

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS ADITIVOS POR ESTUDIANTES DE SECUNDARIA

Mario Hernández Pérez y Aurora Gallardo Cabello
Cinvestav - IPN
mhernandezp@cinvestav.mx, agallardo@cinvestav.mx

México

Resumen. Estudiantes de un grupo de tercero de secundaria de edades entre 14 y 16 años resuelven *problemas aditivos*. Los resultados muestran el uso del *número negativo: sustractivo, relativo, signado y aislado* utilizando distintos recursos como: *la recta numérica, aritmética, representaciones concretas, lenguaje algebraico, lenguaje verbal, expresiones sintácticas*. Advertimos que reconocen *formas semánticas equivalentes*. Los problemas correspondientes a las categorías *Variación de variaciones* y *Combinación de comparaciones adyacentes* resultaron ser las más difíciles para los estudiantes. En este tipo de problemas los alumnos utilizan mayor variedad de recursos; aunque no siempre arriban a una resolución *sintáctica correcta*.

Palabras clave: problemas aditivos, negatividad, modelos de enseñanza

Abstract. Students of a group of ninth graders, ages 14 to 16 are resolving *additive problems*. The results show the use of *negative numbers: subtractive number, signed, relative and isolated* using various resources such as the *number line, arithmetic, concrete representations, algebraic language, verbal language and syntactic expressions*. We note that they recognize *semantic equivalent forms*. The problems corresponding in the categories *Variation of variations and Adjacent combination comparisons* were the most difficult for students. In this type of problems the students use major varieties of resources, but not always arriving at correct *syntactic resolutions*

Key words: additive problems, negativity, teaching models

Introducción

Marco teórico

Hemos observado que los alumnos de secundaria en muchos casos no aceptan soluciones *negativas* en *problemas de enunciado verbal* aunque llegan a respuestas equivalentes utilizando *positivos*. En la propuesta Institucional SEP (2006) se presentan situaciones de temperatura, deportes, ganancias, pérdidas, elevador, recta numérica, plano cartesiano y localización de fechas para darle sentido a los *negativos*.

De estas últimas aseveraciones, intentamos responder las siguientes interrogantes:

¿Qué niveles conceptuales de la negatividad consideran los estudiantes de secundaria al resolver problemas aditivos?

¿Qué tipo de estructura funcional y forma semántica de enunciados verbales son más difíciles para los alumnos?

Recurrimos a Bruno y Martín (1997) quienes hacen una clasificación de *problemas aditivos* distinguiendo entre la *estructura funcional* como el tipo de situaciones numéricas (*estados, variaciones y comparaciones*) y la *forma semántica* definida como la expresión en *lenguaje verbal* de dichas situaciones numéricas. Bruno y Martín (1994) definen *problemas aditivos simples de enunciado verbal* como los traducidos en sumas y restas de dos números enteros. Y advierten la

existencia de *formas semánticas equivalentes* para representar una misma situación numérica. Por ejemplo, en el caso de las *variaciones* Bruno y Martínón (1997) plantean que las expresiones: “Ernesto tiene 3 pesos menos por la mañana que por la noche, Ernesto tiene 3 pesos más por la noche que por la mañana” (p. 34.) son equivalentes.

Además de la clasificación de Bruno y Martínón (1997) nos basamos, en Gallardo (1994) que advierte de la existencia de los siguientes *niveles conceptuales de negatividad*:

“Número sustractivo. Donde la noción de número está subordinada a la magnitud. En la resta de dos cantidades **a-b**, siempre que **b** será menor que **a**, donde, **a**, **b** son números naturales.

Número signado. Es el número natural al que se le asigna un signo más o un signo menos.

Número relativo. Se hace presente cuando se puede concebir la idea de opuestos en situaciones discretas, así como la idea de simetría en situaciones continuas.

Número aislado. Surge al aceptar un número negativo como solución de una operación o ecuación” (Gallardo, 2002, p. 179).

Método

La población estudiantil fue de 35 alumnos de un grupo de tercero de secundaria de edades de 14 a 16 años de una escuela pública urbana de la Ciudad de México.

Los instrumentos metodológicos fueron un cuestionario diagnóstico, un cuestionario exploratorio y entrevistas individuales video grabadas en situación de aula, que permitieron el análisis de 5 de las 11 categorías de la clasificación de problemas de Bruno y Martínón (1997). Estas son las siguientes: *Variación de un estado*, *Variación de variaciones*, *Comparación de estados*, *Combinación de estados*, *Combinación de comparaciones adyacentes*.

En este artículo se define y ejemplifica una de las cinco categorías anteriores donde se introducen los conceptos previos siguientes: *estado* y *comparación*.

Estado. Tiene un sujeto, una magnitud y una unidad de medida en un instante determinado. Por ejemplo: en la Ciudad de México la temperatura en este instante es de 20° C.

Comparación. Es la diferencia entre dos estados; aquí el tiempo no está involucrado. Por ejemplo: Juan tiene cinco pesos menos que Luis.

Combinación de comparaciones adyacentes. Existen tres *funciones estado* independientes. Ejemplo: Pedro tiene cuatro pesos menos que Francisco y, José tiene seis pesos más que Pedro. Podemos comparar los estados y así indicar cuántos pesos tiene José en comparación a Francisco.


Los autores advierten: “el esbozo que presentamos aquí exigiría, para su plena utilidad, una investigación didáctica que por nuestra parte sólo está recientemente iniciada y cuya conclusión no es inmediata” (Bruno y Martínón 1997 p. 34).


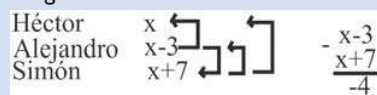

A continuación se presentan en formato de tabla el desempeño de 35 estudiantes en un problema de *Combinación de comparaciones adyacentes* donde se exhiben los niveles conceptuales de negatividad y diversos modelos de enseñanza: sintáctico y la recta numérica entre otros.

Alejandro tiene 3 canicas menos que Héctor, Simón tiene 7 canicas más que Alejandro. ¿Cuántas canicas más tiene Simón que Héctor? (Bruno y Martínón 1997 citado en Alcántara, 2010).

Resultado. $(-3)+(+7)=(+4)$

Categoría: combianción de comparaciones adyacentes

Núm. de alumnos	Resultado	Proceso de resolución
I	4 canicas.	Expresiones algebraicas y lenguaje verbal explicando la relación entre las tres cantidades dadas. Alejandro = $x-3$ Héctor = x Simón = $x-3+7$ Número sustractivo.
I	4 canicas.	Expresiones algebraicas y uso del lenguaje verbal. x $x-3$ $x-3+7$ $x+4$ $-3+7=+4$ Número sustractivo y signado.
I	4 canicas.	Expresiones algebraicas. Alejandro Simón Héctor Número sustractivo y relativo. $(x-3)$ $(x-3)+7$ $(x+3)$
I	4 canicas.	Sustracción de expresiones algebraicas. Alejandro= x Héctor= $x+3$ Simón= $x+7$ $(x+7)-(x+3)=4$ Número sustractivo.
I	4 canicas.	Asigna a Alejandro y Simón valores enteros. Ningún número asocia con Héctor. Agrega una sustracción de naturales. Héctor ? Alejandro -3 Simón +7 $7-3=4$ Número sustractivo y aislado.
I	4 canicas.	Lenguaje verbal y expresión sintáctica con un sumando negativo. $-3+7=4$ Número signado.
I	4 canicas.	Expresiones algebraicas, sustracción de A en S. $A=H-3$ $S=A+7$ $S=(H-3)+7$ $S=H+4$ Número sustractivo.
I	4 canicas.	Expresiones algebraicas, igualación de los valores de A. $A=H-3$ $A=S+7$ $S+7=H-3$ $S-H=7-3$ $S-H=4$ Número sustractivo.
I	4 canicas.	Recta numérica con el cero y positivos. Señala que existe una diferencia. Alejandro Héctor Simón  $7-3=4$ Número sustractivo.

I	4 canicas.	Expresiones algebraicas y representaciones concretas: palitos. Alejandro $(-3)-(x)$ Simón $(7)+(-3) +4$  <i>Número sustractivo y signado.</i>
I	4 canicas.	Asignación de un número de canicas a cada persona. A=10 H=13 S=17
I	4 canicas.	Asignación de un número de canicas a cada persona. Héctor 11 canicas. Simón 15 canicas. Alejandro 8 canicas.
I	4 canicas.	Ecuación de primer grado: $x+a=b$ incorrecta. Asignación de un número de canicas a cada persona. A=10, H=13, S=17
I	4 canicas.	Expresiones algebraicas distintas para el valor de A. A=3x A=7x
I	4 canicas.	Explica los datos del problema y concluye “se hace una resta 7 canicas (Simón) menos 3 canicas (Alejandro) es igual a 4”. <i>Número sustractivo.</i>
I	Simón tiene 4 canicas más que Alejandro.	Expresión algebraica, con un sumando negativo. Héctor x Alejandro x-3 Simón x-3+7 $x-3+7=x+4$ <i>Número sustractivo y signado.</i>
I	Tiene 4 canicas más.	Códigos personales, adición con positivos y negativos introduciendo x. A-3 Héctor S+7 Alejandro Héctor $x-3=x-3+7=x+4$ <i>Número sustractivo y signado.</i>
I	Simón tiene 4 canicas más que Héctor.	Expresiones algebraicas. Sustracción en forma vertical.  <i>Número sustractivo y aislado.</i>
I	Simón tiene 4 canicas más que Héctor.	Expresiones algebraicas, lenguaje verbal explicando sus significados. Asignación de un número de canicas a cada persona. A S Ale Hec Sim H-3 7+A 7 10 14 Si Alejandro tiene 3-H (7), Simón 7+A (14), y Héctor 3+H (10), se toma como referencia a Héctor con un número x y se da valor a los demás. <i>Número sustractivo.</i>
I	4 canicas tiene Simón más que Héctor.	Asignación de un número de canicas a cada persona. Héctor Alejandro Simón 8 5 12
I	Simón tiene 4 canicas más que Héctor.	Sustracción con positivos.  S=14. Alejandro tiene 7, Simón tiene 14 porque tiene 7 más que Héctor. <i>Número sustractivo.</i>
I	4 canicas más que Héctor.	No justifica.
		Asignación de dos números y una incógnita $?=x$.

I	4	Expresiones algebraicas. A H S -3 ? +7 $x-3$ $x-3+7$ Número sustractivo y signado.
I	$x=4$	Expresiones algebraicas, adición con positivos y negativos. Lenguaje verbal. Concluye “es como si a 7 le restas 3 y da 4 que son las canicas que tiene de más Simón que Héctor”. Héctor x Alejandro $x-3$ Simón $x-3+(+7)$ Número sustractivo y signado.
I	4	Sustracción con sustrayendo negativo y representaciones concretas: canicas. $3-7=4$ Número sustractivo.
I	No lo indica.	Asignación de un número de canicas a cada persona. Introduce x . Héctor Alejandro Simón No. De canicas. x $x-3$ $(x-3)+7$ Número sustractivo.
I	No lo indica.	Asignación de un número de canicas a cada persona. Representación no usual de una recta numérica. A H S -3 4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 Número relativo y signado.
I	Héctor= $3-x$ Alejandro $7+x$	Expresiones algebraicas. Dibujos donde aparece x . Alejandro Héctor Simón $- \bigcirc \bigcirc$ x $+ \bigcirc \bigcirc \bigcirc \bigcirc$ Número sustractivo.
I	10 canicas más.	Expresiones algebraicas y lenguaje verbal estableciendo, relación entre dos cantidades. $\begin{matrix} x-3 \\ x+7 \end{matrix}$ Diez canicas más, esto como resultado de que tomamos como base a Alejandro y observamos que tiene 3 menos, + los 7 que tiene Simón de más, dan 10 canicas. Número sustractivo.
I	10 canicas más.	Adición con positivos. $\begin{matrix} +7 \\ +3 \\ \hline 10 \end{matrix}$
I	10	Escribe: “sólo se suma las canicas que Héctor tiene más que Alejandro y Simón, 10 canicas”.
I	$x^2=10$	Ecuación de primer grado, escribe una variable al cuadrado. $A=3-q$ H $S=7+q$ A $3-x=7+x$ $x-x=7+3$ $x^2=10$ Número sustractivo.
I	21 canicas.	Expresiones algebraicas y lenguaje verbal. $a=-3h$ $s=+7a$ y $h=a$ 3 Número signado.
I	3 canicas.	Resolución de una ecuación de primer grado. $4+3=7+x$ $+4-3=7+x$ $1=7+x$ $-6=x$ $+4-3=7-6$ $+1=+1$ Número sustractivo y aislado.

I	$x-3+7$	Asignación de expresiones algebraicas a cada persona. Alejandro Héctor Simón $x-3$ x $x-3+7$ Número sustractivo.
---	---------	---

Alejandro tiene 3 canicas menos que Héctor, Simón tiene 7 canicas más que Alejandro. ¿Cuántas canicas más tiene Simón que Héctor? (Bruno y Martinón 1997 citado en Alcántara, 2010).

Resultado. $(-3)+(7)=(+4)$

Categoría: combinación de comparaciones adyacentes

Quince alumnos escriben como respuesta 4 canicas. El primero de ellos le asigna la incógnita a Héctor, de ahí resta para destinarle a Alejandro $x-3$. Finalmente escribe: "Simón $x-3+7$ " que es lo que le corresponde a Alejandro ($x-3$) más 7 de Simón. El segundo alumno escribe el mismo procedimiento que el primero. Explica con lenguaje verbal llegando a la expresión $-3+7=4$ en la que ya no escribe x . El tercero también utiliza expresiones algebraicas. Aparecen los números relativos $x-3$ que le corresponde a Alejandro y $x+3$ a Héctor. La expresión $(x-3)+7$ es equivalente a $x-3+7$ aparecida en el primer y segundo caso. El alumno no opera esta expresión. El cuarto alumno parte del valores de Alejandro (x) es por eso que a Héctor le asigna $x+3$, luego saca la diferencia de $(x+3)$ de Héctor con $(x+7)$ de Alejandro y llega a 4. La expresión del quinto alumno contiene una idea parecida a la de los alumnos primero a tercero, sólo que este alumno no utiliza x y a Héctor no le asigna un número. Él resuelve correctamente el problema considerando a la expresión sintáctica $(-3)+(7)=(+4)$ como la correcta.

El sexto estudiante expresa con sus propias palabras la misma información del enunciado y llega a la sintaxis correcta $-3+7=A$. El séptimo alumno sustituye A en S . El octavo iguala los valores de A , se equivoca en el proceso de resolución del problema dos veces conduciéndolo al resultado correcto. El noveno utiliza la recta numérica y señala la diferencia con una flecha hacia la izquierda. El décimo alumno se apoya del álgebra y de las representaciones concretas para justificar. Los alumnos 11° y 12° asignan un número a cada persona, no utilizan los mismos números para cada una. El 13° también asigna un número a cada persona y justifica con una ecuación que no lo lleva a la respuesta. El 14° utiliza expresiones algebraicas pero no resuelve el problema. La respuesta del 15° no muestra los datos suficientes para hacer una interpretación de cómo comprendió el problema.

Siete alumnos escriben como respuesta que Simón tiene 4 canicas más que Héctor. La respuesta del alumno 16° contiene un procedimiento similar a la de los alumnos 1°, 2°, 17°, 23° y 24°. La expresión que registra el 17° estudiante es similar a la de los alumnos primero a tercero y a la del 16° pero los pasos muestran un camino diferente. El 18° trata de resolver el problema con una

sustracción, no la resuelve ya que escribe -4 como resultado de la operación. Debió ser 10 . Nótese que el cuarto alumno utiliza una sustracción con las mismas expresiones, pero el 18° alumno coloca $x-3$ en el minuendo. Como se indicó anteriormente la respuesta debió ser 10 , él escribe 4 , no llega a la respuesta con un procedimiento correcto. El alumno 19 combina el lenguaje verbal con expresiones algebraicas, explica que a cada persona le corresponde un número y que también puede expresarse estableciendo relaciones con abreviaturas. El 20° alumno sigue un camino parecido al 11° y 12° . El 21° resuelve con una sustracción de positivos, el 22° no justifica.

El 23° asigna x a Héctor, señala que Alejandro tiene -3 y Simón $+7$. Esto lo interpretamos como: tiene 7 más que Alejandro, además utiliza la expresión $x-3+7$ como los alumnos 1° , 2° , 16° , 17° , 23° , 24° y 35° .

El 24° alumno utiliza la expresión $x-3+(+7)$ que es equivalente a la usada por los alumnos, 1° , 2° , 16° , 17° , 23° y 35° ($x-3+7$). La sustracción que resuelve el alumno 25 no es correcta, debió resultar -4 en lugar de 4 . El procedimiento del 26° alumno es parecido al de los alumnos 1° y 16° . El 27° alumno asigna un número a cada persona aunque se equivoca al contar por lo que sus representaciones en la recta no coinciden con los datos del problema. Las representaciones concretas del alumno 28 no lo llevan a establecer expresiones algebraicas correctas. El alumno 29 utiliza expresiones algebraicas pero éstas son incorrectas. Los alumnos 30 y 31 operan con los números del enunciado pero no establecen una relación correcta de estos. El alumno 32 establece una ecuación errónea. El alumno 33 señala que hay que sacar la diferencia entre la segunda y tercera expresión ($s=+7a$ y $h=a/3$). El planteamiento y resolución de la ecuación propuesta por el alumno 34 no son correctos. La respuesta que registra el alumno 35 ($x-3+7$) es similar a las expresiones en los procedimientos de los alumnos 1° , 2° , 16° , 17° , 23° y 24° .

En síntesis

Dos estudiantes resuelven correctamente el problema.

Treinta y tres estudiantes no lo resuelven.

Reflexiones finales

Del análisis de los *problemas aditivos* podemos afirmar lo siguiente:

- ❖ El estudiante expresa vía el *lenguaje natural* respuestas con formas semánticas equivalentes.
- ❖ El nivel de *negatividad* alcanzado depende de la categoría del *problema aditivo*.

- ❖ Existe una relación entre el contenido de los problemas, su forma semántica y los niveles conceptuales de negatividad.
- ❖ La suposición de un *valor arbitrario* para el *estado inicial* en el enunciado del problema, reduce la *negatividad* a ser representada solamente como un *número sustractivo*. Otros estudiantes reconocen la *negatividad* por medio de *números signados, relativos y aislados*. Utilizan espontáneamente el lenguaje algebraico y la recta numérica para la resolución de problemas.
- ❖ La mayoría de los sujetos logra comparar correctamente los tiempos descritos en el enunciado.
- ❖ Los problemas correspondientes a las categorías *Variación de variaciones* y *Combinación de comparaciones adyacentes* resultaron ser las más difíciles para los estudiantes.

Referencias bibliográficas

- Alcántara, J. (2010). *Uso de modelos de enseñanza en la resolución de problemas aditivos*. Tesis de Maestría, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México.
- Bruno, A. y Martínón, A. (1994). La recta en el aprendizaje de los números negativos. *Suma*, 18, 39-48.
- Bruno, A. y Martínón, A. (1997). Clasificación funcional y semántica de problemas aditivos. *Educación Matemática*, 9 (1), 33-46.
- Gallardo, A. (1994). *El estatus de los números negativos en la resolución de ecuaciones algebraicas*, Tesis Doctoral, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México.
- Gallardo, A. (2002). The extension of the natural-number domain to the integers in the transition from arithmetic to algebra. *Educational Studies in Mathematics*, Kluwer Academic Publishers, The Netherlands, 49, 171-192.
- SEP (2006). *Plan y programas de estudio. Educación Secundaria*. SEP