

Enseñanza y Comprensión del Enfoque Frecuencial de la Probabilidad en Segundo Grado de Secundaria

Saúl Elizarraras

Cinvestav del IPN-DME

México

lizarrasa@hotmail.com

Probabilidad, Estadística y Combinatoria — Nivel Básico

RESUMEN

Se analizó la praxis del docente para identificar dificultades de enseñanza y de comprensión del enfoque frecuencial de probabilidad, de alumnos de segundo grado de secundaria, cuando el medio que se emplea es un libro de texto¹. El papel de la enseñanza se identificó en tres fases: la *primera*, con el análisis de su *propuesta institucional*; la *segunda*, con la docencia y su praxis; la *tercera*, con la identificación de dificultades de comprensión de *ideas fundamentales de estocásticos* (Heitele, 1975). Sobre éstas, su ausencia en la formación de la docencia (Galván, 1996) define en el aula el predominio del pensamiento determinista, lo cual coarta el desarrollo del pensamiento de lo *posible* en los alumnos para el estudio de situaciones azarosas, que se promete más difícil en los niveles educativos medio superior y superior (Fischbein, 1975).

Introducción

Parte de una investigación más amplia sobre comprensión de la probabilidad en la educación secundaria, este estudio enfocó el segundo grado con los objetivos: i) identificar elementos de estocásticos requeridos para la práctica de la docencia en ese tema, mediante análisis de la enseñanza del enfoque frecuencial; ii) identificar dificultades de comprensión del enfoque frecuencial de probabilidad de alumnos en situaciones de enseñanza. Aquí presentamos sólo algunos de los resultados obtenidos.

1. Elementos teóricos

Aspectos epistemológicos y cognitivos fundamentan este estudio.

Se propone considerar para la enseñanza de estocásticos diez ideas fundamentales (Heitele, 1975), sistemática y continuamente, con conexiones significantes con el mundo del alumno: medida de probabilidad, espacio muestra, regla de la adición, regla del producto e independencia, equidistribución y simetría, combinatoria, modelo de urna y simulación, variable estocástica, ley de los grandes números y muestra.

Algunos estudios han señalado que la advertencia de la noción de azar ocurre en el período de las operaciones formales (12-15 años) debido a la concurrencia de las operaciones lógicas y aritméticas, las cuales constituyen un sistema de acciones interrelacionadas siempre bajo un camino riguroso y reversible (Piaget & Inhelder, 1951).

¹ (Filoy, E.; Figueras, O.; Ojeda, A. M.; Rojano, T & Zubietta, Gonzalo; 2001)

Las intuiciones son adquisiciones cognitivas que intervienen directamente en las acciones prácticas o mentales (Fischbein, 1975), con características globales, inmediatas, estructurales, extrapolatorias y autoevidentes. Las clasifica en primarias (experiencia del individuo, correctas, o incorrectas como sesgos) y secundarias (resultantes de la educación).

El cálculo de algoritmos bayesianos es más simple cuando la información está codificada en un formato de frecuencias que cuando lo está en un formato estándar de probabilidad (Gigerenzer & Hoffrage, 1995).

Una visión cognitiva del ser humano lo consideraría como máquina y como persona, pues lo interno y lo externo confluyen simultánea y de modo relacionado (Frawley, 1999). En este mismo sentido señala de la evidencia disponible tres tipos de subjetividad: el procesamiento no consciente, la conciencia y la metaconciencia (ver págs. 155-158).

2. Elementos metodológicos

Este estudio, de orden cualitativo (Eisner, 1998), se organizó en tres fases. Se estudiaron situaciones de enseñanza referidas al enfoque frecuencial de la probabilidad en segundo grado de secundaria, con identificación de dificultades en la práctica docente y de comprensión de los alumnos con un libro de texto como medio (Filloy *et al.*, 2001).

2.1. *Primera fase: propuesta institucional.* Se analizaron los medios institucionales proporcionados al docente para la asignatura de Matemáticas, específicamente para el área de probabilidad en segundo grado de secundaria (SEP, 1993; SEP, 1999; SEP, 2000).

2.2. *Segunda fase: Estudio dirigido.* La conjugación de docencia e investigación en estas sesiones se orientó hacia el estudio de estocásticos, para posibilitar una indagación sobre la práctica docente en el aula, mediada por un libro de texto (Filloy *et al.*, 2001). Así, la interacción de docente e investigador se extrapoló al aula (*aula alterna*).

2.3. *Tercera fase: Aula normal.* Resultados de las fases anteriores orientaron la investigación hacia la comprensión de probabilidad de estudiantes, luego de su enseñanza en el aula realizada por este investigador. Se preservaron condiciones ordinarias de la práctica del docente de matemáticas con su grupo de alumnos, a excepción de la estrategia de enseñanza puesta en juego y de instrumentos y técnica para recopilar información.

Estrategia de enseñanza. Se utilizaron las lecciones de probabilidad en el libro de texto empleado en la segunda fase. El enfoque frecuencial se introdujo vía repeticiones independientes efectivas de fenómenos aleatorios, con cuyos resultados se elaboraron tablas y gráficas para organizar, analizar y describir comportamientos de las frecuencias absolutas y relativas respectivas, y se plantearon problemas sobre situaciones azarosas.

2.4. *Criterios de análisis.* Los elementos teóricos devinieron criterios de análisis, tanto de documentos como de datos recogidos. Se consideraron: ideas fundamentales de estocásticos, otros conceptos matemáticos, recursos para organizar y tratar la información, términos utilizados, situación planteada y estructura. Las sesiones de *estudio dirigido*, *aula alterna* y *aula normal* fueron video grabadas, transcritas y analizadas; en bitácora escrita se anotó información fuera de cinta y lo que se consideró conveniente observar.

3. Resultados del análisis curricular de la propuesta institucional para probabilidad

El estudio documental proveyó un marco para el de la práctica docente.

- *Plan y Programas de Estudio* (SEP, 1993). Propone el orden del tratamiento de los contenidos a juicio de cada profesor (ver pág. 37); al final, la presentación de las nociones de probabilidad, por lo que es de esperar su enseñanza al último o incluso su omisión.
- *Libro para el maestro* (SEP, 2001). Reconoce la utilidad práctica del enfoque frecuencial. Señala que la enseñanza de probabilidad tendría que recurrir a un conjunto de “ideas fundamentales”, pero no las explicita ni indica la bibliografía respectiva (pág. 334).
- *Fichero de Actividades Didácticas* (SEP, 1999). Plantea 18 fichas para cada grado, de las cuales sólo una por grado corresponde a probabilidad. Aunque la de segundo se refiere al enfoque frecuencial, es inconveniente por el empleo de agujas para la realización de ensayos de Bernoulli. La obra apela a que los profesores propongan más fichas, pero por su formación, los docentes carecen de elementos de probabilidad para ello (Galván, 1996).
- *Secuencia y Organización de Contenidos* (SEP, 2000). Se estructura en cuatro ejes: el primero, para orientaciones didácticas; el segundo, para los contenidos programáticos; el tercero sugiere actividades que remiten a los otros medios; y el cuarto ofrece comentarios.
- *Propuesta para la enseñanza de la probabilidad* (Fillooy *et al*, 2001). Satisface los propósitos y contenidos del *Plan y programas de estudio de la asignatura de Matemáticas* (SEP, 1993); en total, cinco lecciones tratan sobre probabilidad, de las cuales tres se refieren al enfoque clásico, una al frecuencial y otra a la ley de los grandes números. Cada una se desarrolla respecto a una sola situación. No proponen ejemplos ni ejercicios; no usan notaciones simbólicas. Plantean tablas de doble entrada y gráficas para tratar el enfoque clásico y tablas de una entrada (para anotar frecuencias) y gráficas para el frecuencial. Sólo se emplean porcentajes en las lecciones sobre presentación y tratamiento de la información.

4. Docencia y praxis en segundo grado de secundaria

Como ya se señaló, en este estudio el medio utilizado para la enseñanza incluye dos lecciones (39 y 40; Fillooy *et al*, 2001, págs. 193-201) que implican al enfoque frecuencial de probabilidad, por lo que nos referiremos a ellas. Plantean la situación de la suma de dos números obtenidos al azar de manera independiente, con posible repetición, del conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ (como la suma obtenida al lanzar dos dados ordinarios). Desarrollan las características de la densidad de probabilidad de la variable aleatoria en cuestión.

4.1. *Estudio dirigido*. La estrategia utilizada con la lección 39 consistió en su lectura e identificación de lo implicado en la situación que plantea para reconocerlo en las actividades

propuestas: espacio muestra, cálculo de probabilidades de eventos, registro de datos en tablas y gráficas. Adicionalmente, se solicitó a los docentes que efectuaran 360 ensayos del lanzamiento de dos dados; previamente se discutió acerca de la frecuencia esperada de cada suma de los valores de la variable aleatoria y, al final, se le comparó con la frecuencia obtenida (ver Figura 4.1). Se atribuyó a coincidencia la obtención de la misma frecuencia para las sumas cuatro y diez (ver Figura 4.1), aunque sus probabilidades sean las mismas (46). Como se cita en el pasaje, donde “C” denota al conductor de la sesión y “P” al profesor, para el docente no había tal coincidencia, sino todo lo contrario (47), con lo cual manifestó predominio de lo determinista, relego del azar y desconocimiento de las ideas de independencia, muestra y ley de los grandes números.

46. C: Un último comentario, observen que en la suma cuatro nos da 34 y, casualmente, su simétrico de la suma cuatro, que sería el diez, [también] es una coincidencia.
- 47.P: Al contrario, no es una coincidencia, sino que se esperaba treinta y abajo treinta y, como lo mencionas, es simétrico también treinta y cuatro y treinta y cuatro. [Otro profesor mueve la cabeza afirmando que está de acuerdo con la afirmación de este profesor].

La lección 40, continuación de lo planteado en la 39, propone la comparación de la frecuencia relativa de ocurrencia de un evento con su probabilidad.

Los profesores evidenciaron desconocimiento acerca de la frecuencia esperada, lo cual se puso de manifiesto también en la enseñanza en *aula alterna*, pues no se discriminó entre los posibles valores y el número esperado de veces que ocurra cada posible valor (78).

78. P: ..., en donde dice frecuencia esperada en 200 tiradas. Esta columna la vamos a determinar apoyándonos de nuestro tablero donde tenemos todos los posibles resultados (en la página 197). Ahí vamos a determinar cuántos posibles resultados teníamos para cada suma y éstos son los resultados que esperábamos obtener.

SUMA	FRECUENCIA ESPERADA	FRECUENCIA	FRECUENCIA RELATIVA
2	10	11	11/360
3	20	15	15/360
4	30	34	34/360
5	40	42	42/360
6	50	56	56/360
7	60	61	61/360
8	50	39	39/360
9	40	33	33/360
10	30	34	34/360

11	20	23	23/360
12	10	12	12/360
TOTAL	360	360	1

Figura 4.1. Frecuencias obtenidas al realizar 360 repeticiones empleando dos dados.

5. La enseñanza y su influencia en la comprensión de estudiantes del enfoque frecuencial

Se implementaron 20 sesiones de enseñanza por este investigador, con un grupo de 20 estudiantes de segundo grado de secundaria pública, con las lecciones de probabilidad del texto utilizado en la segunda fase y, *grosso modo*, como estrategia de enseñanza la realización efectiva de repeticiones independientes de los fenómenos aleatorios referidos en el texto y la descripción de los resultados. Precedió a las sesiones la aplicación de un cuestionario de exploración para caracterizar condiciones iniciales de los alumnos respecto a probabilidad y, al final de ellas, se aplicó el mismo cuestionario para identificar variaciones en el desempeño de los estudiantes.

5.1 Diseño del cuestionario. Con formato de opción múltiple, cuatro opciones para cada uno de los ocho problemas planteados, el cuestionario solicitó justificación escrita de cada selección realizada y se permitió la corrección de respuestas; por su presentación, se insinuó la justificación en lengua natural (ver ejemplares de las preguntas en §5.2). La contestación, individual, requirió de 90 minutos. Los cuatro primeros problemas se refirieron al enfoque clásico, y los restantes al enfoque frecuencial.

Las justificaciones proporcionadas por los alumnos en las aplicaciones inicial y final del cuestionario fueron de cinco tipos: “determinista” (D), inadvertencia del azar; “sesgo” (S), como intuiciones incorrectas; “marco” (M), evocación de un referente familiar; “probabilística” (P), manifestación del pensamiento de lo posible; “frecuencial” (F), alusión a la mayor frecuencia de ocurrencia del evento. Los primeros tres tipos de justificación citados corresponderían a la etapa de procesamiento no consciente y los dos últimos a la etapa de conciencia o, incluso, a la de la metaconciencia (Frawley, 1999).

5.2. Condiciones iniciales para la enseñanza: resultados generales del cuestionario. Los cuatro últimos problemas (enfoque frecuencial) resultaron en mayor número de respuestas correctas que los referidos al enfoque clásico. Para los problemas 5 y 6, diez justificaciones (50 %) fueron correctas y congruentes, y doce (60 %) para el problema 7, en acuerdo con que el enfoque frecuencial es vía *natural* a la probabilidad (Gigerenzer & Hoffrage, 1995, pág. 8). En cambio, los alumnos parecieron desconocer el enfoque clásico; predominaron justificaciones deterministas sin advertencia del azar y escasa o nula familiaridad con el lanzamiento de dados y extracciones de contenidos de urnas. Como ejemplo, el problema 4:

4. Gustavo y Ángel juegan a los volados, pero lanzando dos monedas al aire. Gustavo gana al caer dos soles, mientras que Ángel gana en caso de que caiga águila y sol. ¿Quién tiene mayor probabilidad de ganar?

a) Gustavo b) Ángel c) tienen la misma probabilidad d) ninguno ¿Por qué?_____

Las opciones propuestas completan las posibilidades con dos volados: el inciso **a** evidencia desconocimiento de la independencia por la preferencia de dos soles; el inciso **b** (correcto) consideró el evento más probable; el inciso **c** previó la dificultad para distinguir entre (águila, sol) y (sol, águila); el **d** revelaría desconocimiento de los casos posibles.

Se identificaron tres tipos de justificación. Tres estudiantes (15 %) seleccionaron el inciso **a** debido a su interpretación determinista (D) del enunciado, como si lo posible no se distinguiera de lo dado ni de lo necesario (Piaget & Inhelder, 1951): "*Gustavo, porque él ya tiene ganado su juego*", "*Gustavo, porque lleva dos soles ganados*", "*Ángel águila y un sol*", "*porque cayó la misma figura*". De los cuatro alumnos (20 %) con selección correcta y congruente del inciso **b**, que identificaron el espacio muestra (probabilística), sólo uno enlistó las cuatro posibilidades y los otros tres emplearon lengua natural. De los 13 estudiantes (65 %) que seleccionaron el inciso **c**, 11 sólo consideraron los eventos (sol, sol) y (águila, sol), y como igualmente posibles; los otros dos no pusieron en juego lo posible (sesgos). Así, 16 alumnos (80 %) carecieron de elementos (de combinatoria) para enlistar el espacio muestra, indispensable para comprender el enfoque clásico de probabilidad.

El único estudiante que en condiciones iniciales seleccionó el inciso **b** (correcto) mediante una lista de todos los casos posibles (aa, ss, as, sa), en condiciones finales también lo seleccionó, elaboró un diagrama de árbol para enlistar todos los casos posibles y añadió: *Dos de cuatro eventos posibles son favorables para Ángel y en cambio uno de cuatro son posibles para Gustavo, por lo tanto, Ángel tiene mayor probabilidad de ganar*. De este modo paso de la etapa de la conciencia a la de la metaciencia (Frawley, 1999).

5.3. *Condiciones finales de la enseñanza: resultados generales del cuestionario.* La enseñanza resultó más efectiva para el enfoque clásico, pues aumentó el número de respuestas correctas significativamente; por ejemplo, para el problema 4 se pasó de cuatro (20 %) a diez (50 %) justificaciones correctas y congruentes. En cuanto al enfoque frecuencial, sólo para los problemas 5 y 6 resultó un incremento de cinco respuestas correctas (25 %) para ambos casos. Como ejemplo, el problema 5.

5. La compañía "Chocolates Baratos" distribuye sus productos en toda la República Mexicana, como promoción graba una estrella en el interior de la envoltura de uno de cada tres chocolates. Al juntar tres envolturas con estrella, puedes canjearlas por una pluma. ¿Cuál es el menor número de chocolates que hay que comprar para que sea más probable reunir tres estrellas?

a) 4 b) 8 c) 12 d) 16 ¿Por qué?_____

El inciso **a** anticipa desconocimiento de proporcionalidad. El inciso **b** es el correcto, pues ocho es el número más próximo a nueve. Podría considerarse correcto el inciso **c** si la justificación evidenciara proporcionalidad: en nueve chocolates pueden salir tres envolturas con estrella. Finalmente, el inciso **d** no considera la restricción "el menor número".

En la segunda aplicación, quince alumnos (75 %) seleccionaron el inciso **b** o el **c** y justificaron congruentemente, e indicaron la aproximación a nueve chocolates (F): *porque en cada 3 chocolates que compres viene una estrella, así comprando 8 te pueden salir 3 estrellas*; (F): *Multipliqué 3 por las 3*

estrellas y la mayor probabilidad es [para] 12. En las cinco respuestas restantes, incorrectas (25 %), se identificaron dificultades con variable aleatoria y la proporcionalidad no fue incorporada (S): porque piden sólo 3 envolturas.

5.4. *Enseñanza y comprensión de probabilidad de los estudiantes.* Los resultados sugieren que la diferencia en frecuencias de respuestas correctas para preguntas referidas al enfoque clásico, en condiciones iniciales y finales de la enseñanza, podría dar cuenta de la contribución de ésta, basada en el enfoque frecuencial, a la comprensión de los estudiantes del enfoque clásico de la probabilidad; y, de manera particular, a su advertencia del espacio muestra, de lo que es *posible*. Ya se ha señalado la mayor dificultad que reviste considerar la probabilidad de un evento en un solo ensayo del fenómeno aleatorio correspondiente, que cuando se considera ese evento en repeticiones del fenómeno (Piaget & Inhelder, 1951, Cáp. X). No obstante, parecería menos significativa la contribución de ese tipo de enseñanza a la comprensión del enfoque frecuencial mismo.

Consideraciones particulares

Las lecciones propuestas en el medio utilizado (Fillooy *et al*, 2001) aluden al juego, lo que conlleva un reto para el docente por buscar el interés de los alumnos para tratar las ideas fundamentales implicadas. Es necesario que el docente se vuelva hacia su práctica para reflexionarla; una manera consiste en video grabar algunas sesiones que imparta, para disecar sus estrategias de enseñanza y estudiar dificultades surgidas bajo criterios de análisis específicos. Pero el docente también requiere de espacios para expresar y compartir reflexiones y experiencias del aula de estocásticos de manera sistemática, planeada y reconocida. Las sesiones de *estudio dirigido* permitieron acceder a la indagación en *aula alterna* y ésta, a su vez, a la investigación en *aula normal*. La organización del estudio realizado deviene una alternativa para un perfil nuevo de docencia, con rasgos para la autocrítica de la enseñanza. El binomio docencia-investigación es fundamental para contribuir a la mejora educativa (Eisner, 1998, págs. 137-140). Para ello, se requieren escuelas que promuevan la formación académica permanente de profesores y de alumnos. Además, es indispensable que los docentes sepan lo que es realmente fundamental en estocásticos y que puedan considerar a las ideas fundamentales desde un plano intuitivo hasta un plano formal (Heitele, 1975).

Referencias Bibliográficas

- Aarcón, J., Bonilla, E., Nava, R., Quintero, R., y Rojano, T. (2001). *Libro para el maestro*. Educación Secundaria. *Matemáticas*. México: SEP.
- Eisner, E. W. (1998). *El ojo ilustrado*. España: Paidós.
- Espinosa, H.; García, S. y García, M. A. (1999). *Fichero de Actividades Didácticas* México: SEP.
- Fillooy, E., Figueras, O., Ojeda, A. M., Rojano, T. y Zubieta, G. (2001). *Matemática Educativa*. Segundo grado. México: Mc Graw-Hill.
- Fischbein, E. (1975). *The intuitive sources of probabilistic thinking*. Holanda: Reidel.
- Frawley, W. (1999). *Vygotsky y la ciencia cognitiva*. España: Paidós.
- Galván, M. (1996). *Nubes y relojes en la curricula de secundaria*. Tesis de maestría. No publicada.. Cinvestav. México.

- Gigerenzer, G. y Hoffrage, U. (1995). Cómo mejorar el razonamiento bayesiano sin enseñanza: Formatos de frecuencia. *Psychological Review*. EUA: APA.
- Heitele, D. (1975). An Epistemological View on Fundamental Stochastic Ideas. *Educational Studies in Mathematics*. 6 (pp. 187-205). Holanda,: Reidel.
- Piaget, J. & Inhelder, B. (1951). *The Origin of the Idea of Chance in Children*. New York: The Norton Library.
- SEP (1993). *Plan y Programas de estudio*. Educación Secundaria. Matemáticas. México: SEP.
- Xique, J. C., Espinosa, H. & Montes, M. D. (2000). *Secuencia y Organización de Contenidos*. Educación Secundaria. Matemáticas. México: SEP.