INTRODUCCIÓN AL CONCEPTO DE DERIVADA DE UNA FUNCIÓN REAL CON APOYO DE LAS TECNOLOGÍAS DIGITALES

Armando Cuevas V., Arturo Rodríguez E. y Oscar González O.
Centro de investigación y estudios avanzados del Instituto Politécnico Nacional (CINVESTAV-IPN). México
ccuevas@cinvestav.mx; roearturo@hotmail.com; oscargoem@gmail.com

Resumen. Este artículo presenta una propuesta para introducir el concepto de derivada de una función real en un primer curso de cálculo diferencial a nivel superior. Para el desarrollo de esta propuesta se han tomado elementos del desarrollo histórico conceptual del cálculo, la aplicación de una ingeniería didáctica en particular y de manera importante el empleo de la tecnología digital. Los resultados obtenidos son alentadores, porque se logró que la mayoría de los estudiantes alcanzaron con éxito un grado de comprensión conceptual y operativa del concepto de derivada de una función real. Lo anterior fue uno de los factores que condujo a elevar sustancialmente el índice de aprobación, ayudando con esto a solventar algunos de los problemas de deserción en la universidad donde se experimentó, pero sobre todo a una mejor comprensión del concepto de derivada de una función real por parte de los estudiantes.
Palabras clave: función real, derivada, modelación matemática
Abstract. We present to you an innovative proposal to conduct a traditional calculus course, where explicitly applies to the exposure of mathematical facts history, educational and digital technology. The results are encouraging, not only because it could overcome deficiencies in prerequisites but also because it was possible that a large number of students reached with a significant degree of success and acceptable understanding concepts of differential calculus. This led to a substantial increase passing rates, thereby solving many economic problems of administrative college where he experienced, but above all to a better understanding of mathematical concepts by students.
Key words: real functions, derivative, mathematical modeling

Introducción

Uno de los cursos con mayor índice de reprobación, alrededor del 70%, en las escuelas de ingeniería en México, es el primer curso de cálculo diferencial. Este problema, conlleva a problemas de acumulación de estudiantes en primer semestre y eventualmente contribuye a la deserción escolar. Diversos reportes de investigación en la comunidad académica internacional desde hace muchos años (Habre & Abboud, 2006), coinciden con los resultados que ofrece la (ANUIES, 2009) y con publicaciones realizadas por investigadores en matemática educativa; (Cuevas, Moreno & Pluvinage, 2005; Martínez, 2005), et al. Éste problema conduce a una alta demanda en carreras de poco contenido matemático

Problemática de la enseñanza – Aprendizaje del Cálculo

En este breve estudio, algunas investigaciones reportan problemas como: una polaridad en su enseñanza; en un extremo se realiza estrictamente operativa, y en el otro una enseñanza con un gran contenido formal (Martínez, 2005 y Zepeda, 2010). Otro de los problemas detectados es la obsolescencia de los programas de estudio, así como una inversión histórica, en sus contenidos, al desarrollo conceptual del cálculo diferencial (Grabiner, 1983) y la mayoría de programas y textos del cálculo exhiben poco o nulo uso de las tecnologías digitales. En la mayoría de los textos analizados se nota la ausencia de una planificación didáctica. (Ímaz & Moreno, 2010).

Enseñanza estrictamente operativa.

En este tipo de enseñanza se plantean esquemas y modelos algorítmicos de resolución en donde se busca que el estudiante reproduzca los patrones operativos de acuerdo a los esquemas en que fue ilustrado, cabe anotar que en esta exposición el significado de los conceptos queda ausente y la aplicación de la derivada se reduce a transformar expresiones algebraicas mediante las reglas de derivada (Cuevas, Moreno & Pluvinage, 2005 y Tall, 1990). Este tipo de enseñanza se realiza con frecuencia en escuelas de nivel medio superior y en algunas de nivel superior con especialidad distinta a matemáticas. La enseñanza consiste usualmente en aprender de memoria un extenso formulario extenso y algunos algoritmos como el criterio de la segunda derivada para máximos y mínimos para aplicar de manera inmediata alguna de las fórmulas o criterios enseñados. De nuevo, en esta forma tradicional de enseñanza el significado de los conceptos queda ausente y cualquier problema que no sea del tipo enseñado y requiera del significado de derivada o reflexión de los criterios, causa desconcierto y frustración.

Enseñanza Formal

Este tipo de enseñanza procede en forma axiomática, iniciando con la construcción de los números reales, para luego establecer definiciones formales como el de función real de variable real, sucesión, series y límites, para culminar con la definición de derivada como límite. Usualmente los diversos conceptos y definiciones aparecen con todo el rigor matemático, lo cual representa un rompimiento con la forma tradicional de estudiar la matemática en los estudios anteriores. Los contextos se muestran ausentes y por la propia complejidad de la representación lógica-formal el significado de los conceptos también queda ausente así como las diversas aplicaciones (Cuevas & Pluvinage, 2003; Aebli, 1958; Sfard, 1991 e Ímaz & Moreno, 2010).

Revisión de los programas de estudio (obsoletos)

Se identificó que los planes y programas de estudio de la asignatura de Cálculo existentes en escuelas de ingeniería de universidades como: Universidad Autónoma de estado de México (UAEM Valle de Chalco), el Instituto Politécnico Nacional (IPN) y la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM). No han sido modificados en los últimos 30 años. Lo que se puede constatar en las siguientes direcciones electrónicas:

http://www.esimez.ipn.mx/OfertaEducativa/Documents/ingenieria_automotriz/pe_1er_semestre/01-calculo-diferencia-integral.pdf http://www.bunam.unam.mx/mapaCurri/calculoDiferencialIntegral.pdf

http://www.archivos.ujat.mx/dacb/programas_sinteticos/matematicas/area_general/F0022_calculodiferencial.pdf

http://denms.uaemex.mx/programas/4calculodiferencial.pdf

http://uvmeconomia.blogspot.mx/2010/03/programa-de-estudio-de-calculo.html

http://www.sites.upiicsa.ipn.mx/portalweb/OfertaEducativa/PlanesEstudio/IN/01/2/2_(FMCD)_CALCULO_DIFERENCIAL_E_INTEGRAL.pdf

Inversión histórica del desarrollo histórico del cálculo.

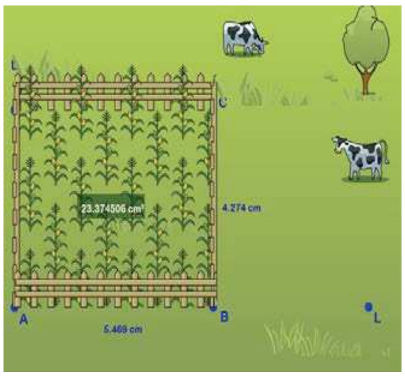
Otro de los problemas detectados es la manera en que los planes y programas de estudio invierten el desarrollo histórico del cálculo. Es decir, en casi todos los programas de estudio, se inicia con el estudio de los números reales, función real, límites y por último aplicaciones de la derivada. Cuando en el desarrollo histórico conceptual aparecen de forma invertida (Ímaz & Moreno, 2010).En primer lugar la derivada se aplicó para resolver problemas, depués se descubrió en forma independiente por Newton y Leibniz, en su tercera etapa se exploró y desarrolló y sólo entonces, se definió. (Grabiner, 1983).

El uso casi nulo de tecnologías digitales.

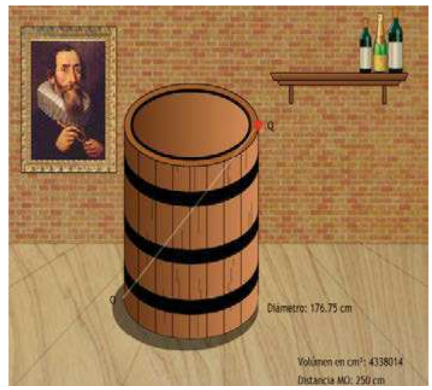
Problema porque los docentes, emplean poco la tecnología en la enseñanza del concepto de derivada o conceptos relacionados con el cálculo, aun cuando existen una amplia gama de software que deriva e integra numérica y simbólicamente, de uso libre en le red. O bien para realizar una transposición histórica mediante un software de uso libre (Vivier, 2010). Lo cual nos lleva a plantear la siguiente pregunta ¿Cómo convertir a la tecnología en una herramienta cognitiva? Así como la falta de planeación didáctica, es decir, el planteamiento de actividades para los estudiantes y profesores para el desarrollo de una mejor comprensión del concepto de derivada de una función real.

Propuesta

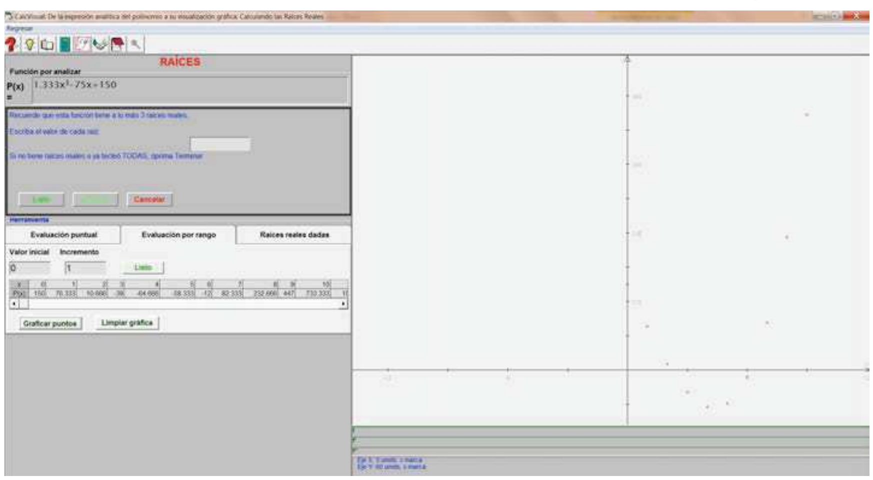
Después dela revisión de los planes y programas de estudio vigente en las Instituciones educativas en el nivel superior (UNAM, IPN, UAM, UAEM, UVM) se propone una reestructuración curricular tomando como base el estudio del desarrollo histórico del cálculo. Donde se plantean actividades que desarrollan como un prerrequisito el pensamiento funcional el cual se convierte en un objeto que será la piedra angular del curso, (Cuevas & Mejía, 2003; Cuevas, Moreno & Pluvinage, 2005 y Riestra & Aguilar, 2009). El presente trabajo se desarrolló tomando como referencia el marco didáctico propuesto por (Cuevas & Pluvinage, 2003) que consiste en una serie de recomendaciones para introducir un concepto matemático. Una de las características de este marco consiste en proponer proyectos de acción práctica en donde el estudiante siempre se encuentre realizando las actividades. Con el uso de las tecnologías digitales (como una herramienta cognitiva de apoyo) permite instrumentar de manera eficiente buenos planteamientos didácticos para favorecer una mejor comprensión del concepto de derivada de una función real en el estudiante. Utilizando el software CalcVisual y los Escenarios Didácticos Virtuales Interactivos (EDVI), Isoperímetro y Barril de Kepler como proyectos de acción práctica ver figura siguiente.



Escenario Didáctico Virtual Interactivo Isoperímetro.



Escenario Didáctico Virtual Interactivo Barril de Kepler.



Sistema tutorial CalcVisual

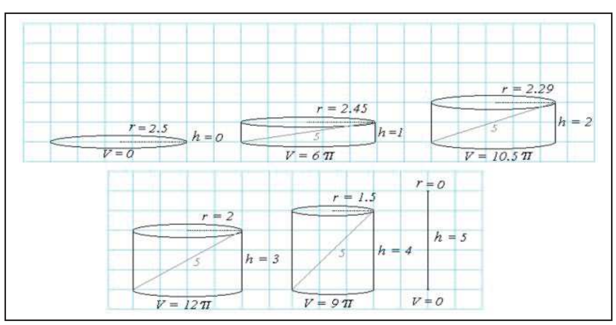
El Software CalcVisual, de uso libre con permiso, permite al estudiante poder transitar a través de los distintos de representación semiótica (numérica, gráfica, simbólica, etc.), (Duval, 1998). Con la integración de los (EDVI) y CalcVisual, el sujeto del aprendizaje es el estudiante y el profesor solo recrea el conocimiento en un proceso educativo basado en la interacción didáctico-comunicativa apoyada en la tecnología digital.

Descripción de la experiencia.

La propuesta se ha implementado desde el año 2007, en el Centro Universitario de la Universidad Autónoma del Estado de México campus Chalco (UAEM, Valle de Chalco), en alumnos de primer semestre de la Licenciatura en Ingeniería en computación, con grupos de 50 alumnos o más.

Se han instrumentado una serie de tecnologías digitales Escenarios Didácticos Virtuales Interactivos (EDVI) desarrollados por Cuevas y Pluvinage, con la idea de que ayuden a promover y desarrollar una comprensión significativa del concepto de derivada de una función real en el curso de cálculo diferencial. Para introducir el concepto de derivada de una función real se propone como proyecto de acción práctica iniciar con el EDVI Isoperímetro que aparece por primera vez de manera implícita en los problemas isoperimétricos de máximos y mínimos de Fermat (Riestra & Aguilar, 2009). Dichos problemas se modelan con funciones algebraicas. De forma congruente con el desarrollo histórico de la derivada (Grabiner, 1983), no recurre previamente, al introducir la derivada, al tradicional límite del cociente diferencial (ya sea de la manera intuitiva o de la rigurosa ε - δ). En su lugar, al abordar problemas de máximos y mínimos, se desarrollan diferencias de la función en términos de incrementos finitos de la variable independiente y se comparan potencias de diferentes órdenes de dichos incrementos, despreciando las de orden superior con respecto a las de orden inferior, cuando se toman incrementos "realmente" muy pequeños. La derivada aparece de manera natural en estos desarrollos como el coeficiente diferencial. Lo cual el estudiante puede apreciar de manera clara al manipular el EDVI Isoperímetro, guiado por la secuencia didáctica donde se recrea de manera clara la aparición del concepto de derivada de una función real. Ejemplo de Fermat: Dado un segmento, dividirlo en dos partes de tal forma que el producto de las partes sea máximo.

Posteriormente se propone que el estudiante manipule el (EDVI) Barril de Kepler y de esta forma puedan percibir la variación, al ver los cambios de la longitud de la altura, producen cambios de volumen. Como se puede apreciar en la figura.



Los escenarios (EDVI) introducen conceptos complejos desde el punto de vista cognitivo e importantes para el desarrollo del curso. Para introducir la derivada de una función real se modela, con el (EDVI) Isoperímetro que escenifica el área máxima que se puede obtener dado un segmento, dividirlo en dos partes de tal forma que el producto de las partes sea máximo y con el (EDVI) Barril de Kepler escenifica el volumen máximo de un barril (cilíndrico) al hacer variar su altura. Al ir manipulando ambos escenarios, el estudiante puede visualizar que varía y que permanece constante en los experimento; de tal forma que mediante la interacción con los EDVI y la conducción a través de cuestionarios el estudiante llega a desarrollar gradualmente la noción intuitiva y la teoría matemática involucrada en el concepto de derivada de una función real, sin recurrir al concepto de límite.

Posteriormente, para desarrollar una destreza operativa en el cálculo de derivada de una función real se proporciona el sistema CalcVisual. El concepto de derivada de una función real resulta fundamental para el desarrollo de conceptos como: puntos críticos, concavidad y rango de una función y el límite.

En las actividades de optimización planteadas en el EDVI Isoperímetro que modela un problema histórico propuesto por Fermat (determinar el área máxima de una superficie rectangular) y el EDVI Barril de Kepler, también modela un problema histórico planteado por Kepler (determinar el volumen máximo que puede contener un barril de Vino). Con ambas actividades se introduce la derivada de una función real. En el siguiente cuadro se pueden apreciar parte del planteamiento de dichas actividades.

Instrucciones: al mover el punto B del área del Terreno (rectángulo) observe lo que sucede y responda a las siguientes preguntas marcando con una "x" el cuadrito de tu respuesta.

1. Mueve el punto B:

a) ¿Varía o cambia el perímetro del Terreno (rectángulo)? ☐ Sí ☐ No

b) ¿Varía o cambia la altura del Terreno (rectángulo)? ☐ Sí ☐ No

c) ¿Varía o cambia la base del Terreno (rectángulo)? ☐ Sí ☐ No

d) ¿Varía o cambia el área del Terreno (rectángulo)? ☐ Sí ☐ No

e) ¿Varía o cambia la longitud de la cuerda? ☐ Sí ☐ No

f) ¿Varía algún otro elemento, que no fuera incluido? Di cual y qué pasa con él:

____

____

g) ¿Hasta qué valor puede aumentar la base del Terreno (rectángulo)? (en m) ____________________

h) ¿Hasta qué valor puede disminuir la base del Terreno (rectángulo)? (en m) ____________________

i) ¿Cuál es la altura máxima que puede alcanzar la base del Terreno (rectángulo)? ____________________

j) ¿Cuál es la altura mínima que puede alcanzar la base del Terreno (rectángulo)? ____________________

k) ¿Cuál es el área del Terreno (rectángulo) cuando su base es la máxima? ____________________

l) ¿Cuál es el área del Terreno (rectángulo) cuando su base es la mínima? ____________________

m) ¿Cuál es aproximadamente el área máxima del Terreno (rectángulo)? ____________________

2. Cuando mueves el punto B, que es lo que observas que está fijo o permanece constante:

a) El perímetro del Terreno (rectángulo) □Sí □ No

b) La altura del Terreno (rectángulo) □Sí □ No

c) La base del Terreno (rectángulo) □Sí □ No

d) El área del Terreno (rectángulo) □Sí □ No

e) La longitud de la cuerda □Sí □ No

a) Algún otro. Descríbelo____

3. En el Terreno (rectángulo)con una longitud de la cuerda L=10 m. y el punto B con una base inicial de 0 m, mueve el punto B hasta tener una altura de 10 m y llena los cuadros vacíos de la siguiente tabla:

Longitud de la cuerda L =10 m.			
Base del Terreno (rectángulo)	**Altura del Terreno (rectángulo)**	**El perímetro del Terreno (rectángulo)**	**El área del Terreno (rectángulo)**
0 m	m	m	m^2
1 m	m	m	m^2
2 m	m	m	m^2
3 m	m	m	m^2
4 m	m	m	m^2
5 m	m	m	m^2
6 m	m	m	m^2
7 m	m	m	m^2
8 m	m	m	m^2
9 m	m	m	m^2
10 m	m	m	m^2

Conclusiones

Al inicio del curso de cálculo se aplica un pre test donde los datos obtenidos muestran que los estudiantes de nuevo ingreso de la carrera de Ingeniería en Computación; presentan graves deficiencias en conceptos básicos aritméticos y algebraicos, además de no poseer un pensamiento funcional.

Después de la aplicación de este experimento apoyado en las tecnologías digitales durante el curso de cálculo, se observó que la mayoría de los estudiantes de manera intuitiva el concepto de derivada de una función real, que resulta ser piedra angular para poder comprender conceptos como: monotonía y resolver problemas de optimización (máximos y mínimos) de una función real. Con ello, se logró reducir el porcentaje de alumnos reprobados de un 70% a un 25%, sin modificar los sistemas de evaluación.

La introducción del concepto de derivada de una función real así como el desarrollo intuitivo del mismo siguiendo una ingeniería didáctica en particular nos obliga a considerar todas las representaciones como importantes y a no priorizar una de ellas en detrimento de las otras. En los problemas en contexto el desarrollo del concepto de derivada de una función real juega un papel primordial para poder entender la tarea solicitada y que sea el estudiante el que inicie cualquier acción hacia la resolución de esta. Lo que intentamos en el aula no es imponer notaciones y definiciones de conceptos matemáticos, la introducción del concepto de derivada de una función real es difícil. Son tantos los conceptos que entran en juego que esto nos obliga a ser muy cuidadosos. Y con respecto al uso de la tecnología digital fue posible modelar y analizar de manera dinámica el concepto de derivada de una función real, siguiendo el desarrollo histórico de la derivada.

Referencias bibliográficas

Aebli, H. (1958). *Una didáctica fundada en la psicología de Jean Piaget.* Buenos Aires: Kapelusz.

Anuies, (2009) Asociación Nacional de Universidades e Instituciones de Educación Superior. http://www.anuies.mx/

Cuevas, C., & Mejía, H. (2003). *Cálculo Visual.* México: Oxford.

Cuevas, C., & Pluvinage, F. (2003). Les projets d'action practique, éléments d'une ingénierie d'ensignement des mathématics. *Annales de didactique et de sciences cognitives*.

Cuevas, C., Moreno, S., & Pluvinage, F. (2005). Una Experiencia de Enseñanza del Objeto Función. *Annales de didactique et de sciences cognitives, 10*, 177-208.

Duval, R. (1998). Registros de Representación Semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. *Investigaciones en Matemática Educativa II*, 173-201.

Grabiner, J. V. (1983). The Changing Concept of Change: The Derivative from Fermat to Weierstrass. *Mathematics Magazine, 56*(4), 195-206.

Habre, S., & Abboud, M. (2006). Students' conceptual understanding of a function and its derivative in an experimental calculus course. *Journal of Mathematics Behavior V, 25*, 57-72.

Ímaz, C., & Moreno, L. E. (2010). *La génesis y la enseñanza del cálculo las trampas del rigor.* México: Trillas.

Martínez, M. (2005). Diseño de un Prototipo de Entorno Computacional para el Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas para un Curso de Cálculo Diferencial a Nivel Superior. *Tesis Doctoral.*

Riestra, J., & Aguilar, A. (2009). Una introducción algebraica y dinámica al concepto de derivada. *El Cálculo y su Enseñanza, 1*, 1-12.

Sfard, A. (1991). On the Dual Nature of Mathematics Conceptions: Reflections of Processes and Objects as Different Sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics, 22*, 1-36.

Tall, D. (1990). A Versatile Approach to Calculus and Numerical Methods. *Teaching Mathematics and its Applications, 9*(3), 124-131.

Vivier, L. (2010). La noción de tangente en la educación media superior. *El cálculo y su enseñanza, 2*, 5-48