matemáticas del nivel en el que labora el profesor (participante del curso). Esta

transposición parece efectuarse sobre la descripción de la BSS dada y sobre investigaciones que cada uno realiza para comprender el principio del método y diseñar actividades aptas a los cursos que imparten. Para ilustrar lo anterior, presentamos una tarea que propone Luis, participante del curso: Esta información proviene de la mezcla de diversas fuentes de origen cerebral. Propón una manera de separar la información inicial  $X$  en la combinación de otras representaciones más simples.

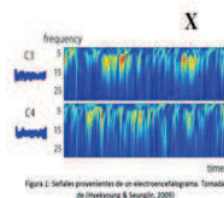


Figura 2. Imagen que muestra el profesor Luis en su actividad

La tarea propuesta es muy general y no presenta el principio del método, pero el profesor Luis menciona antes de proponer la actividad que pedirá a los estudiantes hacer una investigación sobre la BSS. El mismo profesor presenta una reflexión en este sentido, señalando que esta tarea es abierta, amplia y que podría ser enfrentada de maneras diversas sin necesariamente lograr el objetivo que él se propone, acercarlos al principio de la BSS.

Por ejemplo, se podría presentar una de las matrices que resultan de la observación de las señales en un EEG (Figura 1) y plantear a los estudiantes que, de manera preliminar, intenten proponer una estrategia para hacer separaciones de los registros del EEG. Seguramente, esta tarea no sea nada sencilla. Se piensa que existan quienes propongan separar la información por colores, por segmentos, etc. Como se puede inferir, este puede ser un inicio bastante significativo en torno, a lo que implicará posteriormente transformar una matriz en la suma o producto de otras. Y es que en esencia, para “separar” una matriz de esa manera, es necesario proponer la separación y luego realizar procesos que validen el resultado.

Las actividades propuestas por los profesores adoptan en lenguaje praxeológico para ser propuestas y en ese sentido consideramos que la metodología pone a su disposición una herramienta para expresar las actividades. Sin embargo, dichas actividades no constituyen, como lo mencionamos anteriormente, actividades que puedan ser llevadas al aula sino actividades en el proceso de diseño. El curso de procesos nos parece constituyó un marco institucional propicio para probar la metodología, pues los profesores tienen condiciones y recursos dentro del mismo curso que hace que la utilicen. Sin embargo, como todo curso existe un tiempo para cada actividad y eso no permite que los profesores empleen más tiempo en el diseño, ni tengan un espacio más amplio para retroalimentarse entre pares para producir actividades didácticas que puedan aplicarse en el aula. Esto nos motivó a elegir una de las actividades propuestas y desarrollar una secuencia que aparece en Macías (2012). Consideramos que esta propuesta

metodológica abre una perspectiva para el diseño de actividades basadas en modelización que tomen como base el análisis de modelos matemáticos en uso. Sin embargo, cada una de las fases requiere de ser profundizada y cotejada con experimentaciones experimentales de la secuencia producida en el aula.

### Referencias bibliográficas

- Alberti, M. (2010). Mathematics for Engineering and Engineering for Mathematics. En M. Alberti, S. Amat, S. Busquier, P. Romero y J. Tejada (Eds). *ICMI 20: Educational Interfaces between Mathematics and Industry*. <http://col22w.col22.mail.live.com/default.aspx?wa=wsignin1.0>
- Bissell, C.C. (2000). Telling tales models, stories and meanings, *For the learning of mathematics*, 20(3), 3—11.
- Bissell, C.C. (2002). Histoires, héritages et herméneutique (la vie quotidienne des mathématiques de l'ingénieur, *Annales des Ponts et Chaussées*, 107-8, 4–9
- Blum, W. Galbraith, L., Henn, H. y Niss, M. (2007). *Modelling and Applications in Mathematics Education*. New York: Springer
- Castela C. et Romo-Vázquez, A. (2011). Des mathématiques a l'automatique : étude des effets de transposition sur la transformée de Laplace dans la formation des ingénieurs. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 31(1). 79-130.
- Chevallard, Y. (1999). El análisis de las prácticas docentes en la Teoría Antropológica de lo Didáctico. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19 (2), 221- 266.
- Congedo, M., Gouypailler, C. & Jutten, C. (2008). On the blind source separation of human electroencephalogram by approximate joint diagonalization of second order statistics. *Clinical Neurophysiology*, 119(12). 2677–2686.
- Kachenoura, A. (2006). *Traitement Aveugle de Signaux Biomédicaux*. Traitement du signal et telecommunications, L'Universite de Rennes I, France.
- Kent, P. (2007). Learning Advanced Mathematics: The case of Engineering courses. contribution to the NCTM Handbook chapter: Mathematics thinking and learning at postsecondary level. In Lester, K., F. (Ed.), *Second handbook of research on 88 mathematics teaching and learning: a project of the National Council of Teachers of Mathematics*. (pp. 1042-1051). Charlotte, NC: Information Age Pub



Kent, P., & Noss, R. (2002). The mathematical components of engineering expertise : The relationship between doing and understanding mathematics. *Proceedings of the IEE Second Annual Symposium on Engineering Education: Professional Engineering Scenarios 2* (pp.39/1 -39/7). London U.K.

Macias, C. (2012). *Uso de las nuevas tecnologías en la formación matemática de ingenieros*. Tesis de Maestría no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Pollak H. O. (1988). Mathematics as a service subject- why? In A. G. Howson et al. (Eds), *Mathematics as a service subject*. pp.28-34. Cambridge: Cambridge University Press (Series : ICMI study).

Romo-Vázquez, R., Velez-Perez, H., Ranta, R., Louis-Dorr, V., Maquin, D. & Maillard, L. (2012). Blind source separation, wavelet denoising and discriminant analysis for EEG artefacts and noise cancelling, *Biomedical Signal Processing and Control*, 7(4). 389-400.