El poder de la contextualización en la enseñanza numérica

Joaquín Giménez Rodríguez
Departamento Didactica de les CC Experimentals i la Matematica
Universitat de Barcelona
Barcelona, España
jgimenez@uoc.edu

Resumen

Se presentan diversas situaciones de encuentro de series numéricas para trabajar a nivel escolar preuniversitario, mostrando que en su construcción aparecen contextualizaciones del mundo real hasta teoremas recientes de la Teoría de Números.

1. Introducción

Que los números son importantes no es algo que sorprenda a cualquier lector, y por ello, lo que se cuenta aquí es un conjunto de sorpresas numéricas, que nos permiten afirmar que la importancia de los números en el reconocimiento de patrones de la vida, está ligada con niveles de conocimiento diferentes de la matemática, desde una perspectiva escolar obligatoria con situaciones asequibles a la práctica totalidad del alumnado, hasta teoremas de descubrimiento reciente de la Teoría de Números que no son difíciles de interpretar y podemos usarlos para entrar en el álgebra. En esa dialéctica entre el ejemplo y el teorema, está nuestra tarea docente de hacer que la enseñanza de la aritmética no olvide esas contextualizaciones de partida, que deben permitir reconocer la permanencia de ciertos contenidos aritméticos como patrones de conocimiento, pero al mismo tiempo, reconocer las matemáticas como un conocimiento en construcción.

Los números están en nosotros mismos, en nuestro entorno y en la interpretación de nuestra historia. Descubrirlos es parte del quehacer escolar. En ese sentido el contexto tiene a ver con los *elementos del mundo sensible que usamos como instrumentos (ya sea de forma vivida o referenciada textualmente o discursivamente) para realizar una actividad matemática.* Y para desarrollarlo, lo haremos mediante actividades ricas, que son aquellas que involucran al estudiante en una reflexión, relaciona la matemática con lo real extrayendo un contenido matemático profundo. Contextualizar implica dar oportunidades de que, mediante objetos cotidianos, podamos colaborar a construir matemática cada vez más abstracta, a partir de sugerir cuestiones, presentar problemas y promover interacciones de discusión generalizadora provechosa en el ámbito escolar.

El desarrollo de esta presentación muestra cinco aspectos clave de esa contextualización que se vehicula con el descubrimiento de patrones numéricos diferentes mediante el reconocimiento y desarrollo de propiedades de series importantes de nuestra vida en contextos diferentes: (a) series vinculadas a nuestro cuerpo, nuestras cabezas, zapatos, etc, (b) series fraccionarias del entorno culinario y los Repartos, (c) las series del entorno vegetal y animal, (d) números y series del arte y el Universo desde Vitruvio a Gaudi, pasando por la racionalidad occidental (e) las series exponenciales de los crecimientos de Poblaciones. Hemos escogido estos ejemplos entre los muchos posibles porque enlazan diversas culturas y proporcionan diversos significados de los números, lo cual es importante en un mundo en el que muchos colombianos viajan a España, españoles viajan a Oriente, japoneses viajan a Latinoamérica... y se produce un "nuevo mestizaje cultural"en donde la aritmética no debería quedar relegada.

2. De las proporciones de nuestro cuerpo a los números de Lucas

La aritmética corporal es parte de nuestra vida. En efecto, desde muy antiguo se habla de representar y comparar nuestro cuerpo, y hacer de nuestro cuerpo un patrón de medida.

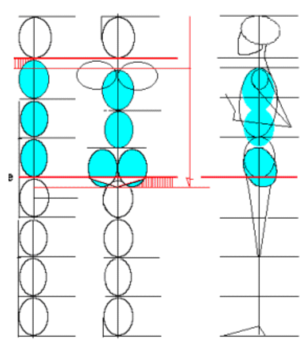

Figura 1: Los módulos griegos clásicos de las 8 cabezas en el cuerpo humano

Véase la figura 1 con las ocho cabezas, modificada en el segundo dibujo para visualizar 3 torsos, o bien el cuarto que indica el cuello. Algo más abajo de nuestro ombligo en nuestro centro de rotación principal siempre aparece el centro de nuestro cuerpo, a cuatro cabezas del suelo. Pero no sólo se ve en nuestro cuerpo una proporción racional 1 : 8 sino muchas otras proporciones que muestran una estética clásica ya que se mantiene hasta el Renacimiento (Ghyka 1978).

Miguel Angel es uno de los ilustradores clásicos de este fenómeno, así como las proporciones áureas que aparecen en muchos libros. Ahora bien, hay otras muchas periodicidades o patrones más complejos que nos permiten reconocer una serie numérica importante como es la que indica la constante áurea: $10, 16, 26, 42, \ldots$ Tal es el caso de los electrocardiogramas. Bien poca gente sabe que la ratio entre el priodo máximo de presión en la sistole ($t1$) respecto al minimo en la diástole ($t2$) en media es aproximadamente 1,6 y eso ha sido descubierto recientemente por Zvetkov. Pero,¿Quién se acuerda de medir los pies y comparar con los números del calzado? ¿O ver la proporción entre la medida de la cabeza y tamaños de sombreros?

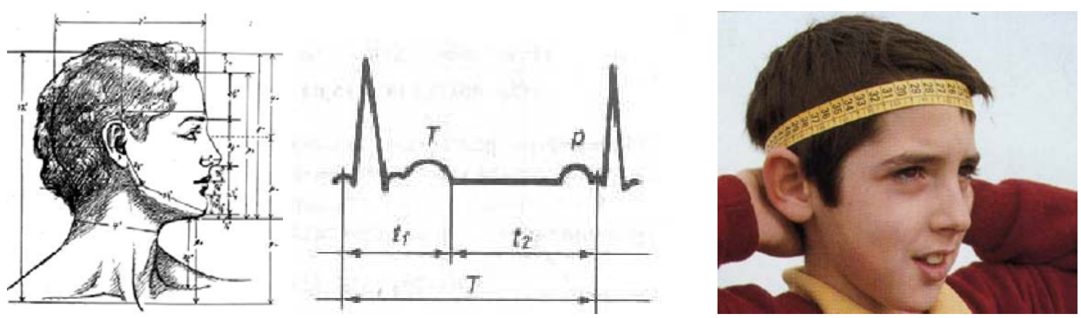

Figura 2: Las proporciones de la cabeza, el electrocardiograma y las medidas de los sombreros.

¿Quien piensa en establecer proporciones en la Escuela Primaria y asociarlas a series que manifiestan una tabla? Quien piensa en la serie $2, 3, 3, 4{,}5, 4, \ldots$ en donde cada pareja consecutiva es la correspondiente de una proporción? O bien ver que hay conservaciones sorprendentes como que en un mismo lugar en un mismo momento, la sombra de tus pies mide un número igual de veces tu propio pie. Este descubrimiento, junto con lo que implica de la búsqueda de puntos de orientación universales, fue el origen de las mandalas...

Ahora hagamos un salto. Generalizando proporciones fuera del cuerpo humano como es el caso de las relaciones aditivas mostradas, podemos encontrarnos con propuestas al alumnado de encontrar propiedades que surgen de la observación de elementos numéricos como las que se deducen de la observación de los números del triángulo de Pascal, o bien lo que puede ocurrir si se generalizan las sumas como se ve en el triángulo de la derecha.

1	1	
1 1	2	2
1 2 1	4	2 1
1 3 3 1	8	2 3 1
1 4 6 4 1	16	2 5 4 1
1 5 10 10 5 1	32	2 7 9 5 1
1 6 15 20 15 6 1	64	

Figura 3: Los triángulos de Pascal y de Lucas, como fuente de descubrimientos

¿Qué proporciones hay entre los números correspondientes? ¿Y entre cada número y la suma de su fila? ... O aquel clásico enunciado de buscar quien sigue a la serie $60, 90, 108, 120\ldots$ ¿Y qué ocurre si generalizamos observaciones a partir de las relaciones entre lado de un polígono inscrito a un círculo y radio correspondiente que era la relación del hombre módulo perfecto de Leonardo?

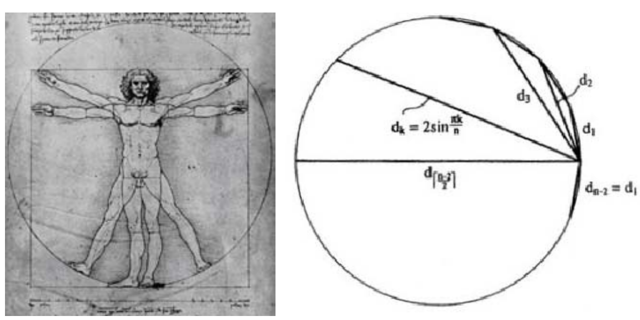

Figura 4: Imagen del módulo de Leonardo y búsqueda de la relación entre el lado de un polígono de n lados y el radio de la circunferencia inscrita.

Si bien en el caso cuadrado la relación es la raiz de dos, y en el pentágono es precisamente el número áureo... Generalizar hacia el caso n, permite llegar a pensar en teoremas en los que aparecen los números de Lucas. Para un impar n, las raíces positivas del polinomio n-ésimo de *Lucas* $L2(n)$, con signos alternados iguales a las longitudes diagonal dk para $k > 1$ y vértice $d1$ del n-agono de radio 1 unidad donde $dk = 2 \sin kp/n$ para $k = 1, 2, \ldots, (n-1)/2$ .Para ampliar conocimientos véase la página http://www.mi.sanu.ac.yu/vismath/kappraff1/index.html

3. De los repartos a los teoremas de Erdos.

Cinco niños se reparten 6 chocolates o pasteles. ¿cuánto toca a cada uno? Fijémonos de nuevo que se trata de un problema elemental. Las respuestas que se pueden dar en una clase constructiva, son diferentes. En efecto, el alumnado interpreta formas gráficas muy diversas para reconocer el resultado de la partición. Y hacen como los egipcios. Es decir, consideran partes de la unidad que van normalmente subdividiendo.

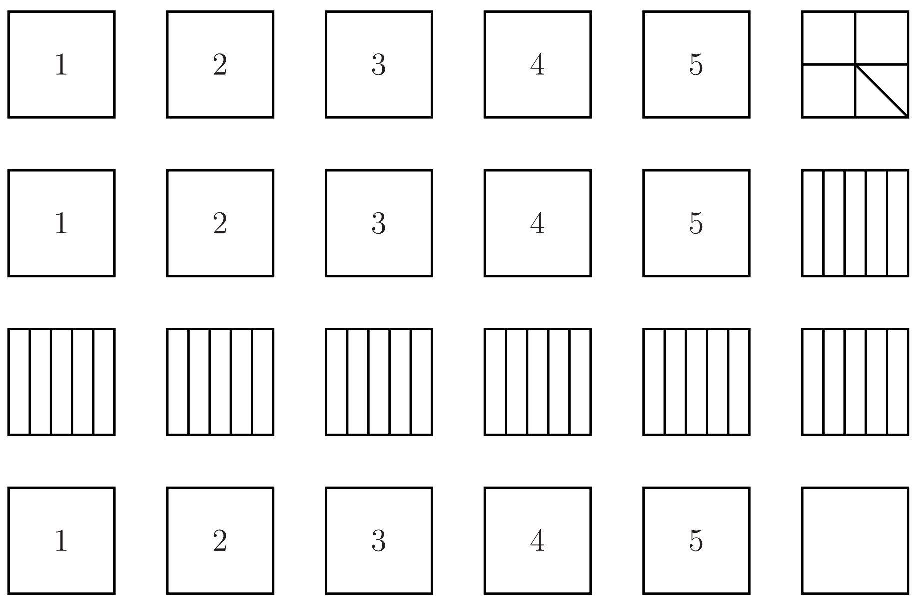

Figura 5: Situaciones de reparto que efectuan alumnos de grado 5 al dividir 5 entre 6.

Una observación de las descomposiciones que el alumnado consigue, se pueden representar en casos diversos como los siguientes mediante las sumas que veremos.

$$3/4 = 1/2 + 1/4 \quad ; \quad 6/7 = 1/2 + 1/3 + 1/42 \quad ; \quad 5/8 = 1/2 + 1/8$$

¿Te atreves como docente a plantear a los estudiantes el encontrar una forma de hacer una suma de fracciones unitarias para una fracción dada cualquiera? Y en casos particulares como los anteriores? Pero, si seguimos al egipcio Ahmés, podemos plantear a los estudiantes como las fracciones del tipo 2:n se establecían mediante las sumas siguientes

$$
\begin{aligned}
2/3 &= 1/2 + 1/6 \\
2/5 &= 1/3 + 1/15 \\
2/7 &= 1/4 + 1/28 \\
2/9 &= 1/5 + 1/45 = 1/6 + 1/18 \\
2/11 &= 1/6 + 1/66 \\
2/13 &= 1/7 + 1/91 \\
2/15 &= 1/8 + 1/120 = 1/9 + 1/45 = 1/10 + 1/30 = 1/12 + 1/20 \\
2/17 &= 1/9 + 1/15392/19 = 1/10 + 1/190
\end{aligned}
$$

Y a partir de ello, tratar de encontrar una regularidad. ¿Será verdad que $2/(2i+1) = 1/(i+1) + 1/[(i+1)(2i+1)]$? Quizás a partir de ello se vea que $1/p(p+q)r + 1/q(p+q)r = 1/pqr$ Como se ve en el ejemplo de $p = 2$, $q = 3$, $r = 7$ $1/70 + 1/105 = 1/42$

Como éste, podemos plantear otros diversos problemas resueltos por Erdos y otros en el siglo pasado. La idea en este caso no es que se encuentre la ley, sino que mostremos a alumnado de Bachillerato la posibilidad de reconocer estas generalizaciones de fenómenos aritméticos elementales. Y para ello, lo principal es que los conozca el propio docente.

4. Números de Fibonacci, contexto biológico y propiedades.

Con la aparición de webs como la de filotaxis (véase las referencias), no sorprende tanto este tipo de patrones de la naturaleza que significa los siguientes pasos: (a) reconocer números en animales, plantas y flores. Así al Lirio 3, Rosa 5, Delfín 8, Margarita 13, Susana ojos negros 21, Piretrum 34, Dalia 55, 89 Observando las imágenes siguientes a nadie le sorprenderá la asociación: Plátano 3, manzana 5, rosa 5 y 8. ¿Conoces estos números? Te imaginas que estos números se encuentran en otros lugares impensados anteriormente como vio el matemático ruso Stepanov?

Estudiando la estructura del suelo ruso desde el mar de Karsky hasta el desierto de Karacum's encontró que las potencias de capa de humus son iguales en media a **5 cm** en el suelo desértico luminoso, **8 cm** - en el suelo gris marronoso, **13 cm** en tel semidesierto marronoso, **21 cm** en la tundra soleada, ..Te imaginas lo que

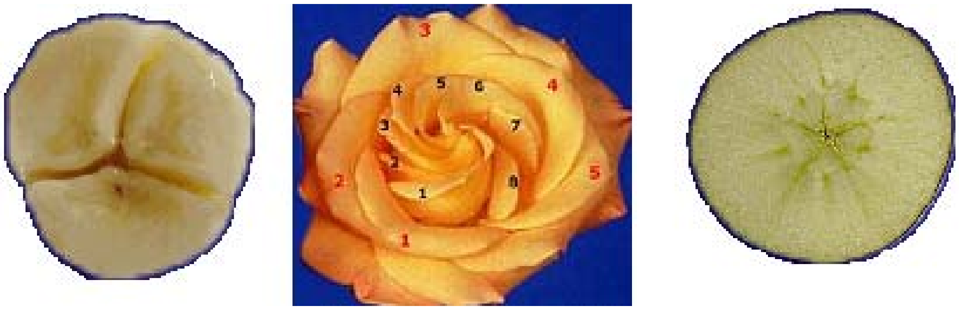

Figura 6: Plátano, rosa y manzana

encontró en cm tundra oscura, en Chernozem, y en la tierra alcalina? Pues si, los números de FIBONACCI.

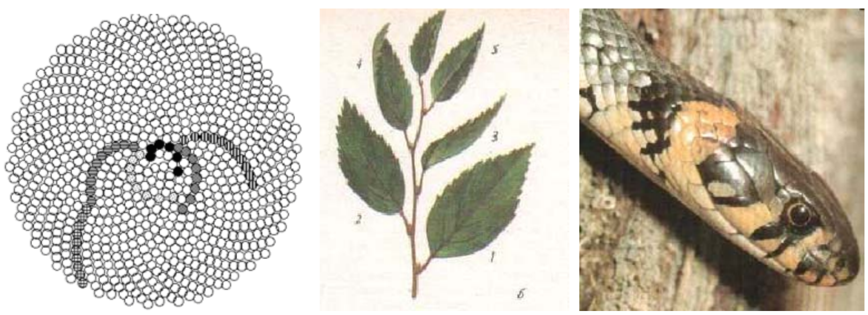

Figura 7: Los clásicos números de Fibonnaci en el girasol, las hojas y la piel de serpiente

Estos números rigen muchos fenómenos de crecimiento en plantas y pieles de animales. Y ¿qué decir de los números 4,6,8,12,20 de los poliedros regulares? Y, ¿qué decir de algunos números naturales que se encuentran en los "patrones"de la vida humana? Fijaros que para diversos autores, la infancia del hombre corresponde a los 1-8 años, preadolescencia 8-13, juventud 13-21, segunda juventud 21-34, madurez 34-55, edad adulta 55-89. Y los números de la mujer son: La mujer sigue los números 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, según Nikolay Vasutinsky "The Golden Proportion"(1990) o Eduard Soroko "Structural harmony of systems"(1984).

¿Qué tienen de especial estos números? Ahora, escribe los rectángulos de números de 5×12, 8×13, 13×21 Pide que los estudiantes marquen donde se encuentran los números de Fibonnacci. Los estudiantes encontrarán lo que se ve en la figura. ¿Qué pasa si pensamos que esta propiedad de los triángulos con los números de Fibonacci como se ve en la figura es generalizable? Surge el reciente Teorema de Zenkin (1999).

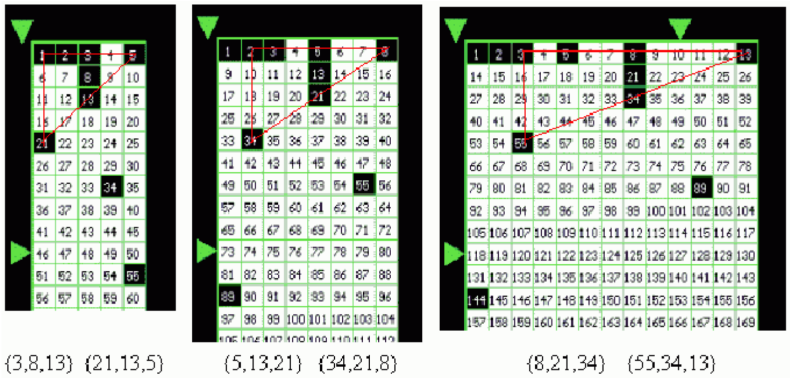

Figura 8: Visualización de propiedades con números de Fibonacci

Cualquier serie de números de Fibonacci $\{F1+k, F2+k, F3+k, F4+k, F5+k, F6+k, F7+k\}$ *genera (en el pictograma 2D según un módulo* $F4+k$) *un triangulo rectángulo con hipotenusa* $\{F4+k, F6+k, F7+k\}$, *las piernas del triángulo* $\{F1+k, F2+k, F3+k, F4+k\}$ *y* $\{F1+k, F7+k\}$, *y la media* $\{F3+k, F5+k, F6+k\}$, *donde k es un entero dado no negativo* $(k = 0, 1, 2, 3, ...)$. http://www.com2com.ru/alexzen/

En este viaje por los números en contexto, llegaríamos por abstracción o generalización de búsquedas, elencuentro de regularidades más conocidas como la de los números triangulares (sumas de los naturales consecutivos) $1, 3, 6, 10, 15, \ldots$ o los números perfectos (iguales a la suma de sus divisores propios) $6, 28 \ldots$ O encontrar la amistad de números como 220 y 284 que proviene del hecho que cada uno es suma de los divisores del otro $(1+2+4+5+10+11+20+22+44+55+110 = 284$, y $1+2+4+71+142 = 220$ La suma de los divisores de un número nos da el otro. La historia siempre ha mostrado que algunos problemas se van cerrando. En efecto, durante muchos siglos estos dos números fueron los únicos amigos, pero Fermat encuentra los siguientes 17296 y 18416 y reconoce y demuestra la regla general de Ibn Qurra) "Si $q = 3 \cdot 2^{p-1} - 1$; $r = 3 \cdot 2^p - 1$; $s = 9 \cdot 2^{2p-1} - 1$ son números primos, entonces $n = 2^p \cdot q \cdot r$ y $m = 2^p \cdots$ son números amigos"que en el caso de $p = 2$; $q = 5$, $r = 11$, $s = 71$ corresponde a 220 y 284.

Si hablamos de eso en nuestras clases, incluso llegaríamos en Bachillerato a los menos conocidos números de Carmichael (333, 741...) que son los N productos de $d[1]..d[k]$ divisores con suma divisible por N. Para algún x , $p[i] = x * N * d[i] + 1$ son todos primos. Sea $A =$ Producto de $p[i]$. Ejemplo Como $20 = 1 + 4 + 5 + 10$, $20x + 1$, $80x + 1$, $100x + 1$ y $200x + 1$ son primos, luego 333 es número de Carmichael. Y quizás no sería extraño enunciar algún teorema como el siguiente, que generaliza el caso anterior: Teorema Si para $A - 1$, es divisible por $x * N\hat{}2$, y $x * N\hat{}2$ es divisible por $x * N * d[i] = p[i] - 1$ para todo i, se satisfacen las condiciones necesarias para ser número de Carmichael. Si os fijais, hasta aquí, no hace falta saber muchas matemáticas, ya que es suficiente con las de Bachillerato para reconocer algunas de estas propiedades y lo que se hace en Matemáticas: generalizar observaciones, realizar conjeturas y,... a buscar si se cumple. Los números de Fibonnaci en una generalización aún mayor, pueden ser considerados como base de un espacio numérico complejo como lo son 1 e i . En efecto,

$$F_n = \begin{cases} \dfrac{\tau^n + \tau^{-n}}{\sqrt{5}} & \text{con} \quad n = 2k+1 \\ \dfrac{\tau^n + \tau^{-n}}{\sqrt{5}} & \text{con} \quad n = 2k \end{cases} \qquad L_n = \begin{cases} \tau^2 + \tau^{-2} & \text{con} \quad n = 2k \\ \tau^2 + \tau^{-2} & \text{con} \quad n = 2k+1 \end{cases}$$

Figura 9: Caracterización de los números de Fibonacci y de Lucas

Y que con ello se pueden deducir propiedades como las siguientes

$$\tau^3 = \tau^2 + \tau \quad ; \quad \tau = \tau^{-1} + 1 \quad ; \quad \tau^n = \tau^{n-1} + \tau^{n-2} \quad \text{de la serie} \quad 1, \tau^1, \tau^2, \ldots \tau^n$$

Véase que, si bien se atribuye a Fibonacci el teorema que decía que con los dígitos del 1 al 9 y el cero "*as-sifr*"se puede escribir cualquier numeral. Este teorema de descomposición numérica que indica que cualquier número es suma de un polinomio con potencias de una base determinada, donde los coeficientes son números desde 0 hasta la base menos uno, se generaliza ese Teorema al teorema de Bergman (1957) que dice que cualquier número A es suma, para todo i de un polinomio $a_i\tau^l$ con base en los números 1 y el número aúreo. A es un número real y ai es un numeral binario, 0 o 1, $i = 0, \pm1, \pm2, \pm3, ti$ es el peso del i-ésimo digito, t es el número de oro.

Por último recordemos, para quien no lo sabe que las proporciones de los números alternados Fibonacci miden la fracción de los giros entre hojas sucesivas del crecimiento de una planta: 1/2 para el caso del olmo y el lirio, 2/5 para la manzana, 3/8 para la rosa, 5/13 para la almendra que ha interesado a geómetras prestigiosos de nuestro tiempo (Coxeter 1969, Ball and Coxeter 1987).

5. Números en arquitectura, universo y la historia de la ciencia.

¿Conoceis los números 4,7,10, 16,28,52,100 ... y su importancia en la historia de la Astronomía? Pues deberíais saberlo. Son los números de Bode, reconocidos experimentalmente como muy aproximados por Olbers (1803) y posteriormente por Herschel... Desde hace mucho tiempo, Pitagoras ya insinuó que los números marcaban el Universo. En qué sentido debemos considerar esa frase es lo que ha cambiado con el conocimiento científico que tenemos, pero no ha dejado de ser cierto. " *Cada objeto geométrico bien determinado, se halla de una forma u otra conectado con las propiedades del icosaedro regular decía*" Felix Klein (1849-1925) Y antoni Gaudi, el arquitecto catalán que me gusta reconocer decía que La base de todo raciocinio es la regla de tres, la proporción matemática. No debe extrañarnos que en 1987 Biers constatara empíricamente que ese había sido el ideal griego de la arquitectura al hablar de flautas. Mirad la figura de las columnas. Se llama flautas a las entradas semicilíndricas que se hacen en la columna de estilo dórico. Las columnas se hacían con medida de 24 o 32 diámetros de las flautas.

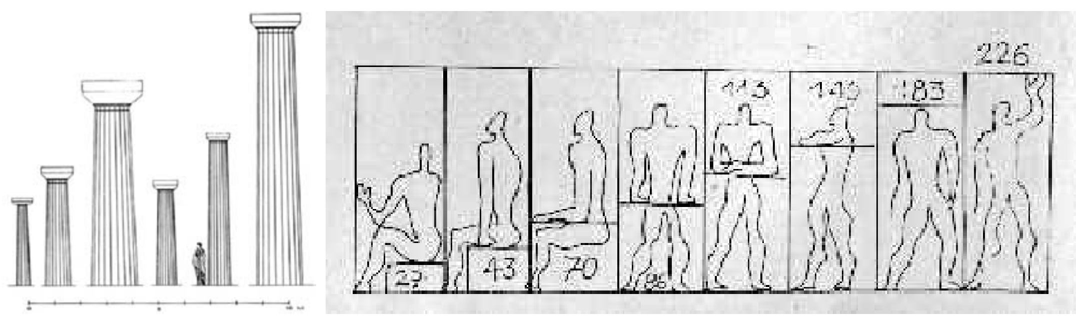

Figura 10: Estudio sobre columnas griegas de Gaudi e imagen del modulosr de Corbusier

¿Y qué decir de los números de Corbusier? 27, 43, 70, 86 ... No son parecidos a los de Fibonacci? Sólo hace falta mirar su modulor. .. En una enseñanza de las Matemáticas en que muchas veces aún la preocupación de los docentes no está en hacer matemáticas, hnúmero de oro es algo más que hablar de un gran número.

Se trata de un contexto importante para el ejercicio de tareas numéricas que engranen el conocimiento matemático histórico de las matemáticas, pero no sólo como anécdota, sino como reinvención o descubrimiento. Así, hablar del número de oro, es reconocer sus propiedades geométricas, al indicar que se trata de la proporción más simple que nos podemos imaginar cuando tenemos una suma de partes. Lo que quizás menos docentes indican es la curiosa relación visual que

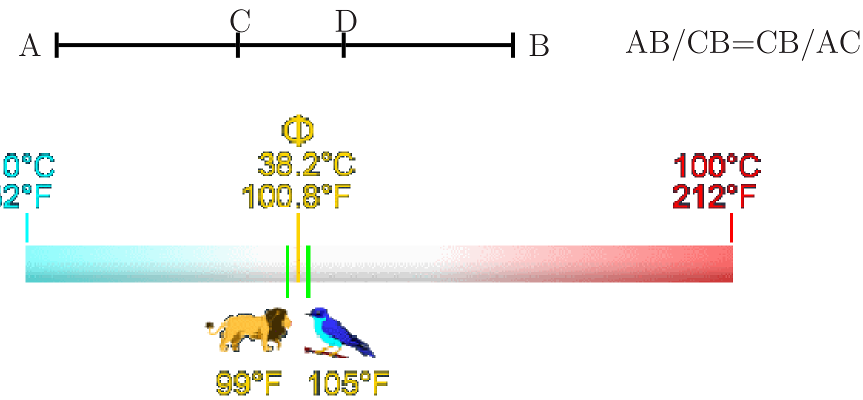

Figura 11: Imagen de la proporción aúrea y en el caso de las escalas de temperaturas.

indica en la escala de temperaturas, cuando se ve que los 100 grados Farenheit son casi la división aúrea de la escala centígrada.

6. Conclusión. Un último viaje por números menos conocidos.

¿Te suena la serie de los números siguientes : 36,8 37,6..40,3...42,3. 44... Es una serie muy vuestra. Son los habitantes de Colombia a lo largo de los años últimos en los que hay datos. Aunque estos cuesta de encontrar, se pueden quizás identificar. Son los números de nuestras cosechas, de nuestras producciones, de nuestra gente... Crecen con más o menos orden, porque los transformamos. Pero podemos pensar en cuál es el siguiente. Es importante, porque de ese conocimiento, depende muchas cosas del futuro. Los números de la economía, de la meteorología, de los tsunamis, de los terremotos... en la construcción de modelización de sólidos. No sólo son estadísticas, son elementos de series que como racionales queremos dominar... y mostrar a nuestros estudiantes.

Dejadme agradecer vuestra presencia aquí, y la invitación de los organizadores del evento. Acabo con las palabras de Kolmogorov: ***Matemáticas es la ciencia que busca relaciones cuantitativas y formas espaciales del mundo real.***

Bibliografía

[1] Andersen, R *Heterodyning and Powers of Phi*. In Sacred geometry page. 1997. Disponible en http://www.tricountyi.net/ randerse/heterofi.htm

[2] Ball, W. W. R. and Coxeter, H. S. M. Mathematical Recreations and Essays, 13th ed. New York: Dover, pp. 56-57, 1987.

[3] Bondarenko, B.A. *Generalized Pascal Triangles and Pyramids: Their Fractals, Graphs, and Applications*. Fibonacci Association, 1993

[4] Coxeter, H. S. M. "The Golden Section and Phyllotaxis."Ch. 11 in Introduction to Geometry, 2nd ed. New York: Wiley, 1969 Hoggat, V., Jr., *Fibonacci and Lucas numbers*. Houghrton-Mifflin, Palo Alto, California, 1969.

[5] Ghyka, MC. *El número de oro*. Ed. Poseidón. Barcelona 1978

[6] Hilton, P. and Pedersen, J. "Fibonacci and Lucas Numbers in Teaching and Research. "*J. Math. Informatique* 3, 36-57, 1991-1992

[7] Stakhov, A.P., Massingue, V., Sluchenkova, A.A. *Introduction into Fibonacci coding and cryptography*. Kharkiv, Publishers "Osnova", 1999.

[8] Stakhov, O.P. *Computer Arithmetic based on Fibonacci numbers and Golden Section: New Information and Arithmetic Computer Foundations*. Toronto, SKILLSET Training, 1997.

[9] Vajda, S. *Fibonacci* & *Lucas Numbers, and the Golden Section. Theory and Applications*. Ellis Horwood limited, 1989.

Sites de interés
Impresionante site sobre filotaxia. http://maven.smith.edu/~phyllo/ Pagina interesante de proporción aúrea http://www.geocities.com/jyce3/index.htm Sobre matemáticas del Papiro de Rhind . http://www.ics.uci.edu/ eppstein/numth /egypt/ Sobre regularidades http://www.psicogeometria.com/imagenes/Folleto %20Winter%20