LA TEORÍA DE CONJUNTOS EN LA FORMACIÓN DE MAESTROS: FACETAS Y FACTORES CONDICIONANTES DEL ESTUDIO DE UNA TEORÍA MATEMÁTICA

Mario José Arrieche Alvarado
Universidad Pedagógica Experimental Libertador- Instituto Pedagógico de Maracay
marioarrieche@hotmail.com

Resumen
La investigación que presentamos se centra en un aspecto específico de la formación matemática de los maestros de primaria: clarificar el papel que el lenguaje conjuntista debería tener en esa formación. Hemos delimitado el problema al estudio de las relaciones de los conjuntos con los números naturales, por ser éstos esenciales en la matemática escolar, y por tanto en la formación de maestros. Así mismo, se estudian las relaciones ecológicas entre las nociones conjuntistas y las diversas construcciones de los números naturales. El marco teórico adoptado atribuye un papel esencial a los aspectos epistemológicos, esto es, la indagación de la naturaleza de los conocimientos matemáticos objeto de investigación. Se estudian también los aspectos históricos y curriculares sobre la implantación de la "matemática moderna" en los programas de educación matemática básica y su reflejo en los libros de textos en España. Las facetas instruccional y cognitiva se abordan mediante el análisis de un proceso de estudio de la teoría de conjuntos y los números naturales en un curso de formación de maestros y la evaluación final de los significados de una muestra de 122 estudiantes sobre las nociones conjuntistas elementales. Nuestras conclusiones indican que la formación matemática de los maestros debería contemplar el estudio de las nociones básicas de la teoría de conjuntos, por el papel de las nociones conjuntistas en las diversas construcciones de los números naturales. El estudio cognitivo muestra que las nociones conjuntistas presentan índices de dificultad elevados para los maestros en formación.

Introducción Presentamos un tema de investigación de naturaleza curricular sobre "el papel que la teoría de conjuntos debería desempeñar en la formación de maestros", entendiendo el currículo matemático según lo proponen Rico y Sierra (1997). Tomamos en cuenta los aspectos epistemológicos, cognitivos e instruccionales puestos en juego en el proceso enseñanza-aprendizaje de una teoría matemática en un contexto institucional fijado, como es, en nuestro caso particular, "la teoría elemental de conjuntos" y el contexto institucional de "la formación de maestros de primaria". En el marco del currículo de matemática de la formación de maestros, nos centraremos en el tratamiento de los números naturales, tanto en primaria como en la formación de maestros. Se aborda el problema con un paradigma metodológico de tipo mixto entre métodos cualitativos y cuantitativos (Goetz y Lecompte, 1988), utilizando con mayor intensidad el primero. Se combina el estudio documental y cualitativo en la faceta epistemológica con diversas técnicas y enfoques en las partes cognitiva e instruccional. En la parte de fundamentos teóricos, se presenta un análisis epistemológico y curricular de la teoría de conjuntos. El estudio epistemológico de la teoría de conjuntos se realiza con la finalidad de precisar su origen, desarrollo, evolución y su papel en la matemática. El estudio curricular se realiza con la finalidad de describir el fenómeno didáctico conocido como "matemática moderna" en los niveles de primaria y secundaria en el período de los años 60 a 80, así como en los currículos de formación de maestros. Se complementa el estudio epistemológico con el análisis de las construcciones dadas por Frege (1884), Dedekind (1888), Peano (1889), Weyl (1949) y Lorenzen (1962) con el propósito de caracterizar el papel de las nociones conjuntistas en la construcción de

los números naturales realizada por cada uno de estos autores. En la parte experimental se análiza una colección de libros de textos de primaria, correspondientes a la época de vigencia de la matemática moderna y de la época actual con la finalidad de caracterizar el papel de las nociones conjuntistas en el tratamiento dado a los números naturales en este nivel educativo. Además realizamos los análisis del libro de texto (Krause, 1991) usado en el proceso de estudio de los temas de conjuntos, relaciones y funciones de un grupo de maestros en formación; y de la descripción de las clases de un profesor de la asignatura "Matemática y su Didáctica", correspondiente al programa de Formación de Maestros de la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Granada, sobre el tema en cuestión y los números naturales. Dichos análisis se realizan con el propósito de caracterizar los significados elementales y sistémicos puestos en juego en la interpretación del texto usado en el proceso de estudio mencionado, y el de caracterizar los conocimientos (propuestos por el profesor) de las partes del texto que hacen referencia a los contenidos matemáticos tratados en las sesiones de clase. En la parte experimental realizamos un estudio de tipo cognitivo a un grupo de 122 maestros en formación, que han cursado también la asignatura "Matemática y su Didáctica" de la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Granada con la finalidad de caracterizar los significados personales con respecto a la teoría de conjuntos de estos estudiantes.
En este informe abordamos los análisis de las construcciones de los números naturales elaboradas por Frege, Dedekind, Peano, Weyl y Lorenzen, de los libros de textos de educación primaria de las épocas de la matemática moderna y actual, y de la observación no participante de la clase de un profesor de la asignatura "Matemática y su Didáctica" de la formación de maestros sobre nociones conjuntistas y números naturales. En Arrieche (2002) se describen la problemática general y los restantes aspectos de la investigación.

Uso de nociones conjuntistas en las construcciones de los números naturales.
Para el **a**nálisis de las construcciones de los números naturales elaboradas por Frege, Dedekind, Peano, Weyl y Lorenzen, describimos e interpretamos el papel de las nociones conjuntistas básicas en las construcciones en referencia, haciendo uso de la noción de praxeología matemática desarrollada en el marco teórico de tipo semiótico-antropológico propuesto por Godino y Batanero (1994, 1997), para lo cual consideramos las dimensiones praxémica (tipos de problemas, técnicas y los elementos rotacionales o lingüisticos) y discursiva (conceptos-definiciones, propiedades - proposiciones, argumentaciones - justificaciones) de la praxeología numérica, puestas en funcionamiento en las mencionadas construcciones. Para ilustrar este procedimiento, aquí sólo explicamos y describimos el análisis realizado para caracterizar el papel de las nociones conjuntistas en la construcción de Frege.

Dimensión Praxémica. Los tipos de situación problema, Mosterín (2000) señala que Frege se dedicó a dos tareas básicas: la fundamentación de la aritmética y la aclaración de las nociones semánticas. En las técnicas, tomamos en cuenta el conjunto de pasos realizados para obtener el concepto de número natural y su serie numérica 0, 1, 2, 3,... Para presentar el concepto de número natural define el concepto de número cardinal (en general) y el de número natural o finito. A su vez para elaborar la definición de número cardinal define una relación de equivalencia R sobre una clase A. Es notorio que desde el mismo planteamiento del procedemiento utilizado, se nos presenta de una forma implícita el uso de las nociones básicas de la teoría de conjuntos. Con respecto al uso de los elementos notacionales o lingüisticos, identificamos las notaciones de un objeto y de una clase cualquiera con las notaciones de elemento de un conjunto y la de un conjunto cualquiera, respectivamente.

Dimensión discursiva. En la *argumentación* dada por Frege, la relación de equivalencia definida sobre la clase A para definir el número cardinal genera una partición de A en clases de aquivalencia, tiene implícitas las nociones de familia de conjuntos, conjunto vacío, intersección y unión de conjuntos. En l*os conceptos-definiciones* se elige como dominio la clase cuyos elementos son conceptos y se define la relación de equivalencia entre conceptos, como relación de biyectabilidad, se expresa de la manera siguiente: el concepto *P* es biyectable (o están relacionados mediante la relación de biyectabilidad) con el concepto *Q* sí y solo sí hay una biyección (aplicación biunívoca) entre los objetos que caen bajo *P* y los objetos que caen bajo *Q*. En esta relación identificamos a los conceptos con la noción de conjunto, la noción de aplicación biunívoca abarca las nociones de conjunto y de elemento de un conjunto.

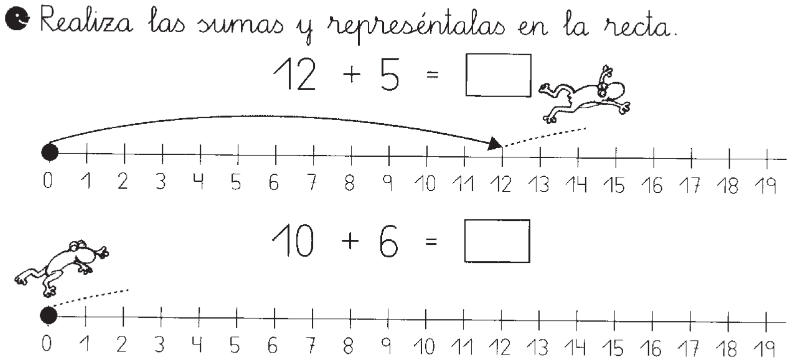
El *concepto-definición,* el número cardinal de un concepto *P* es la clase de equivalencia de *P* respecto a la relación de biyectabilidad, es decir, la clase de todos los conceptos biyectables con *P*. En esta definición se involucra la noción de conjunto, resaltándose que un número cardinal es un conjunto, y que a su vez, sus elementos son conjuntos.

En esta componente de nuestra investigación, se resalta el hecho de que las construcciones de los números naturales realizadas por los matemáticos referidos, presentadas con diversos enfoques (logicista, formal y constructivista), están conectadas por el uso de nociones básicas de la teoría de conjuntos, debido a que sus desarrollos utilizan implícita o explícitamente estas nociones.

Uso de praxeologías conjuntistas en el estudio escolar de los números naturales. Presentamos el estudio realizado sobre las relaciones de tipo ecológico existentes entre lo que hemos descrito como praxeología conjuntista y el estudio de los números naturales (praxeología numérica) en los cursos de 1º a 6º de la Educación General Básica[22], tanto en la época de vigencia de la matemática moderna como en la época actual. Para tal fin, realizamos un análisis de una colección de libros de textos de estos niveles y las épocas en referencia. Para mostrar el procedimiento empleado describimos algunos fragmentos relacionados con el tratamiento de los conjuntos en el estudio de los números naturales en los textos de la época actual. En este período hemos seleccionado textos publicados por la Editorial Anaya, comprendidos entre los años 1997 y 2000. La hipótesis que guía nuestro análisis es que aunque no se utiliza el discurso teórico conjuntista, sin embargo, encontraremos abundantes elementos del componente praxémico conjuntista, esto es, ejemplos de conjuntos o colecciones de

[22] Actualmente, parte de la Educación General Básica comprende los cursos de 1º a 6º de Educación Primaria.

objetos, subconjuntos y operaciones de unión, diferencia y producto cartesiano. Con respecto al tratamiento dado a los conjuntos en el estudio de los números naturales, El libro[23] del primer curso comienza con el estudio de los números del 1 hasta el 5. En la primera página se presenta una escena escolar en la que hay representados distintos objetos clasificables según distintos criterios: libros, niños, niñas, sillas, personas sentadas, etc. La consigna que se da al niño es escueta: *¿Cuántos hay*? De manera indirecta se pide hallar el cardinal de 9 colecciones de objetos dados mediante una propiedad: ¿Cuántos cuadernos, niñas, niños, patos, maestras, sillas, niños sentados, papeleras, mesas hay representados en la escena? Para la primera pregunta, ¿cuántos cuadernos hay? se da como ejemplo la solución en forma de 5 palotes dentro del recuadro, lo que sugiere que la consigna debe interpretarse como, "poned tantos palotes dentro del recuadro como 'objetos' haya de cada clase". La realización de la tarea pedida supone el manejo de colecciones finitas de objetos, su clasificación en subcolecciones de acuerdo con una propiedad característica, la producción de una colección de marcas coordinable con cada subcolección y el recuento de los objetos (determinación del cardinal del conjunto correspondiente) expresado aquí mediante el sistema de numeración más simple (colecciones de marcas). En la figura se usa la semirecta numérica como modelo del sistema de números naturales y de la operación de sumar naturales; la suma se modeliza mediante los "saltos de una rana" sobre las posiciones marcadas en la semirecta.



También se puede contemplar como sistema modelizado por los símbolos numéricos posicionales en virtud de la correspondencia biyectiva que se establece entre ambos conjuntos de objetos. Además los segmentos de palabras y símbolos numéricos forman conjuntos de objetos cuyo tamaño relativo respecto de cualquier otra colección se puede determinar mediante la coordinabilidad. En el libro[24] de cuarto curso las propiedades conmutativa y asociativa de la suma de números se justifican como generalizaciones de invariantes observables con las acciones de agregar colecciones de objetos. La propiedad conmutativa de la multiplicación se justifica mediante un ejemplo que pone en juego la multiplicación como producto cartesiano. En una lámina con 4 filas de sellos, cada una de las cuales tiene 6, ¿cuántos sellos hay en la lámina? El mismo resultado se obtiene si se multiplican las filas por las columnas que las columnas por las filas.

[23] Varela, A y Cols (2000). Matemática 1. Madrid: Anaya
[24] Ferrero, L. Y cols (1997). Matemática 4. Madrid: Anaya.

Análisis del proceso de estudio implementado por un profesor de la formación de maestros.

En esta sección nos referiremos al análisis realizado a la observación no participante del proceso de enseñanza-aprendizaje de estos temas y los números naturales, correspondiente a la clase de un profesor de la asignatura "Matemática y su Didáctica" del programa de Formación de Maestros de la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Granada. Para ello , aplicamos los análisis semiótico y didáctico a las partes del texto que hacen referencia a los contenidos matemáticos tratados en las sesiones de clases.

El análisis semiótico nos permitirá caracterizar los conocimientos puestos en juego por el profesor, que complementan la información del libro, y algunos indicadores de los conocimientos personales de los estudiantes. Por su parte, el análisis didáctico nos ayudará a caracterizar los patrones de interacción entre profesor y estudiantes a propósito de los contenidos estudiados. En la descripción del desarrollo de las clases identificamos tres tipos de unidades.

- Las que hacen referencia a conocimientos institucionales (unidades epistémicas, que designaremos con la letra E).
- Las que hacen referencia a conocimientos de sujetos individuales (unidades cognitivas, C).
- Las que se refieren a patrones de interacción entre docentes y discentes (unidades didácticas, D).

Para ilustrar este procedimiento presentamos un fragmento del análisis realizado a la primera fase de la clase Nº 8 donde se introduce el estudio de los números naturales.

Clase 8; 1ª fase (Número natural)

Unidades	Texto
D1	Se inicia expresando: Trabajaremos primero el concepto de número, la idea, y después pensaremos en el idioma en que podemos escribirlo. Número natural o números naturales. ¿Que son los números?, por ejemplo: ¿Que es el número cinco? Se nos presenta un problema, utilizamos los números desde muy pequeños. Sin embargo, se nos pregunta ¿ que es un número? y tenemos dificultad para responder
C1	Pregunta a los estudiantes, ¿Alguien sabe qué es un número? Un alumno responde "un signo que designa una cantidad". El profesor vuelve a preguntar, "¿Qué es el número cuatro?". los alumnos no responden. Para explicar el profesor escribe en la pizarra el símbolo "4" y expresa: esto no es más que un signo. ¿Cuál sería la idea que hay detrás de ésto?, ¿Como podría definirlo?
E1	El profesor responde que, si quiero comunicar qué significa el número cuatro ponemos ejemplos de grupos que vengan de cuatro en cuatro, como por ejemplo: cuatro tizas, cuatro dedos, cuatro personas, cuatro sillas, etc. Lo que tienen de común todos estos conjuntos es lo que llamamos la idea de ser cuatro.
E3	¿De qué manera se trabaja en Educación infantil y en Educación primaria? Se empieza a mostrar los números como útiles, pero como futuros maestros, lo vamos a tomar como objeto de estudio. Expresa el profesor: la relación de equivalencia me clasifica a los conjuntos, se forman clases de conjuntos. Para denotar la clase de un conjunto escribiremos cl (A) . cl(A) = {conjunto B tq $B \approx A$}. ¿Que tienen en común los conjuntos equipotentes con uno dado? El número de elementos. Aquello que tienen en común es lo que se llama número natural. Se han clasificado todos los conjuntos, y a cada una de estas colecciones de conjuntos equipotentes es lo que se llama número natural. Por ejemplo: 1) Si A = {a}, a la colección cl(A) se le llama número natural uno, y se indica por el símbolo 1.

E4	2) Si A = {a, b}, a la colección cl (A) se le llama número natural dos, y se denota por el símbolo 2. 3) C = {a, b, c}, a la colección cl(A) se le llama número tres, y se indica por el símbolo 3. De esta manera nos vamos formando la colección de los números. Por ejemplo, para formar el dos, me he tomado el conjunto que tenía para representar el uno, y le agrego un nuevo elemento. Para formar el tres, tomo el conjunto que tenía para representar el dos , y le agrego un nuevo elemento; y así sucesivamente. **Observación:** Cada conjunto que tomo para representar un número, siempre tiene un elemento más que el conjunto que me representa el número anterior. Resalta que en la escuela no van a enseñar este concepto de esta manera, pero si interesa que reflexionen en lo que es un número. Si nos tomamos la colección de estos números obtenemos el conjunto N de los números naturales: N = {1, 2, 3, 4, . . . }. Si consideramos el conjunto ∅, a la colección cl (∅) se le llama número cero, y se denota por el símbolo "0". De esta manera el cero puede ser el primer natural. Así se puede escribir N = {0, 1, 2, 3, . . .}.

Conocimientos puestos en juego

E1, E2, E3: Se explica el significado de un número basado en la idea de lo que tienen en común diversas colecciones de objetos, cuyo cardinal es ese número. Se introduce la definición formal de número fundamentada en el hecho de que la relación de coordinabilidad entre conjuntos finitos es una relación de equivalencia, lo que permite clasificar a los conjuntos en clases de equivalencia. Así, se define un número natural como la colección de conjuntos que conforman una determinada clase de equivalencia. Para ilustrar esta noción se explica los conceptos de los números 1, 2 y 3. Es de hacer notar que, la idea en la que el profesor orienta la enseñanza del número es parecida a la definición por abstracción mencionada en la sección 2.5 del capítulo 2, pero con la distinción de que en este caso el profesor puntualiza que la propiedad común referida a los conjuntos coordinables entre sí, que representa el número que se obtiene de ellos, es precisamente su cardinal. También se destaca que el procedimiento empleado en la construcción de los números es parecido al utilizado por Frege (1884) para lograr este mismo fin.

E4: Se define el natural cero como la colección de conjuntos que conforman la clase de equivalencia del conjunto vacío, mediante la relación de coordinabilidad. Se introduce el conjunto N de los números naturales por la colección de todos los números construídos mediante el proceso de obtención de todas las clases de equivalencia de la relación de coordinabilidad entre conjuntos finitos.

C1: Las explicaciones previas de la definición de suma de naturales, indujo a los estudiantes a comprender rápidamente que la operación de multiplicación se corresponde con el producto cartesiano de conjuntos.

Patrones de interacción didáctica

D1, D2, D3: El profesor introduce el tema de los números planteándoles a los estudiantes diversas interrogantes sobre que piensan ellos qué son los números, sobre el significado de números concretos, etc. También usa el mismo procedimiento en la noción de suma de números naturales, sobre qué se hace para hallar la suma de números específicos. Finalmente, insta a los estudiantes a verificar las propiedades de adición y multiplicación de números naturales utilizando números concretos.

Conclusiones

Los análisis que hemos realizado en este estudio nos han permitido obtener las siguientes conclusiones. El estudio de las construcciones de los números naturales dadas por autores interesados por los fundamentos de la matemáticas, tales como:

Frege, Dedekind, Peano, Russell, muestran que las mismas tuvieron su base en fundamentos lógicos y nociones conjuntistas. Sin embargo, a pesar del interés de estos autores por la fundamentación de la arítmética con criterios lógicos, las nociones y procedimientos usados tenían algunas diferencias. El análisis realizado a las construcciones de los números naturales de autores que usaron enfoques axiomaticista y recursivo revela que en dichas construcciones están involucradas implícitamente las nociones conjuntistas. Tal es el caso de las construcciones de Weyl, Lorenzen y Benacerraf. La distinción entre *ejemplar* y *tipo* que propone el enfoque semiótico de la cognición matemática de Godino se revela aquí como un constructo útil para entender las relaciones entre las diversas construcciones de N. Este resultado nos permite analizar y valorar la pertinencia y adecuación de las maneras de presentar los números naturales en la educación primaria y en la formación de profesores. El análisis realizado a los libros de la época de la matemática moderna muestra que sólo en algunos de los textos se usan las nociones conjuntistas en los temas de aritmética, tales como: la definición de número natural, operaciones aritméticas, etc. Los textos de la mayoría de los cursos se caracterizaron por la extensión y formalidad con que trataron los contenidos de teoría de conjuntos; y por el casi nulo uso de estas nociones en el desarrollo del resto de los contenidos matemáticos estudiados en los textos correspondientes. El análisis de los libros actuales indica que los autores de los textos no desarrollan un discurso conjuntista previo al tratamiento de los temas propuestos. Sin embargo, presentan casi de forma explícita las nociones de conjunto, subconjunto, cardinal de un conjunto y aplicación biyectiva en el estudio de los números naturales. El análisis de la clase observada sobre nociones conjuntistas y números naturales nos ha permitido determinar que el profesor observado enseña a los futuros maestros los números naturales, considerándolos como objeto de estudio, es decir, se interesa por enseñarles una definición matemática o formal, aunque les aclara que ésta no es la forma en que ellos enseñarán a los niños de primaria. Este docente pone en funcionamiento las nociones conjuntistas, enseñadas previamente, para enseñar a los alumnos los números naturales; para lo cual, define la relación de coordinabilidad entre conjuntos finitos. El enfoque adoptado para construir los números naturales es parecido a los enfoques logicistas de Frege y de Russell, al definir un número natural como una clase de equivalencia mediante la relación de coordinabilidad entre conjuntos finitos. En el desarrollo de nuestra investigación hemos encontrado que las nociones básicas de la teoría de conjuntos están involucradas implícita o explícitamente en las diversas construcciones de los números naturales. Por otro lado, en los libros de textos actuales de primaria analizados también se detectaron casi explícitamente las nociones de conjunto, subconjunto y aplicación biyectiva en el tratamiento de los números naturales. Además, como los números naturales son el primer contacto de los niños con la matemática, surge como una consecuencia obvia que los futuros maestros de primaria deben poseer conocimientos matemáticos sólidos sobre dichos números, y por tanto conocer las nociones básicas de teoría de conjuntos involucradas en las diversas construcciones. Nuestra investigación nos ha permitido concluir que los números no deben confundirse con los conjuntos, que cada número no se puede identificar con una colección de conjuntos coordinables, ni como una propiedad de los conjuntos coordinables entre sí. Sin embargo, los cardinales de los conjuntos, su numerosidad, son la razón de ser de los números. Esto se muestra bien en el capítulo 5 al analizar la presentación de los números naturales en los libros de texto usados actualmente: ha desaparecido el *discurso* conjuntista, pero no la *praxis* conjuntista.

Bibliografía

Arrieche, M. (2002). *La teoría de conjuntos en la formación de maestros: Facetas y factores condicionantes en el estudio de una teoría matemátic*a. Tesis doctoral. Departamento de Didáctica de la matemática de la Universidad de Granada.

Dedekind, R. (1888). *¿Qué son y para qué sirven los números?* [Traducción e introducción de José Ferreirós]. Madrid: Alianza Editorial, 1998.

Frege, G. (1884). *Fundamentos de la aritmética*. [Traducción de Ulises Moulines]. Barcelona: Laia, 1972.

Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matematicos. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 14 (3): 325-355.

Godino, J. D. y Batanero, C. (1997). A semiotic and antropological approach to research in mathematics education. *Philosophy of Mathematics Education Journal,10.*[URL: http://ww.ex.ac.uk/local/PErnest/pome10/art7.htm].

Godino, J. D. (2001). Un enfoque semiótico de la cognición matemática. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. (Pendiente de publicación. Recuperable en: http://www.ugr.es/local/jgodino/).

Goetz, J, y Lecompte, M. (1988). *Etnografía y diseño cualitativo en investigación educativa*. Madrid: Morata.

Krause, E. F. (1991). *Mathematics for elementary teachers*. Lexington, Ma: D. C. Heath.

Lorenzen, P. (1962). *Metamatemática*. [Traducción Jacobo Muñoz]. Madrid: Tecnos, 1971.

Mosterín, J. (2000). *Los lógicos*. Madrid: Espasa.

Peano, G. (1889). *Los principios de la aritmética*. [Traducción de Julián Velarde]. Oviedo: Clásicos El Basilisco, 1979.

Rico, L. y Sierra, M. (1997). Antecedentes del currículo de matemáticas. En L. Rico (Ed.), *Bases teóricas del currículo de matemáticas en educación matemática* (pp.17-75). Madrid: Síntesis.

Russell, B. (1903). *Los principios de la matemática*. [Traducción de Juan Carlos Grimberg]. Madrid: Espasa-Calpe, 1967.

Varela, A y cols (2000). *Matemática 1*. Madrid. Anaya.

Varela, A y cols (2000). *Matemática 2*. Madrid. Anaya.

Weyl, H. (1949). *Filosofía de las matemáticas y de la ciencia natural*. [Traducción de Carlos Ímaz]. México: Universidad Nacional Autónoma de México, 1965.