Una Alternativa para la Construcción Aritmética-Algebraica de las Convenciones Matemáticas Presentes en los Exponentes

Rocío Antonio y Gustavo Martínez
Facultad de Matemáticas, Universidad Autónoma de Guerrero
México
antonny_81@yahoo.com.mx
Socioepistemología – Nivel Básico

Resumen

En este trabajo se presenta los avances de una investigación que tiene como objetivo explorar qué alternativas son factibles para la construcción de las convenciones matemáticas, presentes en los exponentes no naturales, en el plano del pensamiento aritmético- algebraico. Ya que consideramos a la convención matemática como una herramienta para la construcción del conocimiento matemático funcional, hemos diseñado una alternativa: que se trata de una situación didáctica tomando como metodología a la Ingeniería Didáctica y basada en la hipótesis de construcción de conocimiento que nos proporciona el proceso de convención matemática. Aquí presentamos, además, los resultados de una puesta en escena de la situación con estudiantes de secundaria.

Introducción

Esta propuesta surgió a partir de las siguientes exploraciones preliminares:

- Martínez, G. (2002) donde se observaron varios fenómenos didácticos con algunos estudiantes de diferentes niveles escolares (secundaria, medio superior y superior), como los siguientes:

RESPUESTAS	ARGUMENTOS
$2^0 = 0$	El 2 no se multiplica ninguna vez por lo que queda un 2.
$2^{-3} = (-2)(-2)(-2) = -8$	Se multiplica tres veces y al último se le agrega el signo
$2^{3/2} = 2\left(3/2\right) = 3$	
$2^0 = 2$	El 2 no se multiplica ninguna vez y queda nada
$\sqrt{2} = 1.4$	

Con estos tipos de respuestas nos damos cuenta que el estudiante no tiene claro el concepto de exponentes no naturales y no ha alcanzado la estabilidad necesaria para construir el conocimiento de la función exponencial. Se observó, por ejemplo, que los estudiantes están muy influenciados con el concepto de los exponentes naturales (multiplicación reiterada) por las respuestas que dieron, el cero como nada o de ninguno, la segmentación del número negativo "como número positivo" con el signo "menos", además de que el alumno cuando se le presentó un radical lo ignoró y no interpretó su resultado como una exponenciación.

Los libros de texto

Haciendo una revisión de varios libros de secundaria y de álgebra de diferentes niveles escolares observamos que la mayoría de ellos (Alarcón, 2000; Almaguer et al. 1994; Barnett, 1997; Catter, 1997; Gabran, 1990; Laraglia et al, 1997; Nápoles, 1965; Salas, 1997; Shaaf, 1997) realizan el siguiente tratamiento:

- La secuencia de los exponentes es la siguiente: como abreviación de la multiplicación reiterada (naturales), cero, negativo y fraccionario
- Sus argumentos son de tal manera que se conservan las leyes de los exponentes naturales; pero en realidad no son "objetos de estudio". (Tabla 1)

		ARGUMENTOS		
		$2^n * 2^m = 2^{n+m}$	$2^n / 2^m = 2^{n-m}$	$(2^n)^m = 2^{n \cdot m}$
EXPONENTES	Cero	$2^0 \cdot 2^2 = 2^2 \Rightarrow 2^0 = 1$	$1 = 2^4 / 2^4 = 2^{4-4} = 2^0$ $\Rightarrow 2^0 = 1$	No hay argumentos
	Negativo	$2^{-2} \cdot 2^2 = 2^{-2+2} = 2^0 = 1$ $\Rightarrow 2^{-2} = 1/2^2$	$1/2^2 = 2^4/2^6 = 2^{4-6}$ $= 2^{-2} \Rightarrow 1/2^2 = 2^{-2}$	No hay argumentos
	Fraccionario	$2^{1/2} \cdot 2^{1/2} = 2^{1/2+1/2}$ $= 2^1 = 2 \Rightarrow (2^{1/2})^2 = 2$ $\Rightarrow \sqrt{2} = 2^{1/2}$	No hay argumentos	$(2^{1/2})^2 = 2^1 = 2$ $\Rightarrow 2^{1/2} = \sqrt{2}$

Tabla 1. Argumentos presentes en los libros de Texto

- Como reglas de transformación ($a^0 = 1$, $a^{-n} = 1/a^n$, $a^{1/2} = \sqrt{a}$).

Dichas reglas de transformación son utilizadas en la escuela para realizar operaciones con monomios, aplicar reglas de derivación e integración y para la definición de función exponencial y logaritmo.

La noción de convención matemática

Para dar cuenta de la naturaleza de los significados que giran alrededor de los exponentes hemos acuñado la noción de "convención matemática" (Martínez, 2002; Martínez, 2003). Una convención matemática es un agregado (bajo la forma de una definición, un concepto, una restricción, una interpretación entre otras) a una teoría, establecido con el objetivo de que una estructura o parte de ella, de objetos matemáticos construida con anterioridad se preserve para satisfacer ciertos requerimientos dentro de una nueva organización del conocimiento.

Es decir, en nuestras exploraciones preliminares nos damos cuenta que en las aulas escolares hay un cierto problema con estos objetos matemáticos, el estudiante no percibe el carácter convencional del manejo de los exponentes (porque convenir matemáticamente así). Desde nuestro punto de vista son necesarios varios aspectos para la construcción de las convenciones matemáticas. En particular, en el marco del pensamiento aritmético-algebraico son: la ruptura de la concepción de cero como nada, la del exponente entero como multiplicación reiterada y la del surgimiento de las convenciones como un acuerdo para dar unidad a la operatividad de las potencias.

Descripción de la situación didáctica

Objetivo. Se pretende que el estudiante [1], construya de manera aritmético-algebraico las leyes de los exponentes manipulando la objetivisación de las potencias en forma verbal y después confronté su conocimiento de 2^0 con la ley del exponente para el producto, para que se percate de porque convenir matemáticamente que $2^0 = 1$.

Análisis a priori. Los estudiantes contestarán $2^0 = 0$ o que $2^0 = 2$, por el manejo que se le da en los libros y en las aulas escolares a estos objetos matemáticos y por la influencia del concepto de los exponentes naturales.

Diseño y análisis a priori. Esta situación didáctica esta comprendida en ocho actividades y se clasifica en cuatro etapas que son las siguientes:

La primera etapa (Actividad 1 y 2). **Recordar, Familiarizar y Objetivizar.**

Actividad 1. *Recordar* y *familiarizar* los elementos de la notación exponencial como son los exponentes y la base, y el concepto de los exponentes naturales como multiplicación reiterada a través del llenado de una tabla hasta la décima potencia de dos, clasificada en exponentes, notación exponencial, valor de la potencia y nombre de la potencia. *Objetivizar* de manera verbal el nombre de la potencia, es decir, hacer de las potencias objetos.

Actividad 2. Que se percate que al realizar multiplicaciones con potencias de dos, el resultado es otra potencia de dos; tratando de objetivizar aquí también las potencias de manera verbal y que observe que hay una cierta regularidad: la ley de los exponentes para el producto. Además que todos son múltiplos de dos (es aquí donde encuentra la manera de resolver aritméticamente y de manera intuitiva algebraicamente la ley).

La segunda etapa (Actividad 3). **Construir.**

Actividad 3. Se les recuerda que existe una ley de los exponentes para el producto y que es la que encontró en la actividad anterior, tratando de que reflexione con respecto a la primera etapa. Para esto se llena una tabla de multiplicaciones de potencias de dos, expresadas de manera verbal, guiándose por la primera actividad, para así recalcar y construir la noción de la ley del producto tanto aritmético como algebraico es aquí donde esperamos que se de cuenta

[1] Esta situación didáctica esta diseñada para estudiantes de secundaria (12-15 años en el sistema educativo mexicano)

de que al multiplicar las potencias expresadas verbalmente el resultado es la suma de sus ordenes (por ejemplo segunda potencia por tercera potencia es la quinta potencia), y le pediremos que exprese tanto aritmético como algebraico a dicha ley. En este documento consideramos que el aspecto aritmético consiste, por ejemplo; en usar (4)(8) = 32, mientras que $2^2 * 2^3 = 2^5 = 32$ la entendemos como un uso algebraico.

La tercera etapa (Actividades. 4 y 5). **Profundizar.**

Actividad 4. Mencionamos la propiedad que ha encontrado y las dos maneras en que puede resolverse, como por ejemplo:

- o Multiplicar con el valor de cada una de las potencias.
- • Sumar los exponentes y calcular el valor de la potencia.

$$2^3 * 2^2 = \begin{cases} \circ\, 2^3 * 2^2 = 8 * 4 = 32 \\ \bullet\, 2^3 * 2^2 = 2^5 = 32 \end{cases}$$

Actividad 5. Profundizará esta propiedad resolviendo varios ejercicios, donde se dará cuenta que resolviendo de las dos maneras llega al mismo resultado (esta es nuestra herramienta para dar cuenta del carácter convencional de 2^0)

La cuarta y última etapa (Actividades 6, 7 y 8). **Confrontar y Convenir.**

Actividad 6. Se le pregunta cuanto vale 2^0 para determinar cuál es su conocimiento antes de pasar a la siguiente actividad.

Actividad 7. Esta actividad, depende de la respuesta de la actividad anterior, aquí confrontará su conocimiento de 2^0 con la ley del producto de exponentes resolviendo de las dos maneras. Si su respuesta de 2^0 es 1, observará que llega al mismo resultado resolviendo de las dos maneras y si no tendrá que convenir cuanto tiene que valer 2^0 para obtener el mismo resultado (es aquí donde el alumno se tiene que dar cuenta del carácter convencional de porque $2^0 = 1$).

Actividad 8. Por último se le pregunta por segunda vez cuanto vale 2^0 después de haber analizado la actividad anterior.

Algunos resultados de la puesta en escena

Se le aplico a estudiantes de 1^er^ año de secundaría de 13 y 14 años aproximadamente, en la ciudad de Chilpancingo Gro. Para esto se hicieron dos equipos de tres integrantes cada uno.

En la primera etapa. En la actividad uno, no tuvieron ningún problema con el recordatorio de la noción de la multiplicación reiterada (concepto de exponentes naturales) y la objetivización de las potencias verbales. En la actividad dos, concluyeron que al llenar la tabla de multiplicaciones de potencia de dos, ciertas cantidades se repetían con la primera actividad (tabla de la multiplicación reiterada), en este caso las potencias de dos, hubo un niño que sus conclusiones fueron que el llenado de la tabla se trataba de una variación de porcentaje que equivale a la mitad o el doble del resultado anterior y que este se encuentra en su libro de secundaria, además otro estudiante observo qué al multiplicar nos daba una cantidad divisible al primer número. Cabe subrayar que en esta actividad nos falto material de apoyo que son las calculadoras ya que los estudiantes eran muy lentos para realizar las multiplicaciones.

La segunda etapa: al principio hubo confusión por la poca familiaridad de multiplicar objetos matemáticos expresados de manera verbal, así que le pedimos que se guiara por la primera actividad y resolvieron sin ningún problema. Respecto a la descripción de la ley del producto de la manera aritmética quizás por nuestra pregunta confusa en términos verbales para los estudiantes, no especificaron explícitamente la ley con un ejemplo concreto que es como lo queríamos.

En lo algebraico hubo algunos que si expresaron la propiedad en notación exponencial que es como nosotros lo manejamos en esta situación. Otros lo hicieron de manera verbal y algunos nada más tomaron de la primera actividad la lista de potencias que están expresadas en notación exponencial.

La tercera etapa: en esta etapa los estudiantes se dieron cuenta de lo que habían encontrado al realizar las actividades anteriores (al mencionar la ley del producto y las dos formas en que se pueden resolver) y varios se querían regresar para cambiar la respuesta de la construcción de la ley. Con respecto a la profundización de esta propiedad no tuvieron ninguna dificultad.

En la cuarta etapa: La respuesta de la actividad seis fue lo que teníamos previsto en nuestro análisis a priori, un equipo concluyo que $2^0 = 2$ y el otro que tenía dos valores $2^0 = 0$ o 2.

De lo anterior concluimos lo siguiente: Al equipo que concluyo con un solo valor, confrontamos su conocimiento con esa igualdad de $2^0 = 2$ resolviendo varios ejercicios con la ley del producto para que conviniera cuanto tenia que valer realmente 2^0 lo cual convinieron entre todos que era igual a uno. El otro equipo qué concluyo con dos valores, confrontamos su conocimiento con los dos valores; es decir utilizando las dos igualdades por separada, la primera resolviendo ejercicios con la igualdad de $2^0=2$ y la segunda con $2^0=0$, lo cual los llevo a una confusión por que preguntaban cuanto realmente valía, por que ya estaban desesperados por concluir ya que se había terminado el tiempo y tenían clases, así que por el factor tiempo estos niños concluyeron que era dos sin reflexionar nada al respecto.

A manera de conclusión

Aquí presentamos de manera general una situación didáctica para construir las convenciones de los exponentes en un contexto aritmético-algebraico. Los resultados de una primera puesta en escena nos permitieron identificar la factibilidad de que la situación promueva la construcción del conocimiento a través del proceso de convención matemática. Futuras investigaciones tendrán por objetivo recopilar más evidencias al respecto.

Referencias Bibliográficas

Alarcón, G. (2000). *Matemáticas, Aritmética y Álgebra*. México: Editorial Iberoamericana.

Almaguer, G., Bazaldúa, J., Cantú F. y Rodríguez L.(1994). *Matemáticas 2*. México: Limusa.

Barnett (1997). *Álgebra***.** México: Mc Graw Hill.

Catter, P. (1997). *Fundamentos de Matemáticas I***.** México: Mc Graw Hill

Figueras, O., Filloy E. y Lema, S. (1984). *Álgebra I y II*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Gobran, A.(1990). *Álgebra Elemental*. México: Grupo Editorial Iberoamérica

Laraglia, F., Elmore, M. y Conway, D. (1997). *Álgebra***.** México: Latinoamericana.

Martínez, G. (2002). Explicación Sistémica de Fenómenos Didácticos ligados a las Convenciones Matemáticas. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa 5*(1), 45-78.

Nápoles, A. (1965). *Álgebra elemental para escuelas secundarias*. México.

Martínez, G. (2003). *Caracterización de la convención matemática como mecanismo de construcción de conocimiento. El caso de de su funcionamiento en los exponentes*. Disertación doctoral no publicada. CICATA-IPN, México.

Martínez, G. (en prensa). Continuidad y Ruptura de significados en la transmisión y difusión del conocimiento. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (Vol.18.)

Martínez, M. y Struck, F. (1998). *Matemáticas 2*. México: Santillana.

Salas, L.(1997). *Matemáticas I*. México: Ediciones Castillo.

Shaaf, P.(1997). *Álgebra. Un enfoque moderno*. México: Reverté.