

## **La construcción de la derivada a través de la noción de variación en estudiantes de Nivel Superior**

Javier Barrera Ángeles  
UAEH. México  
jbarrera@uaeh.reduaeh.mx

### **Resumen**

Nuestro objetivo es analizar los procedimientos de cómo los estudiantes (nivel superior) construyen el concepto de derivada a través de la noción de variación. Esta noción constituye la línea directriz mediante la cual, se pretende construir uno de los conceptos más importantes del cálculo: la derivada (Dolores 1999). Podemos mencionar una serie de factores que propician los fracasos escolares. Sin embargo, consideramos que dos de los principales son: A) La pobreza conceptual que se maneja en la práctica escolar, y B) El uso del lenguaje convencional y el manejo de algoritmos sin un previo conocimiento de que se requieren ciertos esquemas para darle sentido al lenguaje simbólico y a las reglas de cálculo. Las actividades principales para la constitución de nuestro objetivo consiste en: 1) Revisión bibliografía. 2) Entrevistas a profesores. 3) Entrevistas con estudiantes.

### **Objeto de estudio**

Nuestro objetivo es analizar los procedimientos de cómo los estudiantes del nivel superior construyen el concepto de derivada a través de la noción de variación. La idea que nos guía para estudiar acerca de cómo la noción de variación permite al estudiante construir el concepto de derivada, es el hecho de que la variación constituye la línea directriz mediante la cual se pretende construir uno de los conceptos más importantes del cálculo: la derivada (Dolores, 1999).

Es conveniente precisar acerca del tipo de problemas que nos permiten observar sobre tales construcciones, por ejemplo, cuando el concepto de derivada es construido a través del concepto de pendiente, el tipo de problemas que se presentan al estudiante son tales que al interactuar el con el problema, se observan las evidencias acerca de tales construcciones (tal vez en esta parte exista con anticipación un procedimiento de solución). En este caso, el problema matemático presenta al estudiante un reto o dificultad que no tiene solución inmediata y que posibilita la búsqueda de procedimientos a partir de sus conocimientos previos. Nuestro propósito es contribuir a la discusión y planteamiento de preguntas sobre la enseñanza y aprendizaje de los conceptos del cálculo.

### **Justificación**

La enseñanza del cálculo es una de las tareas más difíciles para profesores de nivel superior. Dicha dificultad se manifiesta en un alto porcentaje de estudiantes que fracasan en aprender estos contenidos. Podemos mencionar un serie de aspectos que propician estos fracasos escolares, tal vez, unos más importantes que otros. Sin embargo, consideramos que uno de los aspectos que determinan dicho fracaso, es sin duda alguna la pobreza conceptual que se maneja en la práctica escolar. En el caso de la enseñanza del cálculo, se prioriza sobre el manejo operativo de límites y reglas de derivación, sin considerar una gran variedad de situaciones que están vinculadas al concepto; solo por mencionar algunas, tenemos: la noción de límite, noción de función, noción de cambio, noción de variación y noción de aproximación. Por ejemplo, la aproximación está en el corazón de los grandes

problemas y de las técnicas del cálculo: aproximar números, funciones... (Cantoral & Reséndiz, 1997).

Además, existen otros elementos que explican el fracaso escolar. Por ejemplo, el desconocimiento por parte de los maestros, de esquemas de conocimiento previos que necesitan los estudiantes para poder comprender conceptos de cálculo. Es de esperarse que los maestros planteen a sus estudiantes problemas existentes en los textos tradicionales de cálculo, lo cual sólo permite una repetición de contenidos, estos a menudo son memorizados por los estudiantes. Otro factor, no menos importante es el uso del lenguaje convencional y el manejo de algoritmos sin un previo conocimiento de que se requieren ciertos esquemas para darle sentido al lenguaje simbólico y a las reglas de cálculo. Estos saberes, por llamarles de alguna manera, únicamente sirven en el contexto escolar y no pueden ser utilizados como herramientas con las cuales los estudiantes puedan resolver problemas de la vida cotidiana.

Autores como Dolores (Dolores, 1999) concluye que los cambios relativos se miden por medio de razones o cocientes entre cambios. Ésta es una de las ideas más importantes del cálculo diferencial, pues siempre que se estudia un fenómeno de variación lo importante no es sólo determinar los cambios, sino determinar que tan rápido cambia eso que cambia, y la mejor forma de averiguarlo es por medio de las razones entre los cambios.

Lo anterior justifica acerca de la construcción del concepto de la derivada a través de la noción de variación en estudiantes del nivel superior. Los productos de esta investigación pueden aportar elementos tanto a la didáctica de la matemática como a profesores de matemáticas, quienes harán uso de estos resultados para mejorar su práctica educativa.

## **Marco teórico**

Nuestro estudio se fundamenta en los elementos teóricos que permiten una explicación clara y precisa de nuestro problema de investigación.

Para entender acerca del aprendizaje de conceptos es conveniente, primeramente definir al concepto como tal, es decir, a los conceptos se les define como objetos, eventos, situaciones o propiedades que poseen atributos de criterio comunes y que se designan mediante algún símbolo o signo. En la formación de conceptos, los atributos de criterio del concepto se adquieren a través de la experiencia directa, o a través de etapas sucesivas de la generación de hipótesis, la comprobación y la generalización. Por otra parte, existen procesos mediante los cuales los conceptos son asimilados por los estudiantes por ejemplo, los procesos preceptuales y los procesos cognoscitivos en el aprendizaje verbal significativo es particularmente difícil de definir porque en ambas clases de proceso hay interacción del estímulo verbal de entrada con la estructura cognoscitiva. Percibimos mensajes verbales y aprendemos cognoscitivamente sus significados al interpretarlos con base en el conocimiento existente. la diferencia entre los dos procesos es de inmediatez y complejidad. En la percepción hay un contenido inmediato de conciencia antes de la intervención de procesos cognoscitivos complejos como los del aprendizaje por recepción . En la cognición, hay procesos como el de relacionar el material nuevo con los aspectos pertinentes de la estructura cognoscitiva, averiguar de qué manera el nuevo significado resultante puede reconciliarse con el conocimiento establecido, y decodificarlo en términos más familiares e indiosincráticos. En estas condiciones, el significado verbal resulta de

relacionar e incorporar materiales verbales potencialmente significativos con la estructura cognoscitiva existente. Los conceptos constituyen un aspecto importante de la teoría de la asimilación debido a que la comprensión y la resolución significativa de problemas dependen en gran parte de la disponibilidad en la estructura cognoscitiva del alumno tanto de conceptos supraordinados (en la adquisición inclusive de los conceptos) como de conceptos subordinados.

Como abstracciones los conceptos representan obviamente tan sólo una de las muchas maneras posibles de definir una clase y no disfrutan de existencia real en el mundo físico. En términos psicológicos, sin embargo, los conceptos son reales en el sentido de que: a) pueden ser adquiridos, percibidos, entendidos y manipulados como si disfrutaran de existencia independiente por su propio derecho, y b) son percibidos y comprendidos tanto denotativamente como en razón de sus funciones sintácticas, casi de la misma manera de una cultura a otra; por ejemplo, el término cultura es, en sí una abstracción (concepto) que no posee existencia independiente, sino que consiste meramente en actitudes modales.

El alumno deberá pasar por muchos de los mismos procesos de abstraer, diferenciar, generar y comprobar hipótesis, y generalizar, antes de que surja el significado nuevo. Una vez que se han adquirido, los conceptos ejecutan muchas funciones en el desempeño cognoscitivo. A la utilización cognoscitiva de los conceptos existentes la ejemplifica ese tipo de aprendizaje por recepción en que ejemplares menos evidentes de una clase genérica conocida deben ser identificados como tales (categorización cognitiva) y en qué conceptos, subconceptos y proposiciones nuevos y relacionados son adquiridos, asimilándolos en entidades preposicionales o conceptuales más inclusivas.

Es evidente que la distinción entre la adquisición y el empleo de conceptos es algo arbitraria, pues unas de las principales funciones de los conceptos existentes en la estructura cognoscitiva es facilitar la adquisición de conceptos nuevos, y más el caso de la asimilación de conceptos que en el de la formación de los mismos. La resolución de problemas, por un aparte, y la formación y el empleo de conceptos, por la otra, coinciden en muchos aspectos. Por otra parte, Piaget (Piaget, 1998) en su Obra "*La equilibración de las estructuras cognitivas: problema central del desarrollo*" trata de explicar el desarrollo e incluso la formación de los conocimientos recurriendo a un proceso central de equilibración. Su actitud se centra en los problemas que hay que resolver son los de las diferentes formas de equilibrio, de la razón de los desequilibrios y sobre todo el mecanismo causal de las equilibraciones y reequilibraciones.

Según Piaget, los ciclos epistémicos y su funcionamiento se basan en dos procesos fundamentales que constituirán los componentes de todo equilibrio cognitivo: el primero, es la **asimilación** o incorporación de un elemento exterior (objeto, acontecimiento, etc) en un esquema censo -motor o conceptual del sujeto, el segundo proceso central que hay que invocar es el de la **acomodación**, es decir, la necesidad en que se encuentra la asimilación de tener en cuenta las particularidades propias de los elementos que hay que asimilar.

## **Metodología**

Debido a la naturaleza de nuestra investigación, dividimos nuestras actividades en tres partes, las cuales son: 1) realizar un revisión adecuada en los textos de cálculo que existen en la biblioteca central de la Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo. La selección de los textos se hizo de acuerdo a los siguientes criterios: a) la bibliografía que recomiendan

los programas de estudio, b) la bibliografía que es más comercial en el mercado y de mayor demanda y c) la bibliografía que es recomendada por los profesores que imparten la materia de Matemáticas I (cálculo Diferencial e Integral). En estas revisiones, nos interesó identificar en los textos de cálculo acerca de los temas que anteceden al estudio del concepto de derivada. 2) Se seleccionaron a dos profesores que imparten dicha materia de cálculo en esta Universidad. Se fijó la fecha y el lugar de la filmación de dichas entrevistas, mismas que fueron realizadas en el espacio denominado Auto acceso, en esta parte los profesores presentaron un problema con el cual ellos introducen de alguna manera el concepto de derivada a sus estudiantes, esta presentación fue filmada para su análisis. Estas entrevistas tuvieron una duración de 45 minutos aproximadamente. y 3) la tercera etapa consistió en entrevistar a estudiantes de la Lic. en Sistemas Computacionales, quienes ya habían cursado la materia de Matemáticas I (cálculo diferencial e Integral). Fueron seleccionados de acuerdo a su disposición de colaborar en estos trabajos; se les comentó sobre el objetivo de la Investigación. Las entrevistas fueron realizadas en el mismo lugar, también fueron filmadas. En la entrevista a estudiantes se les planteó el problema el cual ellos debían de resolver, se les proporcionó el material adecuado para que hicieran sus anotaciones correspondientes. Se hizo un análisis de los planteamientos presentados por los profesores, así, como de los estudiantes.

### **Principales resultados**

a) En este apartado presentamos en forma breve algunos de los aspectos más importantes en cuanto al contenido, según autores de “textos de cálculo”. Además, puntualizamos en el hecho de que algunas de las nociones del cálculo, como lo son: la noción de variación, la noción de cambio entre otras no están presentes en los contenidos de cálculo, como temas que antecedan al estudio del concepto de derivada.

Después de revisar la presentación de los contenidos en los diferentes textos, podemos decir que la tendencia en la presentación del concepto de derivada es la siguiente: números reales, tratamiento con funciones, teoría de límites y continuidad, derivada de funciones. Hemos observado que la noción de variación como una situación que permita o favorezca la presentación del concepto de derivada en los diferentes textos analizados esta ausente. Por otra parte, el concepto de límite predomina en los textos de cálculo como un tema que antecede al estudio del concepto de la derivada.

b) Dentro de las actividades que hemos considerado en nuestro trabajo, las presentaciones que los profesores han hecho sobre el concepto de la derivada, mediante algunas nociones, como lo son: la variación, las aproximaciones, pendientes entre otras, aporta una gran cantidad de elementos que nos servirán como argumentos explicativos acerca de como es que los estudiantes construyen el concepto de derivada a través de ciertas nociones. En esta parte rescatamos estos argumentos que los profesores utilizan en la presentación de el concepto de derivada con estudiantes del nivel superior. c) En la entrevista con el estudiante se le presentaron dos situaciones, en primer lugar se le planteó la función  $y = -(1/3)x^2 + 2$ . Se le pide al estudiante que dibuje la gráfica que corresponde a dicha función. Sin embargo, al parecer tiene cierta dificultad para hacerlo. Se le pregunta acerca del tipo de función, y responde “..... se trata de una ecuación lineal”, “... si es lineal, porque esta en función de "x" y por lo tanto se trata de una recta” . Al observar que la respuesta es incorrecta se le vuelve a preguntar acerca del tipo de función:

J: ¿Estas seguro de que es lineal?  
D: No, sería una parábola invertida.

En esta primera parte se intentó básicamente que el estudiante reconociera la gráfica de la función  $f(x) = -(1/3)x^2 + 2$ . Así, como de ubicar algunas de sus características tales como: raíces ó puntos de intersecciones. Sin embargo, esto no fue del todo posible ya que en la mayoría de los casos, el alumno equivocaba las respuestas, cayendo en contradicciones y confusiones. En la segunda parte, se pretendía que el estudiante manipulara sobre la gráfica dibujada a la recta secante, a través de variar los valores de "x", induciendo de esta manera la construcción del concepto de derivada mediante variaciones sucesivas. Esto no fue posible debido a que el estudiante no logró identificar ciertos elementos básicos de cálculo. La segunda situación que le fue presentada al estudiante consistió en el planteamiento de un problema dinámico.

J: ¿Qué fenómeno produce una piedra que se deja caer sobre un estanque de agua?

D: Se forman ondas circulares.

J: ¿Puedes dibujar el radio en cada caso?

D: Sí-

J: Dibuja las circunferencias en otro orden.

D: Sí.

J: ¿Puedes asignarle a cada circunferencia su radio, esto con números enteros.

D: R=1, R=2, R=3, R=4, R=5

Esta situación intentó que el estudiante visualizara que a través de la descripción de un fenómeno físico se pudiera estudiar las variaciones tanto del área como del perímetro de las circunferencias y a su vez que tan rápido se dan estas variaciones. El desarrollo de esta actividad con el estudiante, ha dejado en claro que mediante una visualización de este tipo el estudiante es capaz de construir de forma sencilla el concepto de derivada, haciendo uso de la noción de variación, como un elemento que le permite hacer observaciones más locales del fenómeno físico, así como el de poder medirlas y compararlas. El manejo del lenguaje en esta parte sin duda alguna tuvo mayor éxito, ya que a diferencia de la primera situación, en este caso tuvo menos dificultad para resolver las preguntas que se le plantearon.

## Conclusiones

Después de haber realizado una serie de actividades, quisiera resaltar algunos de los puntos que considero son importantes; debido a que nos permiten comprender mejor los procesos de aprendizaje en estudiantes del nivel superior. En cuanto a la revisión de textos, es evidente que la secuencia en la presentación de temas es como sigue: acerca de los números, funciones, límites y continuidad, antes de abordar el estudio del concepto de la derivada, en donde los autores priorizan en la mayoría de los casos acerca de el desarrollo de algoritmos mediante la aplicación de una serie de reglas para ello. Por su parte, los profesores intentan hacer variantes sobre los problemas que presentan a estudiantes en el estudio del concepto de la derivada. Han incorporado cierto tipo de problemas, los cuales describen un determinado fenómeno físico y, mediante las comparaciones de cambios. Como lo hemos mencionado al principio, nuestro trabajo se ha centrado básicamente en estudiar los procesos mediante los cuales los estudiantes construyen un determinado

concepto, de igual manera nos interesa observar el tipo de estrategias o recursos de los cuales ellos se valen para resolver dichos problemas. En nuestro trabajo con estudiantes hemos presentado dos situaciones A Y B. En la situación A, presentamos al estudiante la siguiente función:  $f(x) = -\frac{2}{3}x^2 + 2$ . Sin embargo, esta situación fue complicada para él, en tanto que no fue capaz de reconocer los elementos básicos de la función, tales como intersecciones con los ejes, entre otros. Se pretendía trabajar con la idea de dibujar la recta secante sobre la gráfica de dicha función, pero esto no fue posible, debido a que cuando se le pregunto al estudiante acerca de términos tales como pendiente, inclinación, entre otros, el estudiante no fue capaz de reconocerlas en ese momento.

En la situación B, presentamos al estudiante un problema dinámico (dejar caer una piedra en el estanque) con este problema intentamos observar mediante la variación de parámetros, tales como el radio, los procedimientos que el estudiante usa para resolver un problema ( construir el concepto de derivada, mediante la noción de variación). En esta parte, lo primero que el estudiante hace es dibujar círculos concéntricos como resultado de la pregunta que se le hizo, además, los dibuja en forma creciente asignándoles un radio determinado, esto es  $r_1 = 1, r_2 = 2, r_3 = 3, r_4 = 4$  y  $r_5 = 5$ , de esta manera pudo obtener ciertos valores para el área y el perímetro, los cuales dibujo en el plano (A - r) y (P - r). Al preguntarle sobre como se comporta el crecimiento, el comentó que el perímetro de la circunferencia crece linealmente y el área de lo hace en forma parabólica. Hemos observado que sus gráficas las realiza con base a la visualización física del fenómeno (ondas que se producen al impactarse la piedra con el agua). Se le pide dibujar una recta secante sobre la gráfica que determina el crecimiento del área en la cual ubica dos puntos sobre las intersecciones (A y B), aproxima el punto B hacia el punto A, dibujando varias secantes que indican gráficamente esas aproximaciones cuando el radio varía es decir decrece. Escribe la relación  $p = (p_2 - p_1) / (r_2 - r_1)$  y dándole valores a P y r va obteniendo diferentes valores cada vez más cercanos a 2, esto le permite decir que al variar el radio hacia un punto determinado cada vez más rápido se obtiene la rapidez con que cambia la velocidad de crecimiento del área de la circunferencia en ese punto A, y que además será diferente ese cambio para valores del radio diferentes.

Estas ideas nos permiten conocer o ubicar que hay diferentes velocidades de variación de una variable atribuida a una misma figura, pueden configurar la idea de que la variación esta asociada con la rapidez mental con que se establecen sus cambios.

### Referencias bibliográficas

- Ausubel, D. & all. (1987). Psicología Educativa. Un punto de vista Cognoscitivo. 2a edición. México: Trillas
- Boyer, C. (1986). Historia de las matemáticas. España: Alianza Universidad Textos.
- Cantoral, R. y Reséndiz, E. (1997). Aproximaciones sucesivas y sucesiones. (2a Edición). México: Grupo Editorial Iberoamericana.
- Cordero, F. (1998). *"El comportamiento tendencial de las funciones" como una categoría del conocimiento del cálculo*. México: Serie Antologías No 2.
- De León, H. (1998). *"Procedimientos de niños de primaria en la solución de problemas de reparto"*. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. (No2, p 6-7)
- Dolores, C. (1999). Una introducción a la derivada a través de la variación. (1a edición). México. Grupo Editorial Iberoamericana.
- Piaget, J. (1998). La equilibración de las estructuras cognitivas problema central del desarrollo. (5a edición). México. Siglo veintiuno editores.